This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Stanford University Libraries
3 6105 027 647 135

SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARI
Y LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANF
FORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVER
ANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
NIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARI
Y LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANF
· STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVER
ES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
FORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
SITY LIBRARIES
NIVERSITY LIBRARIES

NFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UN
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LI
LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · ST
ERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
RARIES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
NFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNI
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LI
LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · ST
ERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
RARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
ANFORD UNIVERSIT RIES · STANFORD UNIVERSITY

SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARI
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY L
LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES ·
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD L
TANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFO
RD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVER
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRAR
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY L
Y LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
· STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD U
IES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFO
FORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVER
RSITY LIB FORD UNIVERSITY LIBRARI

LIBRARIES
STANFORD
UNIVERSITY
LIBRARIES
STANFORD
UNIVERSITY
LIBRARIES
STANFORD
UNIVERSITY
LIBRARIES
STANFORD
UNIVERSITY
LIBRARIES
STANFORD
UNIVERSITY
LIBRARIES
STANFORD
UNIVERSITY
LIBRARIES
STANFORD
UNIVERSITY
LIBRARIES
STANFORD

MATHESIS

THIS ITEM HAS BEEN MICROFILMED BY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
REFORMATTING SECTION 1993. CONSULT
SUL CATALOG FOR LOCATION.

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liège, Membre de la Société royale des Sciences de Liège, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON

TOME HUITIÈME

ANNÉE 1888.

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
49, RUE DES CHAMPS, 49

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1888

ABRÉVIATIONS.

B. B. Bulletins de l'Académie royale de Belgique

C. R. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

N. A. M. Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

N. C. M. Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

J. M. E. (ou J. M. S.). Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS et L. LÉVY.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué d'abord par BORCHARDT, puis par KRONECKER et WEIERSTRASS (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

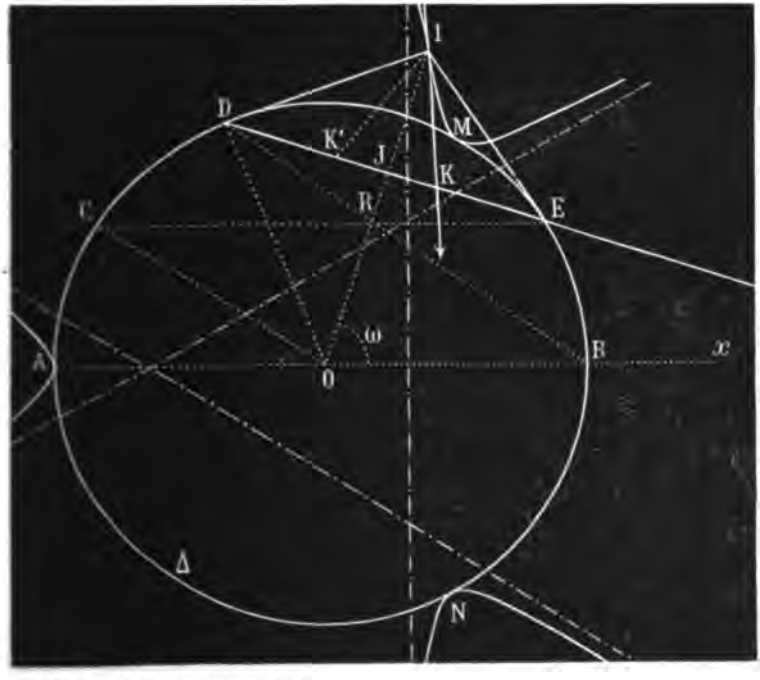
OCT 1960
MATHEMATICS

MATHESIS

SUR UNE TRISECTRICE REMARQUABLE;

par M. G. DE LONGCHAMPS, professeur au Lycée Charlemagne.

Lorsqu'on cherche la transformée par polaires réciproques de l'hypocycloïde à trois rebroussements, la *courbe merveilleuse*, comme l'a nommée Cremona (*), on est conduit à une courbe remarquable Θ; nous indiquerons ici quelques-unes de ses propriétés.



1. *Équation polaire et équation cartésienne de* Θ. Imaginons une circonférence Δ, de centre O, et soit AB un diamètre fixe. E étant un

(*) On peut se reporter, à propos de cette courbe, à une note que nous avons insérée dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (1884, p. 169); elle est accompagnée de quelques renseignements bibliographiques que l'on pourra consulter.

point mobile sur Δ, prenons *arc* AD = 2BE; on sait que la corde DE enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements, touchant Δ aux sommets d'un triangle équilatéral AMN. Le point de contact de DE avec son enveloppe est le symétrique de D par rapport à E.

Les tangentes en D, E se rencontrent au pôle I de la droite DE. Le lieu de I est donc la polaire réciproque de l'hypocycloïde par rapport à Δ ; c'est la courbe Θ que nous nous proposons d'étudier.

Soient OI = ρ, IOB = ω les coordonnées polaires de I (fig. 1) et posons ε = EOB, OB = R. Nous aurons

$$\omega = \frac{\text{EOB} + \text{DOB}}{2} = \frac{180^\circ - \varepsilon}{2}, \quad \varepsilon = 180^\circ - 2\omega,$$

$$\text{IOB} = \frac{\text{DOB} - \text{EOB}}{2} = \frac{180^\circ - 3\varepsilon}{2} = 3\omega - 180^\circ,$$

d'où l'on déduit, en considérant le triangle rectangle IOD, l'équation polaire de Θ :

$$\rho = -\frac{R}{\cos 3\omega}. \qquad (1)$$

De celle-ci, on conclut l'équation cartésienne

$$x(3y^2 - x^2) - R(x^2 + y^2) = 0. \qquad (2)$$

De ces équations, il résulte que *la courbe Θ est une cubique caractérisée par les propriétés suivantes* : 1° *elle possède un point double ombilical*(*); 2° *elle admet trois axes de symétrie.*

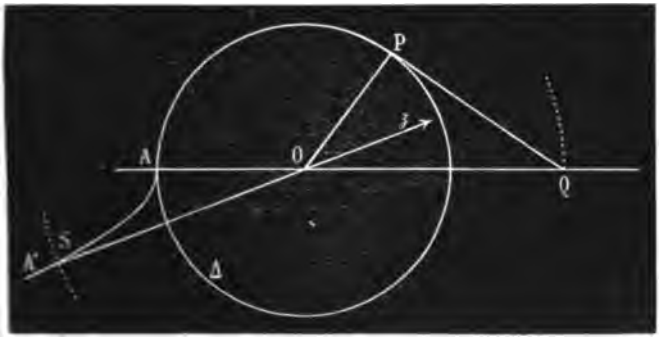
Nous laissons à nos lecteurs le soin de vérifier que toute courbe jouissant de cette double propriété est identique à Θ, et, aussi, celui de construire la courbe; elle a la forme générale indiquée par la figure.

1. *Construction de* Θ, *tangente par tangente.* La tangente en I est la polaire, par rapport à Δ, du point F où DE touche l'hypocycloïde; comme elle coupe DE au conjugué harmonique de F, il suffit de diviser ED en trois parties égales et de joindre I à K, premier point de division, à partir de E.

2. *La courbe Θ est une trisectrice.* L'équation (1) prouve que Θ est une trisectrice. Pour diviser un angle donné POQ en trois parties égales, construisons l'arc AA′ de la courbe Θ ci-dessus définie (fig. 2); menons

(*) Nous proposons ici d'appeler point double ombilical un point tel que les tangentes en ce point soient parallèles aux directions isotropes du plan.

la tangente PQ à Δ, et de O comme centre, avec le rayon OQ, traçons un arc de cercle qui coupe AA′ en S; la droite SO, prolongée suivant Oz donne un angle zOQ qui est le tiers de POQ. En effet,



OQ = (R : cos POQ), et d'après l'équation (1), OS = (R : cos 3zOQ), d'où POQ = 3zOQ.

4. ***Quadrature de*** Θ. L'aire σ du secteur ayant pour sommet le point O et pour base un arc quelconque de Θ, est donnée par

$$d\sigma = \frac{1}{2}\rho^2 d\omega = \frac{R^2}{6}\frac{d(3\omega)}{\cos^2 3\omega}, \quad \sigma = \frac{R^2}{6}\operatorname{tg} 3\omega + C.$$

Elle est donc exprimable par les transcendantes élémentaires.

5. ***Rectification de*** Θ. La transformation que nous avons fait connaître (***Mathesis***, 1887, p. 173), et grâce à laquelle on peut déduire, d'une droite donnée, des courbes rectifiables par les intégrales elliptiques, s'applique à la courbe Θ. On observera, en effet, que l'équation de cette ligne se déduit de celle de la droite $\rho + R \sec\omega = 0$ par le changement de ω en 3ω. D'ailleurs, un calcul direct donne

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = R^2\frac{\cos^2 3\omega + 9\sin^2 3\omega}{\cos^2 3\omega}d\omega^2,$$

d'où, en posant $\operatorname{tg} 3\omega = t$,

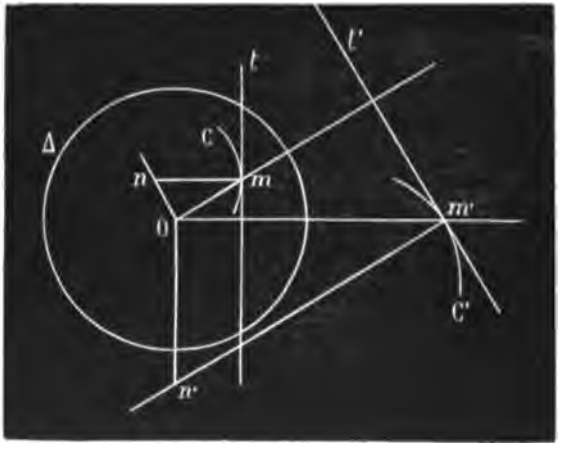
$$\frac{s}{R} = \frac{1}{3}\int\sqrt{\frac{1+9t^2}{1+t^2}}\,dt.$$

On reconnaît là une intégrale elliptique.

6. ***Rayon de courbure de*** Θ. J'ai donné (*loc. cit.*) une construction du rayon de courbure en un point pris sur l'hypocycloïde à trois rebrous-

sements; d'autre part, on sait (*) facilement construire le rayon de courbure en un point m pris sur une courbe C, lorsqu'on peut déterminer celui de la courbe corrélative C', au point correspondant m'. Voici, de ce problème, une élégante solution qui m'a été communiquée par M. d'Ocagne.

Soient ds et ds' les arcs infiniment petits (fig. 3) décrits par les points m et m'. La tangente t' étant la polaire de m par rapport au cercle directeur Δ, la normale $m'n'$ est constamment parallèle au rayon vecteur Om;



donc l'angle de contingence au point m' est égal à l'angle $d\omega$ de deux positions infiniment voisines du rayon vecteur Om. De même, l'angle de contingence en m est $d\omega'$. Dès lors, si R et R' sont les rayons de courbure de C et C' en m et m', on a

$$R = \frac{ds}{d\omega'}, \quad R' = \frac{ds'}{d\omega}.$$

Or, si nous élevons en O à Om et Om' les perpendiculaires On et On' et que nous appelions N et N' les normales mn et $m'n'$, nous avons

$$N = \frac{ds}{d\omega}, \quad N' = \frac{ds'}{d\omega'}.$$

(*) Ce problème a été traité par M. Mannheim (*Journal de Liouville*, 1866) dans un mémoire ayant pour titre : *Transformations par polaires réciproques des propriétés relatives aux rayons de courbure.*

Donc,

$$RR' = NN'.$$

Telle est la relation cherchée. On peut l'écrire ainsi

$$\frac{N}{R}\cdot\frac{N'}{R'} = 1,$$

et la rapprocher de la suivante

$$\frac{N}{R} + \frac{N'}{R'} = 2, \qquad (3)$$

qui lie les rayons de courbure en deux points correspondants dans la transformation par rayons vecteurs réciproques (*).

6. *Courbe inverse de* Θ. Soit J le milieu de DE (fig. 1); on a

$$OJ.OI = R^2.$$

Le lieu décrit par J est donc une transformée par inversion de Θ; c'est aussi la podaire du point O par rapport à l'hypocycloïde. Cette nouvelle courbe a pour équation polaire

$$\rho + R\cos 3\omega = 0,$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$(x^2 + y^2)^2 + Rx(x^2 - 3y^2) = 0.$$

C'est une quartique possédant à l'origine un point triple et, naturellement, les tangentes en ce point sont parallèles aux asymptotes de Θ; de plus, elle est *isotropique*, si nous appelons ainsi, avec M. d'Ocagne, une courbe qui n'admet pas d'autres directions asymptotiques que celles du cercle. Elle a la forme d'une rosace à trois feuilles et est caractérisée par les propriétés suivantes ; 1° *elle est isotropique;* 2° *elle admet un point triple et trois axes de symétrie.*

La construction de la tangente à la rosace trifolium en question, résulte bien simplement de celle que nous avons indiquée tout à l'heure pour déterminer la tangente en un point de Θ. Ayant partagé DE en trois parties égales aux points K, K', la tangente à la rosace au point J est parallèle à la droite IK'; cela résulte de la propriété des tangentes en deux points correspondants de deux courbes inverses.

(*) D'OCAGNE, *Mémoire sur les transformations centrales des courbes planes*, formule (10) (*Mathesis*, 1884, p. 77); NICOLAÏDÈS, N. A. M. 1865, (2) IV, p. 184, 1866, (2) V, p. 168.

D'après une propriété des podaires, la normale en J passe au milieu de la droite OF. Il serait intéressant de déduire cette propriété de la construction qui vient d'être donnée pour la tangente.

On observera encore : 1° que la rosace peut servir de trisectrice; 2° que sa quadrature est possible par les transcendantes ordinaires; 3° qu'elle est rectifiable par des arcs de coniques; 4° que la formule (3) peut servir à trouver le rayon de courbure.

7. *Polaire réciproque d'une hypocycloïde quelconque.* Toute épicycloïde (ou hypocycloïde), de module m, c'est-à-dire telle que les rayons du cercle fixe et du cercle mobile sont dans le rapport $(m : 1)$(*), est l'enveloppe d'une corde d'un cercle Δ, dont les extrémités D, E parcourent la circonférence avec des vitesses ayant le rapport $[(m+1) : 1]$. Soit B un point de Δ où les mobiles D et E se rencontrent, et posons (fig. 1)

$$BE = \varepsilon, \quad BED = (m+1)\varepsilon, \quad IOB = \omega = \frac{m+2}{2}\varepsilon.$$

L'équation polaire du lieu du point I sera

$$\rho = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}m\varepsilon} = \frac{R}{\cos\frac{m}{m+2}\omega}. \qquad (4)$$

En faisant $m = -3$ et en tenant compte de la différence de direction de l'axe polaire, on retrouve l'équation (1).

Les propriétés que nous avons données pour la courbe e, s'appliquent également aux lignes représentées par l'équation (4).

SUR LE MAXIMUM DU PRODUIT DE PLUSIEURS FACTEURS POSITIFS DONT LA SOMME EST CONSTANTE;

d'après MM. Haton de la Goupillière, Darboux et Goursat.

« La proposition qui fait le sujet de cet article appartient aux éléments de l'Algèbre. La démonstration qu'on en donne habituellement est sujette à des objections (Darboux) » parce que l'on y admet implicitement ou explicitement que l'expression considérée a un maximum, ce qui n'est

---

(*) m est positif dans le cas d'une épicycloïde, négatif dans le cas d'une hypocycloïde.

pas évident *a priori*(*). Nous croyons donc utile de faire connaître dans *Mathesis* deux démonstrations simples et rigoureuses publiées récemment par MM. DARBOUX (*Bulletin des sciences mathématiques*, 1887, (2) XI, 1re partie, pp. 149-151) et GOURSAT (N. A. M. 1887, (3) VI, pp. 437-439), puis une remarque ancienne de M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE (N. A. M., 1868, (2) VII, p. 525) sur le même sujet.

I. *Démonstration de* M. GOURSAT. Soient $x, y, z, u, \ldots v, w$, des quantités positives variables, en nombre p, ayant une somme constante égale à S; m leur moyenne arithmétique, de sorte que $S = mp$. Je dis que leur produit

$$P = xyzu \ldots vw$$

est inférieur à m^p, si tous les facteurs $x, y, \ldots, w$, ne sont pas égaux à m.

En effet, si cette dernière circonstance ne se présente pas, il y a au moins un facteur $m - h$ inférieur à m, et un facteur $m + k$ supérieur à m. Sans toucher aux autres facteurs, remplaçons dans le produit P, $m - h$ et $m + k$ par $m - h + k$ et m. La somme des facteurs du produit sera restée la même, tandis que le produit aura augmenté, car on a

$$(m - h + k)\, m > (m - h)(m + k).$$

En opérant sur le produit modifié comme sur le produit primitif et ainsi de suite autant de fois qu'il sera nécessaire, on finira par arriver à un produit composé de p facteurs égaux à m et évidemment plus grand que tous les produits antérieurement obtenus : m^p est donc la valeur maxima de P.

II. *Démonstration de* M. DARBOUX. 1° Supposons le nombre des facteurs du produit P égal à une puissance de 2, à 16 par exemple. Si tous les facteurs ne sont pas égaux entre eux, soient x, y deux facteurs inégaux.

Appelons $x_1, y_1, z_1, u_1, \ldots, v_1, w_1$ les moyennes $\frac{1}{2}(x + y)$, $\frac{1}{2}(z + u) \ldots \frac{1}{2}(v + w)$ des facteurs; x_2, y_2, z_2, u_2, les moyennes $\frac{1}{2}(x_1 + y_1)$, $\frac{1}{2}(z_1 + u_1) \ldots$;

(*) Dans le *Traité d'Algèbre* de BERTRAND (3e édition, 1863, t. I, p. 354), la difficulté est signalée et à moitié résolue. « *Chacune des parties* (d'une somme a) *étant moindre que* a, *leur produit ne peut pas atteindre* a^n (n étant le nombre des parties) : *il est donc susceptible d'un maximum.* » Pour compléter ce raisonnement, il faudrait prouver que le produit est une fonction continue des facteurs indépendants qui y entrent. Il existe, en effet, des fonctions discontinues toujours inférieures à une quantité donnée et n'ayant pas de valeur maxima. (P. M.)

x_2, y_2 les moyennes $\frac{1}{2}(x_2+y_2)$, $\frac{1}{2}(z_2+u_2)$; enfin, soit $x_4=\frac{1}{2}(x_3+y$
On aura

$$S=x+y+z+u+\cdots+v+w=2(x_1+y_1+z_1+u_1+\cdots+v_1+w_1$$
$$=4(x_2+y_2+z_2+u_2)=8(x_3+y_3)=16\,x_4$$

et, par suite, x_4 est la moyenne m des 16 facteurs.

On a, d'ailleurs,

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Donc, selon que a et b sont égaux ou inégaux, on aura

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \text{ou} \quad ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Par suite, d'après les hypothèses faites sur x, y, etc.,

$$xy<x_1^2,\quad zu\leqq y_1^2,\ \cdots,\quad vw\leqq w_1^2$$

et

$$xyzu\ldots vw<(x_1y_1z_1u_1\ldots w_1)^2.$$

On prouve de même les relations

$$x_1y_1z_1\ldots w_1\leqq(x_2y_2z_2u_2)^2,\quad x_2y_2z_2u_2\leqq(x_3y_3)^2,\quad x_3y_3\leqq m^2.$$

Par conséquent,

$$P=xyzu\ldots vw<m^{16};$$

ce qu'il fallait démontrer.

2° Supposons que le nombre des facteurs ne soit pas égal à une puissance de 2; par exemple, soit $p=11$. Le produit $Q=Pm^5$ de 16 facteurs dont 5 sont égaux à m, est tel que la somme de ces 16 facteurs est égale à $16m$, si celle des onze facteurs de P est égale à $11m$. Si tous les facteurs de P ne sont pas égaux à m, il en sera de même de ceux de Q. On aura donc

$$Q<m^{16};$$

ou $P<m^{11}$, puisque $Q=Pm^5$.

III. Remarque de M. Haton de la Goupillière. Soit à chercher le maximum du produit $x^py^qz^r$, lorsque la somme des quantités positives x, y, z conserve une valeur constante. Si l'on essaie d'appliquer la démonstration classique à l'expression suivante que l'on substitue à la proposée

$$\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdots\left(\frac{x}{p}\,\frac{y}{q}\right)\cdot\frac{y}{q}\cdots\frac{y}{q}\cdot\frac{z}{r}\cdot\frac{z}{r}\cdots\frac{z}{r}, \qquad (A)$$

en remplaçant les deux facteurs mis entre parenthèses, chacun par leur moyenne arithmétique, sans altérer la valeur des autres, on se heurte à une impossibilité, puisqu'un certain nombre de ces facteurs sont nécessairement identiques à ceux que l'on veut modifier. Le raisonnement paraît dès lors tout à fait dénué de fondement.

Voici l'explication qu'il convient d'ajouter sur ce point. Considérons l'expression

$$\alpha.\beta.\gamma\ldots\lambda \qquad (B)$$

composée de $p+q+r$ facteurs indépendants, sauf la condition de la constance de leur somme. Le maximum de l'expression (B) correspond à l'égalité de tous les facteurs. Mais l'expression (A) peut prendre la valeur qui est le maximum de (B) et comme elle ne peut prendre que des valeurs comprises parmi celles dont (B) est susceptible, il s'en suit qu'elle ne peut dépasser cette valeur du maximum de (B), qui est bien, dès lors, le maximum de A(*). (P. M.)

NOTE D'ALGÈBRE.

par M. Verniory, élève-ingénieur.

1. Posons

$$\frac{1.2.3\ldots n}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x+2}+\cdots+\frac{A_n}{x+n}.$$

Chassant les dénominateurs et faisant successivement $x=-1$, $-2,\ldots -n$, on trouve

$$A_1=n,\quad A_2=-\frac{n(n-1)}{1},\quad A_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2},\ldots$$

Par conséquent,

$$\frac{C_{n,1}}{x+1}-\frac{2C_{n,2}}{x+2}+\frac{3C_{n,3}}{x+3}-\frac{4C_{n,4}}{x+4}+\cdots=\frac{1.2\ldots n}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

(*) Le raisonnement de M. Haton de Goupillière est aussi employé dans la recherche des maxima et minima relatifs par la méthode des multiplicateurs en calcul différentiel et en calcul des variations.

2. En particulier, pour $x = 0, 1, 2, \ldots n$:

$$C_{n,1} - C_{n,2} + C_{n,3} - C_{n,4} + \cdots = 1,$$

$$\frac{1}{2}C_{n,1} - \frac{2}{3}C_{n,2} + \frac{3}{4}C_{n,3} - \frac{4}{5}C_{n,4} + \cdots = \frac{1}{n},$$

$$\left(\frac{1}{3}C_{n,1} + \frac{3}{5}C_{n,3} + \frac{5}{7}C_{n,4} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2}C_{n,2} + \frac{2}{3}C_{n,4} + \frac{3}{4}C_{n,6} + \cdots\right) = \frac{2}{(n+1)(n+2)},$$

$$\frac{1}{n+1}C_{n,1} - \frac{2}{n+2}C_{n,2} + \frac{3}{n+3}C_{n,3} - \frac{4}{n+4}C_{n,4} \cdots = \frac{1.2 \ldots n}{(n+1)(n+2) \cdots 2}$$

3. Changeons x en $-x$:

$$\frac{C_{n,1}}{x-1} - \frac{2C_{n,2}}{x-2} + \frac{3C_{n,3}}{x-3} - \frac{4C_{n,4}}{x-4} + \cdots = (-1)^{n-1}\frac{1.2 \ldots n}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$$

Remplaçant x par $n+1$, $n+2$,..., on obtient

$$\frac{1}{n}C_{n,1} - \frac{2}{n-1}C_{n,2} + \frac{3}{n-2}C_{n,3} \cdots + (-1)^{n-1}nC_{n,n} = (-1)^{n-1},$$

$$\frac{1}{n+1}C_{n,1} - \frac{2}{n}C_{n,2} + \frac{3}{n-1}C_{n,3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n}{2}C_{n,n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}, \text{ etc.}$$

4. Combinons les formules générales des n^os 1 et 3 par soustraction. En désignant par S_p la somme des produits des n premiers nombres p à p, on trouve que l'expression

$$\frac{C_{n,1}}{x^2-1} - \frac{2^2C_{n,2}}{x^2-2^2} + \frac{3^2C_{n,3}}{x^2-3^2} \cdots \qquad (1)$$

se réduit, suivant que n est pair ou impair, à l'une ou l'autre des valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} &-1.2 \ldots n\,\frac{x^n + S_2x^{n-2} + S_4x^{n-4} + \cdots + S_n}{(x^2-1^2)(x^2-2^2)\ldots(x^2-n^2)}, \\ &1.2 \ldots n\,\frac{S_1x^{n-1} + S_3x^{n-3} + \cdots + S_n}{(x^2-1)^2(x^2-2^2)\ldots(x^2-x^2)}. \end{aligned} \qquad (1')$$

De même, si l'on ajoute les deux identités, on voit que

$$\frac{C_{n,1}}{x^2-1} - \frac{2C_{n,2}}{x^2-2^2} + \frac{3C_{n,3}}{x^2-3^2} - \cdots \qquad (2)$$

a pour valeur l'une ou l'autre des deux expressions

$$\begin{aligned} &-1.2\ldots n\,\frac{S_1x^{n-2}+S_2x^{n-4}+\cdots+S_{n-1}}{(x^2-1)^2(x^2-2^2)\ldots(x^2-n^2)},\\ &1.2\ldots n\,\frac{x^{n-1}+S_2x^{n-4}+\cdots+S_{n-1}}{(x^2-1)^2(x^2-2^2)\ldots(x^2-n^2)}, \end{aligned} \qquad (2')$$

suivant que n est pair ou impair.

5. Si l'on compare les expressions (1) et (2), réduites directement à une seule fraction, à leurs valeurs respectives (1') et (2'), on trouve plusieurs formules remarquables, dont nous signalons les suivantes :

$$C_{n,1}-2C_{n,2}+3C_{n,3}-4C_{n,4}+\cdots=0,$$
$$C_{n,1}-2^2C_{n,2}+3^2C_{n,3}-4^2C_{n,4}+\cdots=0.$$

SUR LES AIRES DE QUELQUES TRIANGLES;

par M. BARBARIN, professeur au lycée de Toulon.

1. Soient α, β, γ les points de contact des côtés du triangle ABC avec le cercle inscrit, r le rayon de ce cercle et s l'aire du triangle $\alpha\beta\gamma$. Soient $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, r_1, s_1)$,..... les éléments homologues relatifs aux cercles exinscrits, S l'aire ABC, R le rayon du cercle ABC.

Des égalités

$$\frac{I\beta\gamma}{ABC}=\frac{I\beta.I\gamma}{AB.AC}=\frac{r^2}{bc},\quad \frac{I\gamma\alpha}{ABC}=\frac{r^2}{ca}\ldots,$$

on tire, en additionnant,

$$\frac{s}{S}=\frac{2pr^2}{abc}=\frac{r}{2R} \qquad \text{(théorème connu).}$$

Par suite,

$$\frac{s}{r}=\frac{s_1}{r_1}=\frac{s_2}{r_2}=\frac{s_3}{r_3}=\frac{S}{2R},$$
$$\frac{1}{s}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3},$$
$$S=\tfrac{1}{2}(s_1+s_2+s_3-s),$$
$$S^3=4R^2\sqrt{s\,s_1s_2s_3},$$
$$a=\frac{S^2}{2R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s_1}\right),\ \text{etc.},$$

$$p=\frac{S^2}{2Rs},\quad p-a=\frac{S^2}{2Rs_1},\quad \text{etc.},$$

$$r^2=\frac{Ss^2}{\sqrt{ss_1s_2s_3}},\quad \text{etc. (*)}$$

2. Soient t, t_1, t_2, t_3 les aires des triangles $I_1I_2I_3$, II_2I_3, II_1I_3, II_1I_2. Les aires des triangles semblables $I_1I_2I_3$, $\alpha\beta\gamma$ sont entre elles comme les carrés des rayons des cercles circonscrits. Le triangle ABC ayant pour sommets les pieds des hauteurs de $I_1I_2I_3$, le rayon du cercle circonscrit à ce dernier sera égal à 2R; par suite,

$$\frac{t}{s}=\left(\frac{2R}{r}\right)^2,$$

et, en tenant compte de la valeur trouvée pour le rapport (s : S),

$$S^2=ts=t_1s_1=t_2s_2=t_3s_3.$$

Signalons encore les relations suivantes, dont la première est déjà connue (*Mathesis*, t. I. p. 72)

$$tr=t_1r_1=t_2r_2=t_3r_3=2SR,$$

$$\frac{2}{S}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}-\frac{1}{t}.$$

SUPPLÉMENT.

Le supplément de la livraison de janvier de *Mathesis* est un article sur *la Monnaie*, par M. l'abbé Gelin, professeur au Collège St-Quirin à Huy, publié l'an dernier dans la *Revue des questions scientifiques*, t. XXII, livraison d'octobre 1887, pp. 243-256.

L'auteur expose, dans cet intéressant et utile opuscule, la théorie de la monnaie, si controversée parmi les économistes; la question du double étalon, qu'il résout dans le sens de l'étalon d'or unique; la convention monétaire dite de l'*Union latine*; enfin, la situation monétaire des principaux pays.

Voici l'indication de quelques fautes d'impression à corriger dans ce supplément : Page 9, note 3, au lieu de : Hardy, lire : Lardy; page 11, ligne 24, au lieu de : 32 fr., lire : 62 fr.; page 15, ligne 3, lire : 81 marcs valent 100 francs.

(*) Ces relations se déduisent immédiatement des égalités

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3},\quad 4R=r_1+r_2+r_3-r,\quad S=\sqrt{(rr_1r_2r_3)},\ \ldots.$$

NOTES MATHÉMATIQUES.

×1. *Conséquences du théorème de Stewart*, d'après M. SIMART (Examen oral de l'école navale). Si, de trois points en ligne droite A, B, C, on mène les tangentes AA′, BB′, CC′ à une même circonférence O, on a

$$\overline{AA'}^2 . BC + \overline{BB'}^2 . CA + \overline{CC'}^2 . AB + AB . BC . CA = 0.$$

On considère trois circonférences O, O′, O″ homothétiques directes par rapport à un même centre d'homothétie, et une quatrième circonférence quelconque C. Si R, R′, R″ sont les rayons des circonférences O, O′, O″ et t, t', t'' les longueurs respectives des tangentes communes intérieures aux trois couples de circonférences (O, C) (O′, C) (O″, C), on a

$$(t^2 - R^2) O'O'' + (t'^2 - R'^2) O''O + (t''^2 - R''^2) OO' + OO' . O'O'' . O''O = 0.$$

×2. *Théorème sur les transversales*, par M. LAURENS (Cambrai). Dans le tome VII, p. 245, de *Mathesis* se trouve énoncé et démontré, par la méthode des projections, un intéressant théorème de M. Neuberg sur les transversales. Son corrélatif qui s'établit intuitivement par la méthode des polaires réciproques est le suivant :

Une transversale rencontre les 3 *côtés d'un triangle* ABC *en* 3 *points* a, b, c; *si on les joint aux sommets opposés, on forme un triangle* A′B′C′. *On coupe le triangle proposé par une autre transversale quelconque* $a'b'c'$; *les droites* a'A′, b'B′, c'C′ *rencontrent les trois côtés opposés du triangle* A′B′C′ *en* 3 *points* α, β, γ *en ligne droite.*

La démonstration directe, qui s'applique au théorème de M. Neuberg, est tout à fait élémentaire.

Si l'on regarde A′ comme le centre d'un faisceau de quatre droites A′ (aBCa'), on a la relation anharmonique entre les segments et les sinus des angles

$$\frac{aB . Ca'}{aC . a'B} = \frac{\sin aA'B . \sin a'A'C}{\sin aA'C . \sin a'A'B}.$$

De même pour les autres sommets. On fait le produit, membre à membre, des trois égalités et en tenant compte des relations que donnent les transversales, on obtient la relation qui exprime que les trois points α, β, γ sont en ligne droite.

Pour ce théorème, comme pour celui de M. Neuberg, on obtient sans difficulté, en vertu des relations trouvées, la démonstration des réciproques.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 410.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 22.)

Étant données deux droites rectangulaires OX, OY *et une circonférence* ω *touchant ces droites, démontrer, par la géométrie, que le foyer d'une parabole touchant les lignes* OX, OY *et la circonférence* ω *décrit une circonférence tangente à* OX *et* OY. (Weill.)

Démontrer que la corde de contact de la parabole avec l'angle XOY *enveloppe une hyperbole équilatère ayant pour foyer le point* O. (J. N.)

Solution géométrique par M. Jeřábek. 1° En un point quelconque M de la circonférence ω, menons la tangente, et soient P, Q les points de rencontre de cette droite avec OX, OY. Si P'Q' est une seconde tangente à la circonférence, la parabole qui touche OX, OY, PQ, P'Q' a son foyer F à l'intersection des circonférences OPQ, OP'Q'. Faisons tendre indéfiniment P'Q' vers PQ; alors la parabole, à la limite, touchera PQ en M. Donc le lieu du foyer F d'une parabole touchant OX, OY et le cercle ω en un point (variable) M, est aussi l'enveloppe de la circonférence circonscrite au triangle que forment OX, OY avec la tangente PQ au cercle ω en M.

Le centre N de la circonférence OPQ décrit, d'après un théorème connu(**), une hyperbole équilatère, ayant pour centre ω et pour foyer O; le second foyer O' est symétrique de O par rapport à ω. Mais, lorsque de chaque point N d'une conique comme centre, on décrit une circonférence passant par un foyer O, l'enveloppe de cette circonférence est une

---

(*) Nous avons oublié de mentionner, dans les livraisons précédentes, de bonnes solutions des questions 567, 568, par M. l'abbé Gelin. M. Mineur nous a aussi adressé une nouvelle solution de la question 325, que nous publierons prochainement.

(**) Soient A, B les points de contact du cercle ω avec OX, OY, et soient C, D les extrémités du diamètre Oω de ce cercle. Si p, q, n sont les projections de P, Q, N sur la droite AB, on a : $Pp = \frac{1}{2}PA\sqrt{2}$, $Qq = QB\sqrt{2}$, $Nn = \frac{1}{2}(Pp + Qq) = \frac{1}{2}(PA + QB)\sqrt{2} = \frac{1}{2}PQ\sqrt{2} = \frac{1}{2}NO\sqrt{2}$. Donc, le lieu de N est une hyperbole équilatère S, ayant pour foyer O, pour directrice AB et pour sommets C, D. (J. N.)

circonférence (O') ayant pour centre le second foyer O' et pour rayon l'axe focal. Donc, etc.

2° L'angle XOY étant droit, O est sur la directrice de la parabole et la corde de contact est la perpendiculaire menée par F sur OF. L'enveloppe de cette corde est donc l'antipodaire de la circonférence (O') par rapport à O; c'est une hyperbole équilatère, parce que les tangentes menées de O au cercle (O') sont rectangulaires.

Note. Soient A, B les points de contact de OX, OY avec le cercle ω; A', B' les points où ces droites touchent la parabole variable; P, Q les points de rencontre de OX, OY avec la tangente menée au point M du cercle ω. Posons $OA = OB = r$, $OA' = \alpha$, $OB' = \beta$, $AP = \lambda$, $BQ = \mu$. Le foyer F étant la projection de O sur la corde A'B', les coordonnées de ce point vérifient les équations

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1, \quad y=\frac{\alpha}{\beta}x. \tag{1}$$

Les propriétés segmentaires des tangentes à une parabole donnent

$$\frac{OP}{PA'}=\frac{B'Q}{QO}=\frac{QM}{MP}, \quad \text{ou} \quad \frac{r+\lambda}{\alpha-r-\lambda}=\frac{\beta-r-\mu}{r+\mu}=\frac{\mu}{\lambda},$$

et en ajoutant les termes du dernier rapport aux termes correspondants des deux autres,

$$\frac{r+\lambda+\mu}{\alpha-r}=\frac{\beta-r}{r+\lambda+\mu}=\frac{\mu}{\lambda}. \tag{2}$$

Enfin

$$(r+\lambda)^2+(r+\mu)^2=(\lambda+\mu)^2, \quad \text{ou} \quad r(r+\lambda+\mu)=\lambda\mu. \tag{3}$$

Entre (1), (2) et (3), il faut éliminer α, β, λ, μ. En remplaçant dans (2), $(r+\lambda+\mu)$ par $\lambda\mu : r$, on trouve $\lambda=\sqrt{r(\alpha-r)}$, $\mu=\sqrt{r(\beta-r)}$, et ces valeurs portées dans (3) donnent

$$2r(\alpha+\beta)-\alpha\beta=2r\sqrt{2\alpha\beta}. \tag{4}$$

De (1) on tire

$$\alpha=\frac{x^2+y^2}{x}, \quad \beta=\frac{x^2+y^2}{y}.$$

Par conséquent, l'équation du lieu de F est

$$\frac{2r(x^2+y^2)(x+y)}{xy}-\frac{(x^2+y^2)^2}{xy}=\frac{2r(x^2+y^2)\sqrt{2}}{\sqrt{xy}},$$

ou, sous forme rationnelle et après suppression du facteur $x^2 + y^2$,

$$(x - 2r)^2 + (y - 2r)^2 = 4r^2.$$

(D'après les solutions de MM. Pisani, Déprez et Fr. Falisse).

Les coordonnées du foyer sont, d'après les équations (1)

$$x = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad y = \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

La droite qui joint les projections du foyer sur les tangentes OX, OY a donc pour équation

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha x + \beta y) = \alpha^2\beta^2, \qquad (5)$$

c'est la tangente au sommet de la parabole. Si, entre (4), (5) et l'équation

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha y - \beta x) = \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2), \qquad (6)$$

laquelle représente la perpendiculaire abaissée du foyer sur la droite (5), on élimine α, β, on a l'équation du lieu du sommet. Il est avantageux de résoudre d'abord (5) et (6) par rapport x, y, ce qui donne

$$x = \frac{\alpha\beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad y = \frac{\alpha^4\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad \text{d'où} \quad \alpha x^{\frac{1}{3}} = \beta y^{\frac{1}{3}} = (x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})^2;$$

et l'équation du lieu est

$$(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})^3 = 2r\{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{2}}(xy)^{\frac{1}{6}}\}.$$

Le lieu du centre du cercle osculateur au point B′ de la parabole est représenté par

$$2y + x + 2\sqrt{xy} = \frac{y^2}{r},$$

et celui de l'intersection de la normale en B′ avec le diamètre mené par A′ a pour équation

$$x + 2y \pm 2\sqrt{xy} = \frac{xy}{2r}. \qquad \text{(Déprez.)}$$

Voir une autre solution analytique par M. Barisien, dans les N. A. M., 1885, (3), IV, p. 535.

Question 459.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 192.)

La différence de deux cubes consécutifs n'est jamais un bicarré.

(E. Lucas.)

Solution par M. Fauquembergue, ***professeur au Lycée de Mont-de-Marsan.*** Cette question revient à prouver que l'équation

$$3x^2 + 3x + 1 = y^4$$

est impossible en nombres entiers (excepté pour $x = 0$, $y = 1$).

Or, en multipliant les deux membres par 4 et posant $2x + 1 = z$, on peut la mettre sous la forme

$$3z^2 + 1 = 4y^4,$$

ou

$$(2y^2 + 1)(2y^2 - 1) = 3z^2.$$

Les deux facteurs du premier membre étant premiers entre eux, l'un d'eux doit être un carré et l'autre le triple d'un carré. Mais, y étant impair, $2y^2 - 1$ est de la forme $16t + 1$, tandis que le triple d'un carré impair est de forme $24t + 3$. Donc, la seule décomposition possible est la suivante :

$$2y^2 + 1 = 3\alpha^2 \quad \text{avec} \quad 2y^2 - 1 = \beta^2; \quad z = \alpha\beta,$$

α et β étant liés par la relation

$$3\alpha^2 - \beta^2 = 2.$$

Les équations précédentes donnent

$$4y^2 = 3\alpha^2 + \beta^2,$$

ou

$$(2y + \beta)(2y - \beta) = 3\alpha^2.$$

Puisque $2y + \beta$ et $2y - \beta$ sont premiers entre eux, il faut que l'on ait

$$2y + \beta = 3\gamma^2 \quad \text{avec} \quad 2y - \beta = \delta^2, \quad \alpha = \gamma\delta,$$

ou

$$2y - \beta = 3\gamma^2 \quad \text{avec} \quad 2y + \beta = \delta^2, \quad \alpha = \gamma\delta.$$

D'ailleurs β pouvant être négatif, la seconde décomposition rentre dans la première. Celle-ci donne $\alpha = \gamma\delta$, $\beta = \frac{1}{2}(3\gamma^2 - \delta^2)$, valeurs qui transforment la relation $3\alpha^2 - \beta^2 = 2$ en la suivante :

$$2(\delta^4 - 1^4) = \left[\frac{3(\gamma^2 - \delta^2)}{2}\right]^2.$$

Il remarque aussi que la résolution de l'équation $z^{15} - 1 = 0$ se ramène à celle d
l'équation

$$u^5 + u^2 - 4u + 1 = 0, \qquad (3$$

dont les racines sont

$$u_1 = 2(\cos x + \cos 5x), \quad u_2 = 2(\cos 2x + \cos 3x), \quad u_3 = 2(\cos 4x + \cos 6x),$$

et que l'on forme en cherchant

$$u_1 + u_2 + u_3, \quad u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1, \quad u_1u_2u_3.$$

Comme on a aussi

$$\cos x \cos 5x = \tfrac{1}{4} u_3, \quad \cos 2x \cos 3x = \tfrac{1}{4} u_1, \quad \cos 4x \cos 6x = \tfrac{1}{4} u_2,$$

la détermination de cos x et cos $5x$, cos $2x$ et cos $3x$, cos $4x$ et cos $6x$ dépen
de l'équation (3) et de trois équations du second degré.

×Question 577.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 170.)

On prolonge les hauteurs AA', BB', CC', DD' ***d'un tétraèdre, à partir des sommets, de quantités*** AA'', BB'', CC'', DD'' ***inversement proportionnelles à ces hauteurs. Démontrer que les tétraèdres*** ABCD, A''B''C''D'' ***ont même centre de gravité.*** (J. Neuberg.)

Solution par M. Emmerich. Soient α, β, γ, δ les faces du tétraèdre ABCD. Nous pouvons poser

$$AA'' = \lambda\alpha, \quad BB'' = \lambda\beta, \quad CC'' = \lambda\gamma, \quad DD'' = \lambda\delta,$$

λ étant un facteur de proportionnalité. Les distances de A'', B'', C'', D'' au plan BCD seront, respectivement,

$$AA' + \lambda\alpha, \quad -\lambda\beta\cos(\beta, \alpha), \quad -\lambda\gamma\cos(\gamma, \alpha), \quad -\lambda\delta\cos(\delta, \alpha).$$

Or

$$\alpha = \beta\cos(\beta, \alpha) + \gamma\cos(\gamma, \alpha) + \delta\cos(\delta, \alpha);$$

donc la distance du centre de gravité de A''B''C''D'' au plan BCD est égale à $\frac{1}{4}$ AA', et les centres de gravité des deux tétraèdres étant à la même distance d'une face quelconque de ABCD coïncident.

Lorsqu'un point A d'un système de n points ABCD... se déplace de la quantité AA'', le centre des moyennes distances G se déplace de la quantité GG_A; GG_A est parallèle à AA'' et égale à $\frac{1}{n}$ AA''. Faisant arriver, dans la question 577 A, B, C, D en A'', B'', C'', D'', on voit que les déplacements successifs du centre de gravité ont lieu suivant des droites GG_A, G_AG_B, G_BG_C, G_CG_D perpendiculaires et proportionnelles aux faces d'un tétraèdre ABCD. Le polygone $GG_AG_BG_CG_D$ se ferme de lui-même.... (J. N.)

Question 585.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 207.)

Résoudre l'équation

$$a^4 + b^4 + c^4 + x^4 = (bc + ax)^2 + (ca + bx)^2 + (ab + cx)^2 + \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + x^2)^2. \qquad \text{(E. Catalan.)}$$

Solution par MM. Beyens (*Cadix*) Déprez *et* Heyne. L'équation proposée peut prendre la forme

$$x^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)x^2 - 8abcx + Sa^4 - 2Sa^2b^2 = 0. \qquad (1)$$

Le dernier terme(*) est égal à

$$(a + b + c)(a - b - c)(b - a - c)(c - a - b);$$

donc si l'équation (1) admet des racines rationnelles, celles-ci sont nécessairement

$$\pm(a + b + c), \quad \pm(a - b - c), \quad \pm(b - a - c), \quad \pm(c - a - b).$$

Comme les trois dernières expressions se déduisent de $\pm(a + b + c)$ par le changement de signe de deux des lettres a, b, c, et que le même changement n'altère pas l'équation (1), il suffit de faire la vérification pour $\pm(c + b + a)$. On trouve que $a + b + c$ est racine; donc les quatre racines sont

$$a + b + c, \quad a - b - c, \quad b - a - c, \quad c - a - b.$$

Pour résoudre l'équation $x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$, on forme une équation auxiliaire susceptible de s'identifier avec l'équation proposée et admettant une racine connue. A cet effet, on pose $x = a + b + c$, où a, b, c sont trois indéterminées; de là : $x^2 = Sa^2 + 2Sab$, $(x^2 - Sa^2)^2 = 4S^2ab$, $x^4 - 2x^2Sa^2 + Sa^4 + 2Sa^2b^2 = 4Sa^2b^2 + 8Sa^2bc = 4Sa^2b^2 + 8abcx$, ou enfin l'équation (1), etc. C'est là la méthode due à Euler. On voit que l'équation auxiliaire est identique à celle proposée par M. Catalan. (D'après les solutions de MM. Rochetti et Emmerich).

(*) L'expression $Sa^4 - 2Sa^2b^2$ représente, comme on l'a vu dans plusieurs articles de *Mathesis*, (par exemple, III, 136 et IV, *Suppl.*) 16 fois le carré de la surface du triangle ayant a, b, c pour côtés. On a donc, identiquement

$$Sa^4 - 2Sa^2b^2 = 16p(p - a)(p - b)(p - c),$$

avec $a + b + c = 2p$. (H. Brocard.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

351. Résoudre le système

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} &= (n-2)\,x_n + n - 1,\\
x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} &= (n-2)\,x_1 - x_n\\
x_1 + x_3 + \ldots + x_{n-1} &= (n-2)\,x_2 - x_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} &= (n-x)\,x_{n-1} - x_n
\end{aligned}$$

(BARBARIN.

Réponse : $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 2n-3, \quad x_n = 2n-2.$

352. Prouver que

$$\frac{1}{1.3.5} + \frac{2}{3.5.7} + \frac{3}{5.7.9} + \cdots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

(UN ABONNÉ.

On vérifie la formule pour le cas d'une seule fraction dans le premier membre, e l'on *passe ensuite de n à n + 1*. On peut aussi poser

$$\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} + \frac{C}{2n+3},$$

et déterminer A, B, C de manière que la décomposition ait lieu pour toutes le valeurs de n. Remplaçant chaque terme de la somme par trois fractions et obser vant que $A + B + C = 0$, on trouve le résultat indiqué.

353. Sommer la suite

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \cdots + \frac{2x^k}{x^{2k}-1}. \qquad (k = 2^n).$$

Réponse. En décomposant chaque terme d'après la formule

$$\frac{2x^k}{x^{2k}-1} = \frac{x^k+1}{x^k-1} - \frac{x^{2k}+1}{x^{2k}-1},$$

on trouve

$$S_n = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^{2k}+1}{x^{2k}-1},$$

et, pour $n = \infty$, suivant que $x^2 > 1$ ou < 1,

$$\lim S_n = \frac{2}{x-1} \quad \text{ou} \quad \frac{2x}{x-1}. \qquad \text{(FR. FALISSE.)}$$

QUESTIONS PROPOSÉES (*).

2. Démontrer et généraliser le théorème suivant : Les produits

$$\alpha\alpha,\ \alpha\beta,\ \alpha\gamma,\ \beta\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\gamma$$

des racines α, β, γ, prises deux à deux, de l'équation

$$a + bz + cz^2 + dz^3 = 0,$$

sont les racines de l'équation en u :

$$\begin{vmatrix} u^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & u^2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d & 0 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Débarrasser cette équation des racines α^2, β^2, γ^2 (T. I, p. 12-13).

(FARKAS.)

17. Si A, B, C sont des quantités positives, a, b, c des quantités réelles les trois racines de l'équation

$$(x-a)(x-b)(x-c) - A(x-a) - B(x-b) - C(x-c) = 0$$

sont réelles. Calculer le discriminant de cette équation et le mettre sous une forme telle qu'on reconnaisse qu'il est toujours négatif (T. I, p. 30).

***601.** Soient ABC, A'B'C' deux triangles dans un même plan ; A_1, B_1, C_1 les milieux des droites AA', BB', CC'; AP, AQ deux droites respectivement parallèles à A'B', A'C', et dirigées dans le même sens (ou équipollentes à A'B', A'C'). On propose de démontrer 1° que le centre de gravité du triangle $A_1B_1C_1$ est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux triangles donnés (Démonstration géomé-

(*) Les tomes I, II, III, IV de *Mathesis* étant à peu près épuisés, nous réimprimerons ici, pour nos nouveaux abonnés, les questions proposées de 1881 à 1884 qui n'ont pas été résolues jusqu'à présent.

trique)(*); 2° que l'aire du triangle $A_1B_1C_1$ est équivalente au quart de la somme des aires des triangles ABC, A'B'C', ABQ, APC(**).

(LAISANT.)

×**602.** Si l'on donne les équations

$$\frac{ax'+by'}{x-x'}=\frac{bx'+cy'}{y-y'}=z',$$

$$X=b(x-x')^2-(a-c)(x-x')(y-y')-b(y-y')^2$$

$$Z=(a+z')(c+z')-b^2,$$

dans lesquelles les inconnues sont x', y' z', X, Z; le produit XZ est indépendant de x', y', z'. (E. CATALAN.)

603. On considère les paraboles qui ont même corde normale NN' (N et N' sont des points fixes). Démontrer 1° que l'axe enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements; 2° que la directrice enveloppe une parabole. (V. JERÁBEK.)

APPLICATIONS DE LA QUASI-INVERSION LINÉAIRE AUX COURBES OSCULATRICES;

par M. CL. SERVAIS, répétiteur à l'Université de Gand.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 110-114, 129-134, 187-190.)

Nous avons vu (*Mathesis*, t. VII, p. 190) (***) que la quasi-inversion linéaire, à une transformation linéaire près, se ramène à la transformation suivante : ***Étant donnés une conique*** S ***et un point fixe*** A ***sur cette conique, deux points correspondants sont en ligne droite avec le point*** A ***et sont conjugués par rapport à*** S.

(*) Une démonstration de ce théorème par la mécanique a été donnée par M. NEUBERG dans la N. C. M, t. VI, p. 473.

(**) Nous engageons les lecteurs de *Mathesis* à généraliser la question en considérant les points qui divisent les droites AA', BB', CC' dans un rapport donné $m:n$. (J. N.)

(***) *Rectification*. T. VII, p. 188, n° 4, ligne 5, supprimer *demi* devant *hyperbole*. M. Neuberg nous a fait remarquer que le procédé donne l'hyperbole entière. Il en résulte qu'il faut remplacer dans les n^os 5 et 6, le mot *branche* par le mot *courbe*, et supprimer p. 189, ligne 3, *demi* devant *hyperbole*. N° 5, ligne 3, les mots *parallèles aux* sont oubliés devant asymptotes. (C. S.)

1. Prenons pour S un cercle ω et désignons par S' le cercle décrit sur ωA comme diamètre. Ce cercle S' correspond à la droite à l'infini du plan. La transformée d'une droite (D) est une conique (D') passant par A. Ce sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que la droite (D) rencontre le cercle S' en deux points imaginaires, réels, ou coïncidents.

2. Théorème I. *Le cercle* S' *est le cercle osculateur de la conique* (D') *au point* A *et la corde de courbure est parallèle à la droite* (D). En effet, ce cercle est tangent à la conique au point A; la droite (D) n'ayant qu'un point à l'infini, sa transformée (D') n'aura avec le cercle S' qu'un seul point commun autre que A. Donc le cercle S' est osculateur à la conique au point A et la corde de courbure AK est parallèle à (D). Il résulte de ce qui précède le théorème suivant :

Théorème II. *En un point* A *d'une conique on décrit un cercle tangent dont le rayon est égal au diamètre du cercle osculateur en ce point, et l'on mène différentes sécantes rencontrant la conique et le cercle en des points* B *et* C. *Le lieu du point* D *tel que*

$$(ABCD) = -1$$

est une droite parallèle à la corde de courbure.

Considérons deux sécantes ABCD, A'B'C'D'; on a

$$(ABCD) = (AB'C'D') = -1.$$

Le point A étant commun aux deux groupes de points, les droites BB', CC', DD', sont concourantes. A la limite, on voit que les tangentes aux points B et C à la conique et au cercle se coupent sur la droite (D).

3. Théorème III. *Les points d'intersection* H *et* H' *de la tangente au point* A *d'une conique avec la droite* (D) *et la tangente à la conique au point* N, *où elle est rencontrée par la normale en* A, *sont symétriques par rapport au point* A.

Menons la tangente au point n diamétralement opposé au point A sur le cercle ω, et soit R son point d'intersection avec la droite (D); RN sera la tangente à la conique au point N; appelons N' le correspondant de N. On a

$$R(An NN') = -1;$$

mais AH est parallèle à Rn, donc

$$AH = AH'.$$

De ce théorème découlent les deux propriétés suivantes : *La tangente*

en un point A *de l'hyperbole rencontre en deux points symétriques par rapport à* A, *la tangente à la conique au point* N, *et la corde interceptée dans le cercle de courbure par des parallèles menées par le point* A *aux asymptotes.*

La tangente en un point A *de la parabole rencontre en deux points symétriques par rapport à* A, *la tangente à la conique au point* N *et la tangente menée au cercle de courbure par le point où il est coupé par une parallèle, menée du point* A *à l'axe de la parabole.*

Ces propriétés donnent la construction du cercle de courbure en un point de l'hyperbole ou de la parabole. Pour l'hyperbole, on décrit un cercle tangent à la courbe au point A, et par le point H on mène une parallèle à la corde interceptée dans ce cercle par des parallèles menées du point A aux asymptotes. Cette droite rencontre les parallèles aux asymptotes en deux points appartenant au cercle de courbure.

Dans le cas de l'hyperbole équilatère, la droite transformée passe par le centre de courbure; donc les points à l'infini de la courbe, l'extrémité de la corde de courbure, le second point d'intersection N de la normale forment un groupe harmonique; donc ces deux derniers points sont en ligne droite avec le centre. Ou bien : *En un point de l'hyperbole équilatère, la droite qui joint l'extrémité de la corde de courbure au second point d'intersection de la normale avec la courbe, est un diamètre.*

Si l'on considère toutes les hyperboles équilatères ayant au point A même cercle de courbure, le lieu des centres sera un cercle homothétique au cercle de courbure, le centre d'homothétie étant le point N et le rapport $\frac{1}{2}$. Il résulte de là le théorème suivant : *La normale polaire en un point de l'hyperbole équilatère est égale en valeur absolue au rayon de courbure, le pôle étant le centre de la courbe.*

4. Théorème IV. *En un point d'une conique, la tangente et la corde de courbure sont également inclinées sur les axes*(*).

La conique est la transformée de la droite (D); soient M et N les points d'intersection de cette droite avec le cercle S'. Les droites AM et AN seront parallèles aux asymptotes de la conique, et la bissectrice de l'angle MAN sera parallèle à l'un des axes(**). La tangente au point d'intersec-

(*) Voir Salmon, *Sections coniques*, p. 386.

(**) Si les points M et N sont imaginaires, le point milieu de l'arc MN est réel. C'est le point d'intersection du cercle avec le rayon perpendiculaire à la droite.

tion du cercle S' avec cette bissectrice est parallèle à la droite, donc parallèle à la corde de courbure.

5. Problème I. *Construire une conique, dont on donne trois points* A, B, C, *et le cercle osculateur au point* A(*).

Au point A on fait passer un cercle ω tangent au cercle osculateur et de rayon double. Sur les droites AB et AC, on détermine les deux points B_1 et C_1 conjugués respectifs de B et C, par rapport au cercle ω. La droite B_1C_1 est la transformée (D) de la conique. Donc le point de la conique, situé sur une droite issue du point A, est le conjugué par rapport au cercle ω du point de rencontre de cette droite avec la droite B_1C_1.

Déterminons maintenant le point de la conique, situé sur une droite partant du point B.

Appelons H le point de rencontre de la sécante avec la droite B_1C_1, β le point de rencontre de AB avec le cercle ω. La droite Hβ rencontre de nouveau le cercle en un point δ. La droite Aδ rencontre la sécante au point D, qui est le point cherché. On peut très facilement mener la tangente à la conique au point D. Elle rencontre la tangente au cercle au point δ sur la droite B_1C_1. Montrons maintenant comment on peut construire les axes. Au point A, on mène les bissectrices des angles que la tangente en A fait avec la corde de courbure. Soient P et Q les points de la courbe situés sur ces bissectrices. Les axes sont les perpendiculaires élevées aux milieux de AP et AQ.

Problème II. *Construire la conique dont on donne deux points* A *et* B, *le cercle osculateur au point* A *et la tangente au point* B.

On construit le point B_1 comme dans le problème précédent.

On mène la tangente au cercle ω au point β. Cette tangente rencontre la tangente donnée au point H; HB_1 est la droite B_1C_1 etc...

Problème III. *Construire le cercle osculateur en un point* A *d'une conique déterminée par cinq points.*

On détermine la direction des asymptotes. Par le point A on fait passer un cercle quelconque tangent à la conique en ce point, et une parallèle à l'un des axes dont les directions sont données par les bissectrices des angles des asymptotes. Au point de rencontre de cette parallèle avec le cercle, on mène la tangente qui est parallèle à la corde de

(*) Cremona-Dewulf, *Géométrie projective*, p. 178.

courbure. Par le point A on tire la corde d'osculation dont on détermine la seconde extrémité.

Pour l'ellipse, il faut déterminer directement la direction des axes, car les asymptotes sont imaginaires.

6. Théorème V. *Toutes les hyperboles équilatères qui ont au point* A *même cercle de courbure passent par un autre point fixe.*

En effet, soit une hyperbole équilatère ayant au point A le cercle de courbure S'. Sa transformée (D) sera une droite passant par le centre du cercle S'; donc cette hyperbole doit passer par le point fixe Y correspondant au centre du cercle S'. Remarquons que AY = Aω = le double du rayon du cercle osculateur au point A. Donc :

Théorème VI. *Si l'on mène la normale en un point* A *d'une hyperbole équilatère, elle rencontre de nouveau la courbe en un point* Y, *tel que la distance* AY *est égale au diamètre du cercle osculateur au point* A (*Mathesis*, 1886, VI, pp. 12-13).

Théorème VII. *Toutes les coniques semblables à une conique donnée et ayant même cercle de courbure au point* A, *sont tangentes à une courbe du quatrième ordre.*

En effet, la transformée (D) d'une de ces coniques rencontre le cercle S' en deux points M, N réels ou imaginaires : les droites AM, AN sont parallèles aux asymptotes, et l'angle MAN est constant, vu que les coniques sont semblables. Donc l'enveloppe de MN est un cercle concentrique à S', et sa transformée est une quartique circulaire ayant la droite de l'infini pour tangente double.

7. Problème IV. *Construire la conique ayant au point* A *le cercle de courbure* S' *et dont la tangente en un autre point* B *soit parallèle à la corde de courbure au point* A.

Toutes les coniques passant par les points A et B et ayant au point A même cercle osculateur, ont pour transformées des droites passant par le point B_1.

Soit β le point de rencontre de la droite AB avec le cercle ω. La tangente au point B à une de ces coniques, coupe la droite transformée en un point T, situé sur la tangente au point β au cercle ω. Si la tangente au point B est parallèle à la corde de courbure, ce point T est situé à l'infini. Donc la tangente au cercle ω au point β donne la direction de la corde de courbure. Il n'y a donc qu'une conique satisfaisant à la question et nous voyons comment on peut la construire.

On déduit de ce qui précède la proposition suivante :

Théorème VIII. *Si l'on a un faisceau de coniques passant par deux points* A *et* B, *et ayant au point* A *même cercle de courbure, les tangentes au point* B *à ces coniques, rencontrent les cordes de courbure correspondantes en des points situés sur une parabole passant par les points* A *et* B.

La direction de l'axe de cette parabole est celle de la tangente au cercle ω au point β.

8. *La transformée d'un cercle tangent au point* A *au cercle* ω *est un autre cercle tangent à ce cercle* ω *au point* A.

Appelons α et β les points de rencontre de la droite $A\omega$ avec le cercle ω et le cercle donné, B_1 le conjugué du point B.

Sur AB_1 comme diamètre décrivons un cercle (AB_1) et par le point A menons une sécante rencontrant les trois cercles aux points B', α', B'_1 ; nous aurons :

$$(AB'\alpha'B'_1) = (AB\alpha B_1) = -1;$$

donc, etc.

Nous déduisons de là le théorème suivant (*) :

Théorème IX. *Si l'on mène un cercle tangent en un point d'une conique, la corde d'intersection est parallèle à la corde de courbure en ce point.* En effet, les points d'intersection M et N de la conique avec le cercle (BA), sont les correspondants des points d'intersection de la transformée de la conique avec le cercle (B_1A); donc MN est parallèle à la transformée, et par conséquent parallèle à la corde de courbure.

9. Problème V. *Combien y a-t-il de coniques osculatrices au point* A *au cercle* S' *et ayant un contact du second ordre avec une courbe donnée.*

L'une de ces coniques et la courbe donnée ayant un contact du second ordre, leurs transformées jouissent de la même propriété. La transformée de la conique étant une droite, cette droite sera une tangente stationnaire de la transformée de la courbe. Il y aura donc autant de coniques satisfaisant à la question, que la transformée de la courbe a de points d'inflexion réels. Les points correspondants de ces points d'inflexion seront les points de contact.

Les questions 414, 415 (*Mathesis*, t.V, p. 46) sont des cas particuliers de ce problème. En voici les énoncés :

On donne deux circonférences O *et* O_1 *qui se coupent en* A *et* B. *Démon-*

(*) Cremona-Dewulf, *Géométrie projective*, p. 178.

trer qu'il n'existe qu'une conique osculatrice en A *au cercle* O_1 *et osculatrice aussi au cercle* O. *Déterminer le point d'osculation au cercle* O.

On donne deux coniques S *et* S' *et un point* A *sur* S. *Démontrer qu'il n'existe que quatre coniques osculatrices à* S *en* A *et osculatrices aussi à* S'. *Déterminer les quatre points d'osculation de* S' (*).

Dans la première question, la transformée du cercle O est une cubique crunodale dont le point double est le point A, et les tangentes en ce point double sont les tangentes aux deux cercles. Cette cubique n'a donc qu'un seul point d'inflexion réel. Donc, etc.

Dans la seconde question, la transformée est une quartique ayant le point A pour point de rebroussement; elle est de sixième classe, puisque par le point de rebroussement on peut mener deux tangentes à la courbe. Ce sont les tangentes qu'on peut mener du point A à la conique S'. Cette quartique a donc six points d'inflexion et il reste à démontrer que quatre de ces points sont réels.

On démontre aussi facilement le théorème suivant :

On donne deux cercles O *et* O_1 *qui se coupent en* A *et* B; *il n'existe que quatre coniques osculatrices au cercle* O *au point* A_1, *tangentes au cercle* O_1, *et passant par un point* C. La transformée du cercle O_1 étant une cubique nodale, on peut, du point C, lui mener quatre tangentes.

10. *Propriété de la strophoïde droite.* O et O' étant le sommet et le point double d'une strophoïde droite, sur OO' comme diamètre on décrit une circonférence. Soient M et M' deux points de la courbe en ligne droite avec le sommet; au point M on mène la tangente à la strophoïde. Cette droite coupe le cercle en deux points A et B; soit C le point milieu de la corde menée parallèlement à la droite AB par le point O.

1° *La conique définie par les cinq points* A, B, C, O, M', *est tangente au point* M' *à la strophoïde.*

2° *Cette conique est toujours une ellipse.*

3° *Le cercle de courbure au point* O *de cette conique est le cercle décrit sur* Oω *comme diamètre, le point* ω *étant le milieu de* OO'.

4° *Les tangentes en* M *et* M' *à la strophoïde et au point correspondant du cercle* OO' *passent par un même point.*

Il suffit de remarquer que la strophoïde est sa propre transformée,

---

(*) Nous publierons prochainement les solutions de M. Dewulf (*Réd.*)

lorsque le cercle OO′ et le point O sont le cercle et le pôle de la transformation.

Du 4° on peut déduire facilement que le lieu du point de rencontre des tangentes aux points M et M′, est une cissoïde.

Autres applications.

1. Dans la transformation du n° 3 du paragraphe précédent, à la droite de l'infini correspond le cercle décrit sur BC comme diamètre. La conique transformée d'une droite sera donc une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que cette droite rencontrera le cercle (BC) en deux points imaginaires, réels ou coïncidents. On voit facilement que cette conique passe par les points B et C, et que BC est la normale au point B. Le quatrième point d'intersection du cercle (BC) et de la conique se trouve sur une parallèle menée du point C à la droite donnée. Cette droite est donc parallèle à la corde de courbure du point B. On déduit de là la propriété suivante : *soit* B *un point d'une conique*, C *le point de rencontre de la normale au point* B *avec la conique*, M *un point quelconque de cette courbe; le lieu* (M′) *du point de rencontre* M′ *de la droite* CM, *avec la perpendiculaire élevée au point* B *sur* BM, *est une droite parallèle à la corde de courbure du point* B; *et les positions relatives de cette droite et du cercle* (BC) *permettent de distinguer la nature de la section conique.*

2. Étant donnés cinq points d'une conique, B, M, N, P, Q, on peut déterminer le point C à l'aide du théorème de Pascal, et le lieu (M′) d'après ce qu'on a vu plus haut. En menant par B une parallèle à cette droite on a la corde de courbure en ce point, et le théorème cité donne le point de courbure. Nous avons donc ainsi une construction très simple du cercle de courbure en un point d'une conique définie par cinq points. Si E et F sont les points de rencontre du lieu (M′) et du cercle (BC), CE et CF sont parallèles aux asymptotes de la courbe.

3. *La transformée d'une courbe circulaire est une courbe circulaire.* En effet, les points des deux droites BI et BJ sont à eux mêmes leurs correspondants. Si BI et BJ sont deux tangentes à l'une des courbes, le point B sera un foyer commun aux deux courbes.

4. *La strophoïde droite est circulaire et son sommet est un foyer.* En effet, soit B le sommet, C le point double, la strophoïde est la transformée du cercle décrit du point B comme centre avec BC pour rayon.

DÉVELOPPANTES DU POINT;

par M. Cesàro, élève-ingénieur, étudiant à Rome(*).

1. Nous avons parlé, précédemment(**), de la représentation des lignes planes, moyennant leur *équation intrinsèque*. On appelle ainsi la relation existant, en chaque point d'une courbe, entre le *rayon de courbure* ρ et l'*arc* s, compté à partir d'une origine arbitraire. Nous allons d'abord montrer comment on cherche l'équation cartésienne d'une courbe, connaissant son équation intrinsèque. Soit, à cet effet, θ l'angle que la tangente à la courbe fait avec l'axe des x, arbitrairement choisi. On sait que $ds = \rho d\theta$. On connaîtra donc par intégration, en tenant compte de l'équation intrinsèque donnée, la valeur de θ en fonction de ρ ou de s. Conséquemment, on pourra calculer ρ en fonction de θ. La substitution du résultat dans les égalités

$$dx = \rho \cos\theta d\theta, \quad dy = \rho \sin\theta d\theta, \tag{1}$$

puis l'intégration de ces égalités, nous feront connaître x et y en fonction de θ. Il suffira alors d'éliminer θ, pour avoir l'équation en x et y.

2. Appliquons ce procédé à l'équation

$$\rho = a + \frac{s^2}{a}.$$

On a, successivement,

$$\theta = \int \frac{ds}{\rho} = \int \frac{ads}{a^2 + s^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{a},$$

$$s = a \operatorname{tg}\theta, \quad \rho = \frac{a}{\cos^2\theta}.$$

Par suite, les égalités (1) deviennent

$$dx = \frac{ad\theta}{\cos\theta}, \quad dy = \frac{a \sin\theta . d\theta}{\cos^2\theta},$$

d'où l'on tire, en disposant convenablement des constantes,

$$x = a \log \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}, \quad y = \frac{a}{\cos\theta}.$$

(*) L'auteur *était* étudiant à Rome, quand nous avons reçu l'article. (P. M.)

(**) *Mathesis*, IV, 1884, p. 233.

L'élimination de θ donne

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

L'équation considérée caractérise donc une ***chaînette***.

3. L'expression de ρ en fonction de θ est importante pour la recherche des développées successives des courbes. On sait, en effet, que la $n^{ième}$ dérivée de ρ, par rapport à θ, ne diffère pas du rayon ρ_n de courbure de la $n^{ième}$ développée. Cela étant, supposons qu'en un point de la courbe les centres de courbure successifs tendent vers une position limite Q, à distance finie ou infinie. Pour cela, il faut et il suffit que les séries

$$A = \rho_1 - \rho_3 + \rho_5 - \cdots, \quad B = \rho - \rho_2 + \rho_4 - \cdots \tag{2}$$

soient ***déterminées***. On remarquera, en effet, que A et B sont les coordonnées de Q par rapport à la tangente et à la normale à la courbe, au point considéré. Or, dans l'hypothèse de la ***convergence***, les formules (1) donnent, en les intégrant par parties plusieurs fois de suite,

$$x = A\cos\theta + B\sin\theta, \quad y = A\sin\theta - B\cos\theta. \tag{3}$$

Il n'y a pas de constantes à ajouter, si l'on choisit convenablement l'origine. D'après les formules (3), cette origine est précisément le point Q. Celui-ci occupe donc une position invariable, relativement à la courbe. Il en résulte que la courbe peut-être considérée comme une développante, d'ordre infini, du point Q. Lorsque les séries (2) sont ***indéterminées***, on ne peut pas affirmer cela, et, d'ailleurs, les formules (3) ne subsistent plus. On voit donc que les lignes planes se rangent en deux classes, suivant qu'elles sont ou ne sont pas des développantes, d'ordre infini, de courbes infiniment petites.

4. Les ***spirales logarithmiques*** offrent des exemples de ces deux classes de courbes. Soit, en effet, $\rho = ms$, d'où l'on déduit, par le procédé indiqué plus haut, $\rho = ae^{m\theta}$. Si $m < 1$,

$$A = \frac{ma}{1+m^2}e^{m\theta} = s - \frac{s}{1+m^2}, \quad B = \frac{a}{1+m^2}e^{m\theta} = \frac{\rho}{1+m^2},$$

et le point Q n'est autre que le *pôle* de la spirale. Si $m \geq 1$, les centres de courbure ne tendent pas vers une position déterminée; car ils s'éloignent de l'origine suivant quatre directions différentes, pour chaque

point. En particulier, pour $m = 1$, on voit sans peine que le point Q, relatif à un point donné de la courbe, occupe successivement les sommets d'un carré.

5. Considérons encore les courbes cycloïdales. Leur équation générale est $a^2\rho^2 + b^2s^2 = a^2b^2$. On en déduit

$$\rho = b\cos\frac{b\theta}{a}.$$

Si $a > b$, on a

$$A = -\frac{ab^2}{a^2 - b^2}\sin\frac{b\theta}{a}, \quad B = \frac{a^2b}{a^2 - b^2}\cos\frac{b\theta}{a}.$$

Conséquemment, les *épicycloïdes* peuvent être considérées comme étant des développantes, d'ordre infini, du centre du cercle directeur. Il n'en est pas de même des *hypocycloïdes*; car, pour $a < b$, les séries (2) sont *divergentes*, et le point Q s'éloigne à l'infini.

6. Comme dernier exemple, considérons une ligne telle qu'en la faisant rouler sur l'axe transverse d'une hyperbole, le centre de courbure, correspondant au point de contact, se trouve constamment sur l'hyperbole. L'équation intrinsèque d'une telle courbe est $\rho^2 - m^2s^2 = a^2$. On a

$$0 = \int\frac{ds}{\rho} = \frac{1}{m}\int\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} = \frac{1}{m}\log\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - a^2}}{a},$$

d'où

$$\rho = \frac{a}{2}(e^{m\theta} + e^{-m\theta}).$$

Conséquemment,

$$A = -\frac{ma}{2(1+m^2)}(e^{m\theta} - e^{-m\theta}), \quad B = \frac{a}{2(1+m^2)}(e^{m\theta} + e^{-m\theta}),$$

pourvu que $m < 1$. C'est seulement dans ce cas que les courbes considérées admettent un point pour développée dernière. Lorsque $m \geq 1$, cela n'a pas lieu, parce que les séries qui donnent A et B deviennent *indéterminées*.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE.

1. Soient AA', BB', CC' les bissectrices intérieures d'un triangle ABC, et α, β, γ les points où ces droites rencontrent respectivement les droites B'C', C'A', A'B'. Démontrer que AA' est également la bissectrice de l'angle $\beta A \gamma$. (HOEKSTRA, *Wiskundige Opgaven*, deel II, n° 200.)

En considérant les quadrilatères BA'IC', CA'IB', on voit que les angles égaux BAA', CAA' sont divisés harmoniquement, le premier par $A\beta$ et AC, le second par $A\gamma$ et AB. Les deux faisceaux harmoniques ainsi formés sont symétriques par rapport à AA', etc.

2. Soit D le point de contact du cercle inscrit au triangle ABC avec le côté BC. Construire le triangle ABC, connaissant les rayons des cercles inscrits aux trois triangles ABC, ABD, ACD.

(TESCH, *Wiskundige Opgaven*, deel II, p. 344.)

On démontre facilement que les cercles inscrits aux triangles ABD, ACD se touchent sur la droite AD.

3. Soient M, N, P, Q les milieux des côtés AB, BC, CD, DA du quadrilatère ABCD, et soit K un point intérieur quelconque. Démontrer que les droites KM, KN, KP, KQ partagent le quadrilatère ABCD en quatre parties, qui peuvent être assemblées dans un autre ordre de manière a former un nouveau quadrilatère. (MANTEL.)

Par un même point K', mener quatre droites K'M', K'N', K'P', K'Q' égales et parallèles à AM, CN, CP, AQ, et par M', N', P', Q' tirer des parallèles à KM, KN, KP, KQ; ces dernières parallèles forment ainsi un quadrilatère A'B'C'D', dont les parties K'M'B'N', ... sont égales à BMKN, . , et dont les diagonales sont égales et parallèles à celles de ABCD.

4. Construire un quadrilatère inscriptible ABCD, connaissant les distances du centre K du cercle circonscrit, aux milieux des quatre côtés. (MANTEL.)

On sait construire le quadrilatère A'B'C'D' du théorème précédent.

5. Soient AA', BB', CC' les hauteurs du triangle ABC, H leur point de concours, G le centre de gravité. Démontrer que les cercles AA'G, BB'G, CC'G se coupent en un même point G' de l'axe d'homologie δ des triangles ABC, A'B'C'. (*Ed. Times.*)

A cause de $AH.HA' = BH.HB' = CH.HC'$, la droite GH est un axe radical commun aux cercles AA'G, . .

6. On prend sur les côtés AB, AC du triangle ABC les longueurs $AD = AE = \sqrt{bc}$, et l'on mène la droite DE, qui coupe BC en un point A_1. Soient B_1, C_1 les points analogues sur CA, AB. Démontrer que les droites AA_1, BB_1, CC_1 concourent en un même point, et partagent les côtés du triangle ABC dans le rapport des racines carrées des côtés adjacents. (BOUTIN, J. M. E., 1887.)

7. Soient S_a l'aire du triangle, dont deux côtés sont égaux aux bissectrices de l'angle BAC du triangle ABC et de son adjacent supplémentaire, l'angle compris entre ces côtés étant égal à BAC. Soient S_b, S_c les aires des deux autres triangles analogues. Démontrer que, si $a < b < c$, on a

$$\frac{1}{S_a} + \frac{1}{S_c} = \frac{1}{S_b}. \qquad \text{(I. BEYENS.)}$$

8. Dans un triangle rectangle, le centre du carré extérieur (intérieur) de l'hypoténuse est sur la ligne des centres des deux autres carrés intérieurs (extérieurs). Ces deux lignes des centres passent par le sommet de l'angle droit et sont perpendiculaires entre elles(*). (H. B.)

9. On donne une circonférence O et un rayon OA. Mener une tangente BM rencontrant la droite OA en un point C tel que AC = AB.

Évaluer l'angle $BAO = 2BCA = 2(90° - BOA)$.

ESSAI D'UNE NOUVELLE THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES LOGARITHMES;

d'après M. JAMET, docteur ès-sciences mathématiques, professeur au Lycée de Nantes.

L'un de nos plus zélés collaborateurs, M. Jamet, vient de publier sous ce titre une brochure de quelques pages (Paris, Nony, 1888), contenant un exposé relativement simple d'une nouvelle théorie des logarithmes(**). En voici un résumé.

(*) Comparer Nouvelles Annales, 1887, p. 99, question 41 (H. VAN AUBEL).

(**) Il est à peine nécessaire d'observer que cette théorie est un pur exercice d'algèbre élémentaire et qu'on ne peut songer à la substituer aux théories anciennes.

1. Lemme. Si x est une quantité positive inférieure à 2, on a, pour n entier positif,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < 1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$$

$$< 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}+\cdots+\frac{x^n}{2^{n-1}} < 1+\frac{x}{1-\frac{1}{2}x} = \frac{2+x}{2-x}$$

2. Théorème fondamental. *Si a désigne un nombre donné, l'expression $y = n(\sqrt[n]{a}-1)$, où l'on a fait pour abréger $n = 2^p$, tend vers une limite positive, quand n croît indéfiniment, si a est plus grand que l'unité; vers une limite négative, si a est plus petit que l'unité; y est nulle, si $a = 1$.*

Premier cas. Supposons d'abord $a > 1$. L'expression y est positive et va en décroissant à mesure que p et n vont en croissant, car

$$n(\sqrt[n]{a}-1) - 2n(\sqrt[2n]{a}-1) = n(\sqrt[n]{a} - 2\sqrt[2n]{a}+1) = n(\sqrt[2n]{a}-1)^2,$$

quantité positive; donc elle a une limite α nulle ou positive. Je dis que cette limite n'est pas nulle, c'est-à-dire que l'on peut trouver une quantité positive x telle que l'on ait, pour toute valeur de n,

$$n(\sqrt[n]{a}-1) > x, \quad \text{ou} \quad a > \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

En vertu du lemme, cette condition sera réalisée, si l'on a $x < 2$ et

$$a > \frac{2+x}{2-x} \quad \text{ou} \quad x < 2\frac{a-1}{a+1},$$

ce qui est toujours possible.

Corollaire I. *Pour n croissant indéfiniment* $\lim \sqrt[n]{a} = 1$. En effet, si a est > 1,

$$\lim \sqrt[n]{a} = \lim\left[1+\frac{1}{n}\cdot n(\sqrt[n]{a}-1)\right] = 1+0.\alpha = 1.$$

Si a est inférieur à 1 et égal à $(1 : a')$, on a, puisque a' surpasse l'unité,

$$\lim \sqrt[n]{a} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{a'}} = \frac{1}{1} = 1.$$

COROLLAIRE II. *Si a est supérieur à l'unité*

$$\lim n(\sqrt[n]{a}-1) < a-1.$$

En effet, soit $a = 1+x$; on a

$$\lim n(\sqrt[n]{a}-1) < n(\sqrt[n]{a}-1), \quad \text{ou} \quad \lim n(\sqrt[n]{1+x}-1) < n(\sqrt[n]{1+x}-1).$$

Il suffit donc de prouver la relation

$$n(\sqrt[n]{1+x}-1) < x \text{ ou } 1+x < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\frac{n-1}{2}x^2+\text{etc.};$$

or, cette dernière est évidente.

Second cas. Supposons ensuite $a < 1$ et posons $a = (1 : a')$ et soit

$$\lim n(\sqrt[n]{a'}-1) = \alpha'.$$

Nous trouverons, par des calculs faciles,

$$\lim n(\sqrt[n]{a}-1) = -\lim \frac{n(\sqrt[n]{a'}-1)}{\sqrt[n]{a'}} = -\frac{\alpha'}{1} = -\alpha'.$$

III. Si $a = 1$, évidemment $n(\sqrt[n]{a}-1)$ est toujours nul.

8. DÉFINITION. *La limite α de $n(\sqrt[n]{a}-1)$, pour $n = 2^r$ croissant indéfiniment est le* LOGARITHME NÉPÉRIEN *de a.* Nous le désignerons par $\log a$.

D'après le n° précédent, $\log 1 = 0$; si $aa' = 1$, $\log a + \log a' = 0$; si a est supérieur à 1, $\log a < a - 1$.

4. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE. *Le logarithme du produit ab de deux facteurs a, b, est égal à la somme des logarithmes des facteurs.* Soient $\sqrt[n]{a} = 1+x$, $\sqrt[n]{b} = 1+y$, on aura, d'après le théorème fondamental et le corollaire I,

$$\lim x = 0, \quad \lim nx = \log a, \quad \lim y = 0, \quad \lim ny = \log b.$$

Ensuite

$$\log ab = \lim n(\sqrt[n]{ab}-1) = \lim n[(1+x)(1+y)-1]$$
$$= \lim nx + \lim ny + \lim x \lim ny = \log a + \log b.$$

REMARQUE. On déduit aisément de là les théorèmes analogues relatifs au logarithme d'un produit de plusieurs facteurs, d'un quotient, et d'une puissance.

5. THÉORÈME. *Si t croît par degrés suffisamment petits, log t croît par degrés aussi petits qu'on le veut; pour t suffisamment grand, log t est*

aussi grand qu'on le veut; pour t suffisamment petit, log t est négatif et aussi grand qu'on le veut en valeur absolue.

1° Si h est positif et $< \frac{t}{2}$, d'après le second corollaire (n° 2),

$$\log(t+h) - \log t = \log\left(1+\frac{h}{t}\right) < \frac{h}{t},$$

$$\log t - \log(t-h) = \log\left(1+\frac{h}{t-h}\right) < \frac{h}{t-h} < \frac{h}{\frac{1}{2}t},$$

quantités aussi petites qu'on le veut si h est suffisamment petit.

2° Pour que $\log t$ soit supérieur à un nombre N aussi grand que l'on veut, prenons $t > a^k$, a étant un nombre quelconque supérieur à 1, et choisissons k de manière que l'on ait $\log a^k = k \log a > N$. Alors on a aussi $\log t > \log a^k = k \log a > N$.

3° Pour que $-\log t'$ surpasse N, il suffit de faire $tt' = 1$ et de choisir t de manière que $\log t$ surpasse N. Alors $-\log t' = \log t$ surpasse N.

6. *Autres systèmes de logarithmes.* Le logarithme de t, dans le système dont le module est M, est, par définition, $M \log t$ ou $M \lim n\,(\sqrt[n]{t} - 1)$. On a donc, en désignant ce logarithme par $\mathrm{Log}\, t$,

$$\mathrm{Log}\, t = M \log t.$$

Si B est un nombre tel que $\mathrm{Log}\, B = 1$, B est la base du système de logarithme dont le module est M et l'on a

$$\mathrm{Log}\, B = 1 = M \log B, \quad \text{ou} \quad M = 1 : \log B.$$

Par exemple, si $B = 10$, $M = (1 : \log 10)$. D'ailleurs $\mathrm{Log}\, B^\alpha = \alpha \log B = \alpha$.

7. *Base du système népérien*(*). 1° On a,

$$P_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{n^2} + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1.2\cdots q}\frac{1}{n^q} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$
$$= 2 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1.2} + \cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{q-1}{n}\right)}{1.2\cdots q} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$
$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{q-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

(*) Nous remplaçons la démonstration de M. Jamet par une autre un peu plus élémentaire. (P. M.)

L'expression P_n, toujours supérieure à 2 et inférieure à 3, croît avec n parce que le nombre de ses termes va en croissant et qu'un terme de rang déterminé, celui qui a pour dénominateur $1.2...q$, par exemple, a son numérateur de plus en plus grand, quand n croît. Donc P_n a une limite finie, comprise entre 2 et 3. On la désigne par la lettre e.

2° Posons $e = (1+\alpha)^n$. Puisque e est plus grand que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, on a $\alpha > \frac{1}{n}$ ou $n\alpha > 1$. Par suite,

$$\log e = \lim n(\sqrt[n]{e} - 1) = \lim n\alpha \geqq 1.$$

D'autre part, d'après le corollaire II du n° 2,

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < n\cdot\frac{1}{n} \text{ ou } 1,$$

et, à la limite

$$\log e \leqq 1.$$

De cette relation et de la précédente, $\log e \geqq 1$, on conclut $\log e = 1$.

Donc $e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est la base des logarithmes népériens.

BIBLIOGRAPHIE.

Elementi di Aritmetica ad uso del ginnasio superiore, delle scuole normali e degli istituti tecnici, per AURELIANO FAIFOFER, professore nel Liceo Marco Foscarini. Ottava edizione riveduta. Venezia. Tipografia Emiliana, 1885. Un volume in-12 de 324 pages. Prix : fr. 2-50.

Huitième édition *simplifiée* de l'excellent manuel dont la cinquième édition a été analysée par M. l'abbé Gelin dans *Mathesis*, t. II, pp. 130-32. L'auteur a supprimé le chapitre consacré aux incommensurables

Comme le disait M. Gelin, les *Éléments* de M. Faifofer sont également remarquables au point de vue de la rigueur et de la clarté des démonstrations. Nous signalons, en particulier, au point de vue pédagogique, le paragraphe où l'auteur expose le sens exact des mots : *multiplication* et *division* par une fraction.

Rectification.

Page 25, dans la note, lisez : $-Sa^4 + 2Sa^2b^2$ au lieu de $Sa^4 - 2Sa^2b^2$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 405.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 22.)

D'un point quelconque A *de l'axe radical de deux cercles* O, O', *on mène à ceux-ci respectivement les tangentes* AB, AB'. *Trouver le lieu du centre du cercle passant par* A, B, B'. (DE ROCQUIGNY).

Solution par MM. BROCARD (*Grenoble*), DÉPREZ *et* FALISSE. Prenons pour axes la ligne des centres et l'axe radical. Soient

$$x^2+y^2-2ax+b=0, \quad x^2+y^2-2a'x+b=0,$$

les équations des deux circonférences, et φ, φ' les inclinaisons de OB, O'B' sur l'axe des x. Les équations des tangentes AB, AB' sont

$$(x-a)\cos\varphi+y\sin\varphi=\sqrt{a^2-b}, \quad (x-a')\cos\varphi'+y\sin\varphi'=\sqrt{a'^2-b};$$

donc, si λ est l'ordonnée du point A, on a

$$\lambda=\frac{\sqrt{a^2-b}+a\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{\sqrt{a'^2-b}+a'\cos\varphi'}{\sin\varphi'}. \qquad (1)$$

Les perpendiculaires aux milieux des droites AB, AB' ont pour équations

$$(x-\tfrac{1}{2}a)\sin\varphi-(y-\tfrac{1}{2}\lambda)\cos\varphi=0, \qquad (2)$$

$$(x-\tfrac{1}{2}a')\sin\varphi'-(y-\tfrac{1}{2}\lambda)\cos\varphi'=0. \qquad (3)$$

Il reste à éliminer φ, φ', λ entre les égalités (1), (2), (3). On a, d'abord :

$$\sin\varphi=\frac{y-\frac{1}{2}\lambda}{\sqrt{(x-\frac{1}{2}a)^2+(y-\frac{1}{2}\lambda)^2}}, \quad \cos\varphi=\frac{x-\frac{1}{2}a}{\sqrt{(x-\frac{1}{2}a)^2+(y-\frac{1}{2}\lambda)^2}}, \text{ etc.};$$

portant ensuite ces valeurs dans (1), on obtient

$$(\lambda^2-a^2+b)(y-\tfrac{1}{2}\lambda)^2+b(x-\tfrac{1}{2}a)^2-2a\lambda(y-\tfrac{1}{2}\lambda)(x-\tfrac{1}{2}a)=0,$$

$$(\lambda^2-a'^2+b)(y-\tfrac{1}{2}\lambda)^2+b(x-\tfrac{1}{2}a')^2-2a'\lambda(y-\tfrac{1}{2}\lambda)(x-\tfrac{1}{2}a')=0.$$

On peut remplacer ces équations du quatrième degré par deux autres du second et du troisième degré qu'on obtient en faisant la différence de ces équations ou la différence de leurs produits par $(x-\frac{1}{2}a')^2$, $(x-\frac{1}{2}a)^2$. Nous n'allons pas achever les calculs du cas général, mais nous nous bor-

---

(*) Nous avons oublié de mentionner, dans la précédente livraison de *Mathesis* de bonnes solutions de la quest. 577, dues à MM. STUYVAERT, DÉPREZ et MEUNIER.

nerons au cas où les deux cercles O, O′ sont tangents(*). Alors $b = 0$, et

$$(\lambda^2 - a^2)\left(y - \tfrac{1}{2}\lambda\right) - 2a\lambda\left(x - \tfrac{1}{2}a\right) = 0, \tag{4}$$

$$(\lambda^2 - a'^2)\left(y - \tfrac{1}{2}\lambda\right) - 2a'\lambda\left(x - \tfrac{1}{2}a'\right) = 0. \tag{5}$$

De là, par soustraction :

$$(a + a')\left(y - \tfrac{1}{2}\lambda\right) + 2\lambda\left(x - \frac{a + a'}{2}\right) = 0. \tag{6}$$

Ajoutons aussi les équations membre à membre après les avoir multipliées par $a'\left(x - \frac{1}{2}a'\right)$, $-a\left(x - \frac{1}{2}a\right)$; il vient

$$\lambda^2\left(x - \frac{a + a'}{2}\right) + aa'x = 0. \tag{7}$$

D'où, en éliminant λ entre (6) et (7) :

$$y^2 = \frac{4aa'}{(a + a')^2} \cdot \frac{x\left(x - 3\dfrac{a + a'}{4}\right)^2}{\frac{1}{2}(a + a') - x}.$$

Cette équation représente une cubique symétrique par rapport à OO′ et passant par le point de contact T des cercles donnés. Une première asymptote Δ parallèle à Ty passe au milieu de OO′. Coupons ensuite la courbe par la droite $y = cx + d$, et exprimons que deux racines de l'équation résultante en x sont infinies; nous aurons

$$c = \pm\frac{2}{a + a'}\sqrt{-aa'}, \quad d = \mp\sqrt{-aa'}, \tag{8}$$

valeurs qui correspondent à deux autres asymptotes Δ', Δ''. Distinguons maintenant deux cas.

1° Les cercles O, O′ se touchent extérieurement; a et a' sont de signes contraires. Les formules (8) caractérisent les perpendiculaires élevées au milieu sur les tangentes communes extérieures. Pour fixer les idées, supposons $a > 0$, $a' < 0$, $a^2 > a'^2$. Alors x peut varier entre 0 et $-\infty$, et entre $\frac{1}{2}(a + a')$ et $+\infty$. L'origine est un point simple; le coefficient angulaire de la tangente en ce point se détermine facilement par la limite du rapport $(y^2 : x^2)$ pour $x = 0$. On trouve que Ty est la tangente, de

(*) Ce cas particulier a été traité que par M. Brocard. — Il convient d'observer que les droites $x = \frac{1}{2}a$, $x = \frac{1}{2}a'$ font partie du lieu demandé; elles correspondent à la tangente menée au point de contact des deux circonférences, combinée avec une autre tangente quelconque menée à l'une ou l'autre de ces courbes.

sorte que nous avons une branche s'étendant à partir de T, indéfiniment du côté du plus petit cercle et asymptote à Δ′ et Δ″. Le point E$\{y=0,\ x=\frac{3}{4}(a+a')\}$ est un point double; les tangentes en ce point se déterminent au moyen de

$$\lim\frac{y^2}{\{x-\frac{3}{4}(a+a')\}^2}=\lim\frac{4aa'}{(a+a')^2}\frac{x}{\frac{1}{2}(a+a')-x},\text{ pour }x=\tfrac{3}{4}(a+a').$$

On a donc deux autres branches asymptotes à Δ, se recoupant en E et asymptotes à Δ′ et Δ″.

2° Si les cercles O, O′ se touchent intérieurement, Δ′ et Δ″ sont imaginaires. La courbe est renfermée entre T*y* et Δ, sauf un point isolé en E; elle se compose d'une seule branche.

Question 445.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 143.)

On joint un point fixe M *d'une ellipse à deux points* P,Q *pris sur le grand axe à égale distance d'un point donné* N. *Les droites* MP, MQ *rencontrent l'ellipse en* P′, Q′. *On propose* 1° *de démontrer que la droite* P′Q′ *passe par un point fixe* R; 2° *de trouver le lieu décrit par* R, *lorsque* M *parcourt l'ellipse donnée.* (J. Neuberg.)

Solution analytique par M. Mosnat (*Toulon*). 1° Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au point M (α, β). Les équations de l'ellipse, de la tangente en M et de la corde P′Q′ étant maintenant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2\alpha x}{a^2}+\frac{2\beta y}{b^2}=0,$$

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=0,\quad ux+vy-1=0,$$

le système des droites MP′, MQ′ peut être représenté par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2\alpha x}{a^2}+\frac{2\beta y}{b^2}+\lambda\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}\right)(ux+vy-1)=0.$$

Cette équation doit être homogène en x, y; d'où $\lambda=2$. Si l'on y fait $y=-\beta$, les racines de l'équation obtenue en x ont, d'après la con-

dition du problème, pour demi-somme l'abscisse x du point donné N. Il résulte de là que

$$x\left(\frac{a^2\beta^2}{b^2 n} - 2\alpha\right) + v\frac{\alpha\beta}{n} = 1,$$

égalité qui exprime que la droite P'Q' passe par le point fixe R dont les coordonnées sont

$$x = \frac{a^2\beta^2}{b^2 n} - 2\alpha, \quad y = \frac{\alpha\beta}{n}. \tag{1}$$

2° Si l'on revient aux axes primitifs, les coordonnées de R sont

$$x = \frac{a^2\beta^2}{b^2(n-\alpha)} - \alpha = \frac{a^2 - n\alpha}{n-\alpha}, \quad y = \frac{\alpha\beta}{n-\alpha} + \beta = \frac{n\beta}{n-\alpha}, \tag{2}$$

n désignant actuellement ON. Ces formules donnent

$$\alpha = \frac{a^2 - nx}{n-x}, \quad \beta = \frac{y(n^2 - a^2)}{n(n-x)}.$$

Exprimant que les valeurs de α, β vérifient l'équation de l'ellipse, on trouve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(n^2 - a^2)\,y^2}{b^2 n^2} = 1.$$

Le lieu de R est donc une ellipse ou une hyperbole, suivant que N est extérieur ou intérieur à l'ellipse donnée. Si $n = 0$ ou $\pm a$, ce lieu est l'axe OX ou la tangente au sommet correspondant de la courbe donnée.

Solution analogue par MM. l'abbé E. Gelin et Jules Collin. Si l'on suppose le point M fixe et N variable sur le grand axe, le point R décrit une droite (E. Gelin). L'équation de ce nouveau lieu résulte de l'élimination de n entre les formules (1); on trouve $-\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 1$, c'est-à-dire la tangente au point $(-\alpha, \beta)$.

Solution géométrique par MM. Jeřábek, Falisse et Farisano(*). 1° Les points P, Q sont conjugués dans l'involution (par symétrie) qui a pour points doubles N et le point U situé à l'infini sur le grand axe. Le faisceau involutif des droites MP, MQ marque sur la conique une involution de couples P', Q', ayant pour points doubles les points de rencontre N', U' de la courbe avec la droite MN et la parallèle MU au grand axe.

(*) Cette solution se recommande à ceux de nos lecteurs qui possèdent les premières notions de géométrie projective. (J. N.)

Donc, d'après un théorème connu(*), la droite P'Q' passe par un point fixe R situé à l'intersection des tangentes menées en N' et U' à l'ellipse donnée.

2° Lorsque M parcourra l'ellipse, les couples (M, N'), (M, U') appartiendront à deux involutions; par conséquent, les points N', U' se correspondront dans deux séries projectives marquées sur l'ellipse. Il résulte de là que la corde N'U' enveloppe une conique et que son pôle R décrit également une conique (R). Celle-ci est évidemment symétrique par rapport au grand axe AA' de l'ellipse donnée. De plus, elle a pour sommets A, A'; car lorsque M est en A ou A', R coïncide avec A' ou A.

Le point R passe à l'infini, lorsque N' et U' sont diamétralement opposés ou que M et N' sont symétriques par rapport à AA'. Donc, si N est entre A et A' et que l'ordonnée menée par ce point rencontre l'ellipse en m, m', le lieu (R) est une hyperbole dont les asymptotes sont les diamètres de l'ellipse conjugués avec Om et Om'.

3° Toute conique ayant pour sommets A, A' peut être considérée comme une conique (R); le point correspondant N s'obtient en menant par un point quelconque R de cette courbe deux tangentes RU', RN' à l'ellipse donnée et joignant l'un des points de contact au point symétrique de l'autre point de contact par rapport au petit axe de l'ellipse. En particulier, le point N peut être choisi de manière que la conique (R) soit une circonférence ou une hyperbole équilatère.

MM. Verniory et Déprez ont résolu la même question en démontrant par la géométrie analytique les théorèmes de géométrie projective invoqués dans la solution qui précède.

M. Gob démontre la proposition dans le cas de la circonférence et passe ensuite au cas général. Il fait aussi observer que les points P, Q peuvent être deux points quelconques divisant harmoniquement un segment fixe NU.

(*) Les deux cas particuliers suivants se rencontrent très souvent dans les Exercices de Géométrie analytique : 1° Lorsqu'un angle droit P'MQ' tourne autour de son sommet M placé sur une conique, la corde P'Q' qu'il détermine sur cette courbe passe par un point fixe R; ce point décrit une conique, quand le point M parcourt la courbe donnée (théorème de Frégier); 2° MN étant une corde fixe d'une conique, et MP', MQ' deux cordes variables également inclinées sur MN, la corde P'Q' tourne autour d'un point fixe R.

On peut voir, à ce sujet, Catalan, *Mélanges mathématiques*, Notes LII et LIV et N. A. M., 1843, (1), II, p. 186, 1859, (1), XVIII, p. 85, 1861, (1), XX, p. 366 (Gérono). (J. N.)

Question 454.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 167.)

Soient A', B', C', D' *les projections des sommets d'un tétraèdre* ABCD *sur un plan quelconque. Démontrer que les perpendiculaires abaissées de* A', B', C', D' *respectivement sur les plans* BCD, CDA, DAB, ABC *sont les génératrices d'un même hyperboloïde.* (J. Neuberg.)

Solution par M. Van Dorsten (Rotterdam) *et* Meurice. Prenons le plan donné pour plan des XY d'un système de coordonnées rectangulaires. Les coordonnées des sommets du tétraèdre ABCD étant $(x_1, y_1, z_1), \ldots$, celles de A', B', C', D' sont $(x_1, y_1, 0)$, ... Désignons par X_r, Y_r, Z_r, U_r les mineurs relatifs à la r^e ligne du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

L'équation du plan BCD étant

$$xX_1 + yY_1 + zZ_1 + U_1 = 0,$$

la perpendiculaire A'A'' abaissée de A' sur BCD est représentée par

$$x = \frac{X_1}{Z_1} z + x_1, \quad y = \frac{Y_1}{Z_1} z + y_1,$$

pour qu'elle rencontre la droite dont les équations sont

$$x = Pz + p, \quad y = Qz + q,$$

les coefficients P, Q, p, q doivent vérifier la relation

$$y_1 Z_1 P - x_1 Z_1 Q + Z_1 (pQ - qP) - pY_1 + qX_1 + x_1 Y_1 - y_1 X_1 = 0.$$

Remplaçant l'indice 1 par 2, 3, 4, et ajoutant les quatre équations de condition, on obtient identiquement $0 = 0$, car les coefficients de P, Q, ... sont les sommes des produits des éléments d'une colonne du déterminant D par les mineurs relatifs à une autre colonne. Il résulte de là que toute droite rencontrant A'A'', B'B'', C'C'' s'appuie également sur D'D''.

Remarque. La question 454 peut être considérée comme un cas particulier d'un théorème énoncé par M. Neuberg dans le *Mémoire sur le tétraèdre* (Généralisation d'une proposition due à Steiner, p. 12 et 27).

Démonstration géométrique. La droite B'B'' perpendiculaire au plan ACD est perpendiculaire à la droite CD de ce plan; donc on peut mener par B'B'' un plan β perpendiculaire à CD. La trace de β sur le plan B'C'D' est perpendiculaire à la projection C'D' de CD sur le même plan. De même, les traces des plans γ, δ menés respectivement par les droites C'C'' D'D'' perpendiculairement aux droites DB, BC se confondent avec deux autres hauteurs du triangle B'C'D'. Donc les trois plans β, γ, δ se rencontrent suivant la perpendiculaire abaissée de l'orthocentre de B'C'D' sur le plan BCD. Cette perpendiculaire rencontre évidemment les droites B'B'', C'C'', D'D'' contenues dans les plans β, γ, δ; elle rencontre aussi la droite A'A'' qui lui est parallèle. On peut trouver, semblablement, trois autres droites perpendiculaires aux faces CDA, DAB, ABC et rencontrant les quatre lignes A'A'', B'B'', C'C'', D'D''. Donc celles-ci appartiennent à un même hyperboloïde.

Corollaire. Soient A', B', C', D' les projections des sommets d'un tétraèdre ABCD sur un même plan P, et soient A_1, B_1, C_1, D_1 les orthocentres des triangles B'C'D', C'D'A', D'A'B', A'B'C' : 1° Les perpendiculaires abaissées des points A_1, B_1, C_1, D_1 respectivement sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC sont les génératrices d'un même hyperboloïde; 2° les perpendiculaires abaissées des milieux des droites $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$, $D'D_1$ respectivement sur les mêmes plans concourent en un même point (centre de l'hyperboloïde).

Remarque. Si l'on fait coïncider le plan P avec une face du tétraèdre ABCD, on retrouve un théorème connu. (J. N.)

Autre solution géométrique par M. Meurice(*). Soient B_1, C_1, D_1 les points de rencontre des droites AB, AC, AD avec le plan P; les hauteurs AA', B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 du tétraèdre $AB_1C_1D_1$ sont les génératrices d'un même hyperboloïde. Considérons, dans cet hyperboloïde, la génératrice du second mode qui passe par A'. Étant située dans le plan $A'B_1B_2$ qui renferme la droite B'B'' (B' tombe sur $A'B_1$), elle rencontre B'B''; comme elle rencontre aussi C'C'', D'D'', AA', nous avons une première droite s'appuyant sur AA', BB', CC', D, D'. On peut trouver, de la même manière, des droites menées par B', C', D' et s'appuyant sur AA', BB', etc.

(*) Cette démonstration est peut-être plus simple que le nôtre. (J. N.)

×Question 545.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 264.)

Soient a, b, c, d les côtés AB, BC, CD, DA *d'un quadrilatère sphérique* ABCD, *et f, g les diagonales* AC, BD. *Démontrer que l'angle* $\varphi =$ AOB *des diagonales est donné par la formule*

$$\sin f \sin g \cos\varphi = \cos a \cos c - \cos b \cos d. \qquad (1)$$

Déduire de là le théorème correspondant de la géométrie plane.

Solution par M. I. Beyens (*Cadix*), Déprez (*Dinant*) *et* Demoulin (école normale des sciences de Gand). 1° On a

$$\cos a = \cos \mathrm{OA} \cos \mathrm{OB} + \sin \mathrm{OA} \sin \mathrm{OB} \cos\varphi,$$
$$\cos c = \cos \mathrm{OD} \cos \mathrm{OC} + \sin \mathrm{OD} \sin \mathrm{OC} \cos\varphi,$$
$$\cos b = \cos \mathrm{OB} \cos \mathrm{OC} + \sin \mathrm{OB} \sin \mathrm{OC} \cos\varphi,$$
$$\cos d = \cos \mathrm{OA} \cos \mathrm{OD} + \sin \mathrm{OA} \sin \mathrm{OD} \cos\varphi;$$

d'où

$$\cos a \cos c - \cos b \cos d =$$
$$\cos\varphi (\sin \mathrm{OA} \sin \mathrm{OB} \cos \mathrm{OD} \cos \mathrm{OC} + \sin \mathrm{OD} \sin \mathrm{OC} \cos \mathrm{OA} \cos \mathrm{OB})$$
$$- \cos\varphi (\sin \mathrm{OB} \sin \mathrm{OC} \cos \mathrm{OA} \cos \mathrm{OD} + \sin \mathrm{OA} \sin \mathrm{OD} \cos \mathrm{OB} \cos \mathrm{OC}).$$

Le deuxième membre de cette égalité se ramène facilement à

$$\cos\varphi \,.\, \sin(\mathrm{OA} + \mathrm{OC}) \sin(\mathrm{OB} + \mathrm{OD}) = \sin f \sin g \cos\varphi.$$

2° Rapportons les côtés et les diagonales du quadrilatère et le rayon de la sphère à une unité quelconque, et soient alors a, b, c, d, f, g, R leurs mesures. La formule trouvée doit être écrite ainsi

$$\cos\varphi = \frac{\cos\frac{a}{\mathrm{R}}\cos\frac{c}{\mathrm{R}} - \cos\frac{b}{\mathrm{R}}\cos\frac{d}{\mathrm{R}}}{\sin\frac{f}{\mathrm{R}}\sin\frac{g}{\mathrm{R}}},$$

ou en employant les développements en série :

$$\cos\varphi = \frac{\left(1-\frac{a^2}{2\mathrm{R}^2}+\frac{a^4}{24\mathrm{R}^4}\cdots\right)\left(1-\frac{c^2}{2\mathrm{R}^2}\cdots\right)-\left(1-\frac{b^2}{2\mathrm{R}^2}\cdots\right)\left(1-\frac{d^2}{2\mathrm{R}^2}\cdots\right)}{\left(\frac{f}{\mathrm{R}}-\frac{f^3}{6\mathrm{R}^3}\cdots\right)\left(\frac{g}{\mathrm{R}}-\frac{g^3}{6\mathrm{R}^3}\cdots\right)}.$$

$$= \frac{-\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2\mathrm{R}^2}+\frac{a^4+c^4\ldots}{24\mathrm{R}^4}}{\frac{fg}{\mathrm{R}^2}-\frac{fg^3+f^3g}{6\mathrm{R}^4}\cdots}.$$

Si l'on multiplie les deux termes de la fraction du deuxième membre par R^2 et qu'on fasse ensuite $R = \infty$, il vient (voir *Mathesis*, t. III, p. 67 et t. VI, p. 42.)

$$\cos\varphi = \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{2fg}. \qquad \text{(Beyens.)}$$

Remarque. Pour calculer f, g, lorsqu'on connaît a, b, c, d, φ, il faut combiner la formule (1) avec la relation entre les distances mutuelles de quatre points de la sphère. (Déprez.)

×Question 559.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 56.)

Connaissant l'angle A *d'un triangle* ABC, *et l'angle* χ *compris entre les droites joignant* A *aux points* D, E *qui divisent* BC *en trois parties égales, calculer les angles* B, C. *Examiner le cas particulier où* $A = \frac{1}{3}\pi$. *Généraliser la question en supposant que* DE *est l'une quelconque des* n *parties égales dans lesquelles* BC *est divisé.* (Marius Baker.)

Solution par MM. Campbell *et* Emmerich. Soient, dans le cas général,

$$BD = \beta, \quad CE = \gamma, \quad DE = \delta, \quad \text{angle } BAD = \varphi', \quad EAC = \varphi''.$$

En passant par les formules :

$$\text{aire } ABD = \tfrac{1}{2}\, AB.AD \sin\varphi' = \tfrac{1}{2}\, BD.h, \ldots,$$

on trouve aisément

$$\frac{ABD.ACE}{ADE.ABC} = \frac{\sin\varphi' \sin\varphi''}{\sin\varphi . \sin A} = \frac{\beta\gamma}{a\delta},$$

d'où

$$\cos(\varphi' - \varphi'') - \cos(\varphi' + \varphi'') = \frac{2\beta\gamma}{a\delta} \sin\varphi \sin A,$$

$$\cos(\varphi' - \varphi'') = \frac{2\beta\gamma}{a\delta} \sin\varphi \sin A + \cos(A - \varphi)$$

$$= \cos A \cos\varphi + \sin\varphi \sin A \left(1 + \frac{2\beta\gamma}{a\delta}\right),$$

formule qu'on rend calculable par logarithmes au moyen d'une inconnue auxiliaire

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg} A \left(1 + \frac{2\beta\gamma}{a\delta}\right).$$

Après avoir déterminé φ' et φ'', on remarquera que

$$\frac{ABD}{ACD}=\frac{\beta}{a-\beta}=\frac{AB.AD\sin\varphi'}{AC.AD\sin(A-\varphi')}=\frac{\sin C\sin\varphi'}{\sin B\sin(A-\varphi')},$$

de sorte que l'on connaît la somme $B+C$ et le rapport $\sin C : \sin B$. On a

$$\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\beta\sin(A-\varphi')}{(a-\beta)\sin\varphi'}=\operatorname{tg}\theta,$$

θ étant un angle auxiliaire; de là

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C-B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C+B)}=\operatorname{tg}(\theta-45^\circ).$$

Lorsque $A=\frac{1}{2}\pi$, $\beta=\gamma=\delta=\frac{1}{3}a$, on a plus simplement

$$\cos(\varphi'-\varphi'')=\tfrac{5}{3}\sin\varphi,\quad \operatorname{tg}C=\tfrac{1}{2}\cot\varphi'.$$

Autres solutions par MM. Bonnet, Déprez et Brocard.

---

*Question 580.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 206.)

Dans tout triangle ABC :

$$\frac{a^2\cot\frac{1}{2}A+b^2\cot\frac{1}{2}B+c^2\cot\frac{1}{2}C}{a^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}A+b^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}B+c^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}=\frac{R+r}{R-r}. \qquad (1)$$

Solution par M. Ign. Beyens (Cadix), Falisse et Rocchetti. L'égalité à démontrer est équivalente à celle-ci :

$$\frac{\Sigma a^2(\cot\frac{1}{2}A+\operatorname{tg}\frac{1}{2}A)}{\Sigma a^2(\cot\frac{1}{2}A-\operatorname{tg}\frac{1}{2}A)}=\frac{R}{r}. \qquad (2)$$

Or

$$\cot\tfrac{1}{2}x+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x=\frac{2}{\sin x},\quad \cot\tfrac{1}{2}x-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x=\frac{2\cos x}{\sin x};$$

donc, au lieu de (2), on peut mettre

$$\frac{R}{r}=\frac{S\frac{a^2}{\sin A}}{S\frac{a^2\cos A}{\sin A}}=\frac{\frac{a}{\sin A}\Sigma a}{\frac{a}{\sin A}\Sigma a\cos A}=\frac{2p}{S\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc}}=\frac{4abcp}{-\Sigma a^4+2\Sigma a^2b^2},$$

$$\therefore\ \frac{4abcp}{16\Delta^2}=\frac{16RSp}{16\Delta^2}=\frac{Rp}{s},$$

ce qui est une identité, à cause de $s=pr$.

NOTE. M. RUSSO vérifie la formule (1) en remplaçant R, r, $\cot\frac{1}{2}A$, etc. par leurs valeurs en fonction de a, b, c.

M. EMMERICH observe que :

$$Sa^2\cot\tfrac{1}{2}A = 8R^2S\sin A\cos^2\tfrac{1}{2}A = 4R^2S\sin A(1+\cos A)$$
$$= 16R^2(4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C + 2\sin A\sin B\sin C)$$
$$= 16R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C(R+r), \text{ etc.}$$

M. MEURICE se sert des relations

$$R+\alpha = \tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}A, \quad R-\alpha = \tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A, \text{ etc., et } a\alpha+b\beta+c\gamma = 2S,$$

où α, β, γ sont les distances du centre de la circonférence ABC aux milieux des côtés de ABC.

M. DÉPREZ part de la relation (voir *Mathesis*, t. VIII, p. 15)

$$\frac{r}{R} = \frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a+b+c}$$

et en déduit le rapport $(R+r):(R-r)$. Il signale aussi les formules suivantes :

$$\frac{R+r_a}{R-r_a} = \frac{b\cos^2\frac{1}{2}A + c\cos^2\frac{1}{2}C - a\sin^2\frac{1}{2}A}{b\sin^2\frac{1}{2}A + c\sin^2\frac{1}{2}C - a\cos^2\frac{1}{2}A} = \frac{b^2\cot\frac{1}{2}B + c^2\cot\frac{1}{2}C - a^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}A}{b^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}B + c^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}C - a^2\cot\frac{1}{2}A}$$
$$= \frac{b^2\operatorname{coséc}^2\frac{1}{2}B + c^2\operatorname{coséc}^2\frac{1}{2}C - a^2\operatorname{séc}^2\frac{1}{2}A}{b^2\operatorname{séc}^2\frac{1}{2}B + c^2\operatorname{séc}^2\frac{1}{2}C - a^2\operatorname{coséc}^2\frac{1}{2}A},$$

r_a étant le rayon d'un cercle exinscrit.

QUESTIONS D'EXAMEN.

354. Soit ABC un triangle rectangle en A. Démontrer que la droite joignant C au milieu de la hauteur AH rencontre AB en un point D tel que $\overline{AC}^2 = AD.AB$. (D'OCAGNE.)

355. a, b, c, d étant des nombres positifs, vérifier les relations

$$4(a^4+b^4+c^4+d^4) > (a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3)$$
$$> (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 > 16abcd.$$

(*Journal de* VUIBERT.)

1° La moyenne arithmétique de plusieurs nombres étant plus grande que leur moyenne géométrique, on a $\frac{1}{4}Sa^2 > \sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2}$; 2° $SaSa^3 = Sa^4 + Sab(a^2+b^2) > Sa^4 + 2Sab.ab$; 3° $ab(a^2+b^2) < \frac{1}{2}(a^2+b^2)^2$ ou $< \frac{1}{2}(a^4+b^4) + a^2b^2 < (\frac{1}{2}a^4+b^4) + \frac{1}{2}(a^4+b^4)$; donc $SaSa^3 < Sa^4 + S(a^4+b^4)$ ou $< 4Sa^4$..

356. Étant donné un triangle équilatéral ABC, on prend sur BA, CA deux distances égales $BB' = CC' = x$. Valeur de x qui rend minimum $\overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 + \overline{B'C'}^2$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

82. Étant données une fonction entière $f(x)$ de degré n, et $(n+1)$ quantités arbitraires $a, b, c, \ldots l$, déterminer la valeur des coefficients A, B,..., L, dans le développement

$$fx = Af(x-a) + Bf'(x-a-b) + Cf''(x-a-b-c) + \cdots + Nf^{n}(x-a-b-\cdots-l).$$ (J. C. GLASHAN.)

(*Mathesis*, t. I, p. 62.)

×**84.** *Théorèmes.* 1° Il y a une infinité de polyèdres à faces triangulaires, ne différant que par le nombre de leurs angles hexaèdres : mais il n'y en a pas deux qui diffèrent seulement par le nombre de leurs angles solides d'un autre ordre. 2° Il y a une infinité de polyèdres à faces quadrangulaires, ne différant que par le nombre de leurs angles tétraèdres : mais il n'y en a pas deux qui diffèrent seulement par le nombre de leurs angles solides d'un autre ordre. 3° Il n'y a pas de polyèdres à faces pentagonales, qui ne diffèrent que par le nombre de leurs angles solides d'un certain ordre (*Mathesis*, t. I, p. 62.) (E. CESARO

×**604.** Soit ABC un triangle rectangle en A; on trace la hauteur AI, puis les bissectrices des angles DAC, DAB, ABC, ACB. On obtient ainsi sur BC deux points S, S′ et, sur AD, deux points T, T′; désignons aussi par α, β, γ les centres des cercles inscrits aux triangles ABC, ABD, ACD. Cela posé : 1° Les points A, α, β, γ forment un groupe orthocentrique; 2° le centre du cercle $A\beta\gamma$ est situé sur AD; 3° les points B, C, β, γ sont cycliques; 4° les points S, S′, T, T′ forment un groupe orthocentrique.

REMARQUE. Nous proposons d'appeler *groupe* orthocentrique un ensemble de quatre points tels que l'un quelconque d'entre eux est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres. (G. DE LONGCHAMPS.)

×**605.** Les constantes A, B, C, a, b, c étant données, déterminer les constantes A_1, B_1, C_1 de façon que l'expression

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \frac{B_1}{(x-b)^2} + \frac{C_1}{(x-c)^2}$$

soit le carré d'une fraction rationnelle en x. A quelle condition le problème est-il possible? Les constantes a, b, c sont supposées différentes.

606. Par les sommets A et B, C et D d'un quadrilatère, on fait passer deux circonférences variables, telles que le rapport des rayons soit constant. Démontrer que leur axe radical enveloppe une conique. (Dér...

SUR LES NOMBRES PARFAITS

par M. J. J. SYLVESTER, M. A., F. R. S., Correspondant de l'Institut de France, etc.

M. Sylvester vient de publier dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (séance du 8 février 1888, t. CVI, pp. 462–465) une intéressante contribution à l'étude des nombres parfaits, à laquelle notre collaborateur M. Servais (*Mathesis*, t. VII, pp. 229–230) nous a fait l'honneur de consacrer un article spécial.

Nous sommes heureux de reproduire ici les considérations nouvelles que notre illustre géomètre anglais, comme complément aux articles précités, a bien voulu nous adresser (*Mathesis*, t. VI, pp. 10–11, 165–166, 178, 346–351, et t. VII, p. 229–230, 239–240).

La notation $c \equiv i \equiv 1 \pmod 4$ est équivalente à la suivante plus explicite :

$$c = 1 - 4\alpha, \quad i = 1 - 4\beta,$$

et prononce : *c est congru à i suivant le module 4*.

Nous ajoutons quelques notes à l'article ci-après de M. Sylvester pour en faciliter l'intelligence (*). F. D.

« Existe-t-il des nombres parfaits impairs ? » C'est une question qui reste encore.

Dans un article intéressant de M. Servais, paru dans le journal *Mathesis*, en octobre 1887, on trouve cette proposition qu'un nombre parfait impair (s'il y en a) *qui ne contient que trois facteurs premiers distincts* est nécessairement *divisible par 3 et 5*. Je vais démontrer ici qu'un tel nombre n'existe pas, au moyen d'une genre de raisonnement qui m'a fourni aussi une démonstration de ce théorème qu'il n'*existe pas de nombre parfait impair qui contienne moins de six facteurs premiers distincts*.

On voit facilement que la somme de la série géométrique

$$1 + c + c^2 + \cdots + c^i$$

où i est impair, sera elle-même paire quand i est impair; de plus, quand c est impair, cette somme sera toujours impaire, mais impairement paire seulement dans le cas où $c \equiv i \equiv 1 \pmod 4$.

(*) Dans les n^os^ des C. R. du 13 et du 20 février, M. Sylvester a publié de nouvelles considérations sur les nombres parfaits dont nous ne pouvons, faute d'espace, reproduire plus bas, les conclusions en note. Il s'est aussi occupé des nombres parfaits dans les n^os^ de *Nature*, du 15 et du 22 décembre 1887, et dans l'*Athenæum* du 3^e^ mars 1888.

Donc, si un nombre parfait impair est de la forme $p^i q^j r^k \ldots$ ($p, q, r, \ldots$ étant des nombres premiers distincts), tous les indices $i, j, k, \ldots$ doivent être pairs à l'exception d'un seul, soit i, lequel, de même que sa base p, sera congru à 1 par rapport au module 4; car on doit avoir

$$\int p^i \int q^j \int r^k \ldots = 2p^i q^j r^k \ldots,$$

$\int x^i$ réprésentant $1 + x + \cdots + x^i$, c'est-à-dire $\dfrac{x^{i+1} - 1}{x - 1}$.

Ainsi, on voit qu'un nombre parfait impair (si un tel nombre existe) sera de la forme $M^2 (4q+1)^{4k+1}$, $4q+1$ étant un nombre premier qui ne divise pas M (*).

Comme corollaire, on peut déduire qu'aucun nombre parfait impair ne peut être divisible par 105. En effet, soit un tel nombre $3^{2i} 5^{2j} 7^{2k} \ldots$; on aura

$$\frac{\int 3^{2i} \int 5^{2j} \int 7^{2k}}{3^{2i} 5^{2j} 7^{2k}} > \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2}\right);$$

c'est-à-dire $> \dfrac{2.13.19}{5.49}$; c'est-à-dire $\dfrac{494}{245}$ qui est plus grand que 2.

Remarquons qu'en général, si $p^i q^j r^k \ldots$ est un nombre parfait, il faut que

$$\frac{p^{i+1}}{p^i (p-1)} \frac{q^{j+1}}{q^j (q-1)} \cdots \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{p}{p-1} \frac{q}{q-1} \frac{r}{r-1} \cdots$$

soit plus grand que 2 (**).

(*) Théorème démontré aussi, en 1886, par M. Stern, dans *Mathesis*, t. VI, p. 248-250, mais que l'on trouve également au n° 109, du chapitre III, de l'opuscule d'Euler : *Tractatus de numerorum doctrina*, publié dans les *Commentationes arithmeticae collectae* (voir t. II, pp. 514-515).

Il en résulte que, si 3, 7, ou 11, etc. entrent comme facteur dans un nombre parfait impair, ils y entrent avec un exposant pair, car ils sont de la forme $(4p+3)$.

(**) Voir, par exemple, l'article de M. Servais, p. 230. D'après la définition des nombres parfaits, on a

$$\frac{\int p^i . \int q^j . \int r^k}{p^i q^j r^k} = 2,$$

ou encore

$$\frac{p^{i+1} - 1}{p^i (p-1)} \cdot \frac{q^{j+1} - 1}{q^j (q-1)} \cdot \frac{r^{k+1} - 1}{r^j (r-1)} = 2.$$

On déduit aisément de là 1° que $(q^{j+1} - 1)$ $(r^{k+1} - 1)$ doit être divisible par p. 2° En supprimant (-1) dans les numérateurs,

$$\frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \cdot \frac{r}{r-1} > 2.$$

Ainsi, à moins que le plus petit des éléments $p, q, r \ldots$ ne soit pas plus grand que 3, on doit avoir

$$\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{11}{10}\frac{13}{12}\frac{17}{16}\frac{19}{18}\cdots > 2;$$

mais en ne dépassant pas 19, ce produit est moindre que 1,94963. Conséquemment le nombre des éléments, dans ce cas, doit être 7 au moins. Puisque

$$1.95 \times \left(1 + \frac{1}{40}\right) < 2,$$

on voit immédiatement que, si un nombre parfait a 7 éléments parmi lesquels 3 ne figure pas, existe, le septième élément ne pourrait pas dépasser 37(*).

Passons au cas de 3 éléments 3, q, r d'un nombre parfait impair. Puisque

$$\frac{3}{2}\frac{7}{6}\frac{11}{10} = \frac{231}{120} < 2,$$

on voit que $3^i.7^j.11^k$, et à plus forte raison $3^i p^j q^k$, où p, q sont des nombres quelconques autres que 3 ou 5, ne peut être un nombre parfait.

Supposons donc que 3, 5, q sont les éléments d'un nombre parfait puisque

$$\frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{17}{16} = \frac{255}{128} < 2,$$

on voit que q ne peut être ni 17, ni un nombre quelconque plus grand que 17. Donc $q = 11$ ou $q = 13$; car nous avons vu que 3, 5, 7 ne peuvent jamais se trouver réunis comme éléments d'un nombre parfait quelconque.

(*) Dans les C. R. du 13 février, M. Sylvester a prouvé qu'il ne peut y avoir de nombre parfait premier avec 3, ayant même 7 ou 8 éléments. Il se sert pour arriver à ce résultat de propriétés (déduites du théorème de Fermat) des expressions $\theta^n - 1$, $[(\theta^n - 1) : (\theta - 1)]$; il nomme ces expressions *fermatien* de base θ et d'*indice* n, et *fermatien réduit* en l'honneur du grand géomètre de Toulouse. Il rappelle, à ce propos, les mots adressés à celui-ci par Pascal : « Au plus grand homme de l'Europe », mots gravés sur le buste de Fermat au musée de Toulouse. La citation exacte de Pascal est : « Quoique vous soyez celui *de toute l'Europe* que je tiens pour *le plus grand géomètre*, etc. » (Lettre du 10 août 1660)

1° Soient 3, 5, 13 les éléments. L'indice de 13 ne peut pas être impair, car alors le nombre

$$\int 13^{2i+1} = \frac{13^{2i+2} - 1}{13 - 1}$$

contiendrait le facteur 7, et 7 devrait être un des éléments(*). Il s'ensuit que $(3^{2i+1} - 1)(13^{2j+1} - 1)$ devrait contenir 5; mais, par rapport au module 5, une puissance impaire quelconque de 3 ou 13 est congrue à 3 ou à 2. Donc la combinaison 3, 5, 13 est inadmissible.

2° Soient 3, 5, 11(**) les éléments. L'indice de 5 doit être de la forme $4j + 1$; mais, si $j > 0$,

$$\int 5^{4j+1} = \frac{5^{4j+2} - 1}{5 - 1}$$

contiendra les trois nombres impairs premiers entre eux(***)

$$\frac{5^{2j+1} - 1}{5 - 1}, \quad \frac{5^{2j+1} + 1}{5 + 1}, \quad \frac{5 + 1}{2}.$$

[pourvu que $2j + 1$ ne soit pas divisible par 3; dans ce cas, $5^{2j+1} + 1$ contiendrait $5^3 + 1 = 18.7$, de sorte que 7 serait un élément].

Conséquemment, il y aura au moins trois autres éléments en plus de 5, ce qui est inadmissible; donc le nombre sera de la forme $3^{2i}.5.11^{2k}$.

Donc $(1 + 5)(11^{2k+1} - 1)$ doit contenir 9, ce qui est impossible; car $11^{2k+1} \equiv 2 \pmod 3$.

Ainsi, on voit qu'un nombre parfait impair avec 3 éléments seulement ne peut exister(****).

(*) $13^{2j+2} - 1$ est divisible par $13^2 - 1 = 168 = 7 \times 24$.

(**) 3 et 11 ont des exposants pairs (voir la première note, p. 57).

(***) Les nombres $5^{2j+1} - 1$, $5^{2j+1} + 1$, n'ont d'autre diviseur commun que leur différence 2; ensuite on a

$$5^{2j+1} = \mathcal{M}3 + 2,$$

donc $5^{2j+1} - 1$ et $\frac{1}{2}(5^{2j+1} - 1)$ ne sont pas divisibles par $\frac{5+1}{2} = 3$. Mais $\frac{5^{2j+1}+1}{5+1}$ n'est pas toujours premier avec 3; en effet, $5^{2j+1} + 1$ est un multiple de 9 plus 6, 0 ou 3 suivant que $2j + 1$ est de la forme $3p + 1$, $3p$, ou $3p + 2$. Les lignes entre crochets manquent dans les C. R.; elles nous ont été obligeamment communiquées par l'auteur, pour compléter la démonstration, dans le cas où 5^{2j+1} est divisible par 9. (Voir aussi la note à la suite de l'article).

(****) Dans les C. R. du 20 février, M. Sylvester démontre qu'il n'y a pas nombre

Quant aux nombres parfaits pairs, Euclide a démontré que $2^n \int 2^n$, c'est-à-dire $2^n(2^{n+1}-1)$ est un nombre parfait pourvu que $2^{n+1}-1$ soit un nombre premier. Mais on doit à Euler la seule preuve(*) que je connaisse de la proposition réciproque qu'*il n'existe pas de nombres pairs parfaits autres que ceux d'Euclide.* »

Note. On peut encore établir le 2° comme il suit. Le nombre $\frac{5^{2j+1}-1}{5-1}$ introduit dans le premier membre de l'égalité hypothétique

$$\frac{3^{2i+1}-1}{3-1}\cdot\frac{5^{4j+2}-1}{5-1}\cdot\frac{11^{2k+1}-1}{11-1}=2.3^{2i}.5^{4j+1}.11^{2k}$$

au moins un facteur différent de 3, 5, 11. En effet, ce nombre $\frac{5^{2j+1}-1}{5-1}$ s'il n'est pas divisible par 11, introduit un autre facteur que 3, 5, 11, puisqu'il est premier avec 3, 5, 11. D'autre part, s'il est divisible par 11, il est aussi divisible par 71; car on a

$5-1=4$, $\quad 5^{5(2p+1)-4}-1 \equiv 11+4$,

$5^3-1 \equiv 11+3$, $\quad 5^{5(2p+1)-2}-1 \equiv 11+3$,

$5^5-1=4.11.71$, $\quad 5^{5(2p+1)}-1 \equiv (5^5-1) \equiv 71$

$5^7-1 \equiv 11+2$, $\quad 5^{5(2p+1)+2}-1 \equiv 11+2$,

$5^9-1 \equiv 11+8$, $\quad 5^{5(2p+1)+4}-1 \equiv 11+8$,

(P. M.)

---

parfait impair avec quatre éléments et annonce qu'il a prouvé qu'il n'en existe pas même avec cinq éléments.

(*) *Commentationes arithm. coll.*, p. 514, n° 107 (cité par M. Sylvester, *Nature*. 15 déc. 1887, p. 152). Voir une autre démonstration due à M. Lucas, dans *Mathesis*, t. VI, p. 146-147.

NOTE SUR LES POINTS COMPLÉMENTAIRES (*),

par M. MAURICE D'OCAGNE ingénieur des ponts et chaussées (Rochefort-sur-Mer).

Dans son intéressante étude sur les points complémentaires (*Mathesis*, 1887, p. 6), M. Vigarié a fait voir que si $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ sont les coordonnées normales du $n^{ième}$ complémentaire du point dont les coordonnées sont α, β, γ, on a

$$\alpha_n = C_n\alpha + C'_n(\beta+\gamma),\ \beta_n = C_n\beta + C'_n(\gamma+\alpha),\ \gamma_n = C_n\gamma + C'_n(\alpha+\beta),$$

avec

$$C_n = 2C'_{n-1},\quad C'_n = C_{n-1} + C'_{n-1}. \tag{1}$$

De ces formules on déduit, comme l'a remarqué M. Vigarié

$$C_n - C'_n = (-1)^n.$$

Les valeurs de $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ peuvent donc s'écrire

$$\alpha_n = (-1)^n\alpha + C'_n(\alpha+\beta+\gamma),\quad \beta_n = (-1)^n\beta + C'_n(\alpha+\beta+\gamma),$$
$$\gamma_n = (-1)^n\gamma + C'_n(\alpha+\beta+\gamma).$$

Pour avoir les valeurs explicites de $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, en fonction de n, il suffit donc de calculer C'_n. Voici comment nous avons effectué ce calcul :

Les formules (1) donnent

$$C'_n = C_{n-1} + C'_{n-1}$$
$$C_{n-1} = 2C'_{n-1} - 2C_{n-2}$$
$$C'_{n-1} = C_{n-2} + C'_{n-2}.$$

Faisant la somme de ces trois équations après avoir multiplié la dernière par 2, on a

$$C'_n = C'_{n-1} + 2C'_{n-2}\ (**).$$

(*) M. Vigarié nous avait communiqué les formules générales pour $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, en mai 1887. Si l'on considère une suite de points $M_1, M_2, M_3, \ldots$, dont chacun est le complémentaire barycentrique du précédent, on calcule aisément le rapport $GM_1 : GM_n = 1 : \frac{1}{3}[1 - (-2)^n]$; d'où les coordonnées de M_n [pour celles de G, il prendre $\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$]. (J. N.)

(**) Pour trouver la valeur de C'_n, écrivons cette relation sous la forme :

$$C'_n - 2C'_{n-1} = -[C'_{n-1} - 2C'_{n-2}].$$

Nous en déduirons évidemment :

$$C'_n - 2C'_{n-1} = (-1)^2[C'_{n-2} - 2C'_{n-3}] = \cdots = (-1)^{n-1}[C'_1 - 2C'_0] = (-1)^{n-1}.$$

D'où aisément

$$C'_2 = 2C'_1 - 1 = 2 - 1,\quad C'_3 = 4 - 2 + 1,\quad C'_4 = 8 - 4 + 2 - 1, \text{ etc.}$$

C'_n est donc le terme général d'une série récurrente proprement dite définie par la formule précédente, avec les conditions initiales

$$C'_0 = 0, \quad C'_1 = 1.$$

L'équation génératrice de cette série est

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

dont les racines sont

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1.$$

Donc, en vertu d'une formule connue (voir N. A. M. 1884, p. 68), on a

$$C'_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} = 2^{n-1} - 2^{n-2} + 2^{n-3} - \dots (-1)^{n-1}.$$

Ainsi se trouve explicitement résolu le problème du calcul des coordonnées d'un complémentaire d'ordre quelconque.

A propos des points complémentaires, je ne sais si on a déjà énoncé cette propriété presque évidente :

Le barycentre des complémentaires d'ordre n d'un nombre quelconque de points est le complémentaire d'ordre n du barycentre de ces points.

Ces points peuvent d'ailleurs être affectés de coefficients quelconques, pourvu que leurs complémentaires successifs soient respectivement affectés des mêmes coefficients.

THÉORÈMES SUR LA PARABOLE;

par C. Bergmans, professeur à l'Athénée royal de Gand.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 71, 95, 175; t. VI, p. 169; t. VII, p. 136).

Cinquième Série.

LXIII. Le paramètre p' relatif au diamètre mené par un point O' de la parabole : 1° est inversement proportionnel au carré du sinus de l'angle que les cordes conjuguées font avec l'axe de la parabole; 2° est égal au double de la distance du point O' au foyer ou à la directrice; 3° est égal à la moitié de la corde focale menée par le point O' dans le cercle osculateur en O', ou à la moitié de la corde parallèle à l'axe menée par le point O' dans ce cercle osculateur; 4° est égal à la moitié de la sous-corde de OD, c'est-à-dire de la corde menée du sommet O de la parabole de manière que le diamètre mené par le point O' divise OD en deux parties égales.

Définition. Si par le sommet O de la parabole on mène une corde quelconque OD, puis par le point D la droite DE perpendiculaire à OD qui rencontre l'axe en E, c'est OE qu'on appelle la *sous-corde* de OD.

Soit M un point quelconque de la parabole; x, y ses coordonnées relatives aux axes rectangulaires en O et x', y' relatives au diamètre et à la tangente menés par O'; soient X, Y les coordonnées de O' rapporté aux axes en O; on peut écrire

$$y^2 = 2px, \quad Y^2 = 2pX, \quad \frac{x-(X+x')}{m} = \frac{y-Y}{n} = y', \quad mp = nY;$$

donc $y'^2 = \frac{2p}{n^2}x'$, de sorte que $p' = \frac{p}{n^2} = 2FO'$ (th. L) = la moitié de la corde focale menée du point O' dans le cercle osculateur en O' (th. XXXV) = la moitié de la corde parallèle à l'axe menée dans le cercle osculateur par le point O' (th. XXXI); enfin l'équation de OD est $y = \frac{n}{m}x$ et la sous-corde $OE = \frac{2p}{n^2} = 2p'$.

LXV. Le produit des segments OB et OP interceptés sur une sécante quelconque OB passant par le sommet O de la parabole et terminée, d'une part, en B à la courbe, d'autre part, en P à la tangente AP perpendiculaire à la sécante OB, est égal à p^2 (*).

$$OB = \frac{2pm}{n^2}, \quad OP = \frac{pn^2}{2m}.$$

LXVI. Si d'un point M sur la parabole on abaisse une perpendiculaire MP sur un diamètre quelconque O'x' mené par un point O' de la courbe, et si l'on mène l'ordonnée MQ conjuguée de ce diamètre, la perpendiculaire MP est la moyenne proportionnelle entre $2p$ et O'Q.

De $y'^2 = \frac{2p}{n^2}x'$ (th. LXIV) on tire $(ny')^2 = 2p.x'$, ou bien $\overline{MP}^2 = 2p.O'Q$.

LXVII. 1° Le rapport de deux cordes OB, OB' menées à angle droit par le sommet de la parabole est égal au cube de la tangente de l'angle que l'une des deux cordes fait avec l'axe; 2° la quantité $2p$ est la moyenne proportionnelle entre les abscisses et aussi entre les ordonnées des extrémités de ces cordes; 3° la somme des inverses des sous-cordes est constante; elle est égale à $\frac{1}{2p}$; 4° la droite BB' rencontre l'axe en un point fixe I' qui est à la distance $2p$ du sommet.

1° $$OB = \frac{2rm}{n^2}, \quad OB' = \frac{2rm'}{n^2}; \quad BOB' = \frac{\pi}{2},$$

(*) Cela revient au théorème suivant : La podaire du sommet de la parabole est une ligne inverse de cette parabole.

donc

$$m' = -n, \quad n' = m \quad \text{et} \quad \frac{OB}{OB'} = \left(\frac{m}{n}\right)^2;$$

2° Soient x, y les coordonnées de B et x', y' celles de B', il vient

$$x = 2p\frac{m^2}{n^2}, \quad y = 2p\frac{m}{n}, \quad x' = 2p\frac{n^2}{m^2}, \quad y' = -2p\frac{n}{m};$$

donc

$$xx' = yy' = 4p^2;$$

3° $$\frac{m}{OB} + \frac{n}{OB'} = \frac{n^2 + m^2}{2p} = \frac{1}{2p},$$

d'ailleurs $\frac{m}{OB}$ est la sous-corde de OB et $\frac{n}{OB'}$ celle de OB';

4° Le coefficient angulaire de BB' est $\frac{mn}{m^2 - n^2}$ et l'on trouve que l'abscisse du point d'intersection I'' est $2p$.

LXVIII. En général, si par un point A de la parabole on mène deux cordes AB, AB' faisant entre elles un angle droit : 1° la corde BB' coupe en un point fixe I la normale à la courbe passant par le point A(*); 2° la longueur interceptée sur cette normale, à partir de A, par BB' est le double de la longueur interceptée par l'axe; 3° le paramètre p est une moyenne proportionnelle entre les distances à l'axe des points milieux de deux cordes quelconques à angle droit.

Soient x', y' les coordonnées du point A, et n et m les paramètres de direction de AB; considérons un second système d'axes rectangulaires de coordonnées AX et AY; les formules de transformation sont

$$\frac{x - (x' + mX)}{n} = \frac{y - (y' + nX)}{-m} = Y \quad \text{avec} \quad y'^2 = 2px';$$

l'équation de la parabole devient

$$(nX - mY)^2 + 2X(ny' - pm) - 2Y(my' + pn) = 0;$$

celle de la corde BB' est

$$\frac{m^2 y}{my' + pn} + \frac{n^2 x}{pm - ny'} = 2;$$

d'ailleurs, la normale en A a pour équation

$$\frac{y}{my' + pn} = \frac{x}{pm - ny'};$$

(*) Cette propriété existe pour toutes les courbes du second degré. Lorsque le point A se déplace sur la conique, le point I décrit également une conique.

donc les coordonnées du point I sont

$$x_1 = 2(my' - pm) \quad \text{et} \quad y_1 = 2(my' + pn) \quad \text{et} \quad AI = 2\sqrt{y'^2 + p^2},$$

quantité indépendante de la direction de AB et double de la longueur interceptée par l'axe. Le point milieu d'une corde AB a pour ordonnée $y_1 = \frac{pn}{m}$ et celui de la corde perpendiculaire, $y_2 = \frac{-pm}{n}$; donc $y_1 y_2 = -p^2$.

LXIX. Si deux cordes AB, AB′ sont des antiparallèles, 1° la corde BB′ est l'antiparallèle de la tangente en A ; 2° les points A, B, B′ sont sur une même circonférence qui touche la parabole en A (Voir XXV et XXVI).

LXX. Si, par chacun des points de la parabole, on mène deux cordes à angle droit et la normale à la parabole, le lieu du point d'intersection de la normale avec la corde qui passe par les extrémités des deux cordes (LXVIII) est une parabole identique à la première ; seulement le sommet est reculé sur l'axe d'une longueur égale à $2p$.

On a les relations

$$\frac{x_1 - x'}{p} = \frac{y_1 - y'}{-y'} = \frac{AI \text{ ou } 2\sqrt{y'^2 + p^2}}{\sqrt{p^2 + y'^2}} = 2;$$

donc $x_1 = x' + 2p$ et $y_1 = -y'$, donc $y^2 = 2p(x_1 - 2p)$.

LXXI. Soit BB′ une corde perpendiculaire à l'axe et vue du point A sous un angle droit : 1° la distance du point A à BB′ égale $2p$; 2° le sommet O de la parabole divise en deux parties égales la partie PP′ de l'axe interceptée par les cordes AB et AB′ ; 3° Si I′ est le point d'intersection de l'axe avec BB′, l'on a la relation $\overline{I'A}^2 = I'P.I'Q$.

Soient x', y' les coordonnées de A et X, Y celles de B : 1° on a la relation

$$(x' - X)^2 + y'^2 = Y^2 \quad \text{ou bien} \quad (x' - X)^2 = 2p(X - x');$$

donc, $X - x' = 2p$;

2° $$I'P + I'Q = 2pY\left(\frac{1}{BS} + \frac{1}{B'S}\right) = \frac{Y^2}{2p} = 2OI' ;$$

3° I′A est perpendiculaire sur OA et PAQ est droit.

LXXII. Les cordes normales menées par les points de la parabole dont l'abscisse est p sont les cordes normales minima.

Pour la corde normale en A (x', y'), on a la relation

$$\frac{x - x'}{p} = \frac{y - y'}{-y'} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + y'^2}} ;$$

et si le point (x, y) est sur la courbe, on trouve que la longueur totale N de la corde normale en A est

$$N = \frac{2(p^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'^2},$$

et l'on a la valeur minimum pour $y' = \pm p\sqrt{2}$ et $x' = p$.

LXXIII. Le rayon de courbure R en un point A de la parabole est une quatrième proportionnelle au paramètre p, à la corde normale N en A et à l'abscisse x' du point A; le rayon de courbure au point A est égal à la corde normale quand celle-ci est une des cordes normales *minima*.

Soit N_1 la partie de la normale interceptée par l'axe, on a $N_1 = (p^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$, donc $N = \frac{2N_1^3}{y'^2} = \frac{N_1^3}{px'}$; d'ailleurs $R = \frac{N_1^3}{p^2}$ (th. XXXV, 4°); donc enfin $R = \frac{Nx'}{p}$ et, si $x' = p$, $R = N$.

LXXIV. Si une corde AB normale en A est vue du foyer sous un angle droit, on a la relation FB : FA = 2 : 1; et si elle est vue du sommet sous un angle droit, on a les relations FB : FA = 3 : 1 et $\overline{OB}^2 : \overline{OA}^2 = 8 : 1$; dans le premier cas, l'abscisse du point A est $2p$ et le rayon de courbure en A est le double de la corde normale en A; dans le second cas, l'abscisse du point A est p et le rayon de courbure en A est égal à la corde normale menée en ce point (*).

Soient x'', y'' les coordonnées du point B; on a les relations

$$\frac{y'y''}{\left(x' - \frac{p}{2}\right)\left(x'' - \frac{p}{2}\right)} = -1, \quad \frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{y'}{p}, \quad y'^2 = 2px', \quad y''^2 = 2px'';$$

en éliminant y' et y'', il vient

$$x'' + \frac{p}{2} = 2\left(x' + \frac{p}{2}\right), \quad FB = 2FA \text{ ou } r' = 2r;$$

or

$$\left(r + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(r - \frac{p}{2}\right)\left(r' - \frac{p}{2}\right) \text{(th. LIX)};$$

donc

$$r = \frac{5p}{2} \quad \text{et} \quad x' = r - \frac{p}{2} = 2p;$$

enfin

$$R = \frac{Nx'}{p} = 2N. \text{ (Th. LXXIII).}$$

(*) Voir *Journal de Vuibert*, année 1882, p. 109.

Si $AOB = \frac{1}{2}\pi$, $x'x'' = 4p^2$ et $y'y'' = -4p^2$ (th. LXVII, 2°);

d'aillleurs $x' = 2p - p = p$ (th. LXVII, 4°, et la sous-normale $= p$) donc $y' = p\sqrt{2}$; $x'' = 4p$, $y'' = -2p\sqrt{2}$; donc

$$FA = x' + \frac{p}{2} = \frac{3p}{2}, \quad FB = x'' + \frac{p}{2} = \frac{9p}{2} \text{ et } FB = 3FA;$$

enfin $$\overline{OA}^2 = 3p^2, \quad \overline{OB}^2 = 24p^2 \text{ et } R = \frac{N\alpha'}{p} = N.$$

BIBLIOGRAPHIE.

1600 questions mathématiques posées aux examens d'admission aux Écoles spéciales (École militaire, école normale des sciences, école polytechnique de Bruxelles, école du génie civil de Gand, école des mines et des arts et manufactures de Liége, école de médecine vétérinaire), *avec la résolution des Questions des concours de première et de seconde scientifiques* de 1852 à 1887, par Éd. Verhelst, Doct. math., professeur de mathématiques supérieures à l'athénée royal de Bruxelles. Bruxelles, Castaigne, 1888. Un volume in-12, cartonné à l'anglaise, de IV-104-143 pages. Prix : 3 francs.

Les publications périodiques françaises, dit l'auteur dans sa préface, ont fait le relevé des questions posées en France dans les concours et aux examens d'entrée des écoles spéciales; mais un recueil analogue pour la Belgique n'a pas encore été publié. Cependant il présente une incontestable utilité, parce qu'il donne aux élèves une idée exacte de la difficulté des épreuves qu'ils peuvent être appelés à subir, et qu'il peut servir de guide aux jeunes professeurs qui doivent les y préparer. Le petit livre de M. Verhelst comble donc une lacune.

La première partie contient la *solution* esquissée ou développée des questions posées dans les concours de la première et de la seconde scientifique depuis trente cinq ans (104 pages). Ces questions se classent de la manière suivante : Algèbre (16 + 6); géométrie (23 + 6); trigonométrie (17 + 4); géométrie analytique (36; 41 pages); géométrie descriptive (3). Les questions de géométrie analytique sont traitées par les méthodes les plus générales, de manière à mettre rapidement l'étudiant studieux à même de résoudre ce genre d'exercices. L'auteur a laissé de côté les questions de concours dont la solution se rencontre dans la plupart des livres classiques.

La seconde partie contient les *énoncés* de 1600 à 1700 questions posées aux examens écrits ou aux examens oraux des écoles spéciales belges (143 pages). La moitié environ de cette seconde partie est consacrée aux questions posées aux examens d'admission à l'école militaire de Bruxelles; la seconde moitié est partagée inégalement entre l'école normale des sciences (10 pages), l'école polytechnique de Bruxelles (6 pages), l'école du génie civil de Gand (10 pages); l'école des

mines de Liége (6 pages), l'école des arts et manufactures de Liége (1 page) et l'école de médecine vétérinaire de Cureghem (26 pages).

Nous ne doutons pas que le livre de M. Vereelst ne soit appelé à un prompt succès en Belgique, non seulement comme guide pour la préparation aux examens d'entrée des écoles spéciales belges, mais aussi comme recueil de solutions de questions choisies de concours. Ces solutions, en effet, sont simples et vraiment à la portée des élèves, car elles ont leur point de départ dans les théories classiques connues de tous les élèves studieux. Nous signalons spécialement comme discussions intéressantes celle de la question 11 d'algèbre posée en première scientifique, en 1868; en géométrie, la question 4, posée en seconde latine, en 1885; en géométrie analytique, les questions 8, 13, 19, 23, 32, 33 et 35.

NOTES MATHÉMATIQUES.

*3. *Sur trois triangles perspectifs.* Le théorème que nous avons signalé dans le tome VII, p. 245, de *Mathesis* se confond avec son corrélatif démontré par M. Laurens (t. VIII, p. 17). Cette identité ressort de l'énoncé suivant de notre théorème, qui en comprend également les réciproques :

A un triangle T, *on inscrit le triangle* T′ *et on circonscrit le triangle* T″. *Si deux des triangles* T, T′, T″ *sont perspectifs avec le troisième, ils sont perspectifs entre eux.*

M. Laurens fait intervenir les axes d'homologie, tandis que nous avions employé les centres d'homologie.

Voici une proposition analogue pour l'espace : *Un tétraèdre* T *est inscrit à un autre* T′ *et circonscrit à un troisième* T″. *Si l'un des trois tétraèdres* T, T′, T″ *est perspectif avec chacun des deux autres, ces derniers sont hyperboloïdiques.* (J. N.)

*4. *Sur le maximum de* $x^m y^n z^p$, *quand* $x+y+z=$ *constante.* M. Desboves, dans son excellent ouvrage intitulé : *Questions d'Algèbre élémentaire, méthodes et solutions* (3me édition, 1887, Paris, Delagrave), énonce comme il suit une remarque identique à celle de M. Haton de la Goupillière (*Mathesis*, p. 12) : « On fait ici l'application du théorème I (Théorème général, *Mathesis*, p. 10-11) dans un cas où les variables satisfont à d'autres conditions que celles d'avoir une somme constante, puisque il y a m variables égales à $\frac{x}{m}$, n égales à $\frac{y}{n}$, et p égales à $\frac{z}{p}$.

Mais comme ces relations n'empêchent pas que l'égalité de toutes les variables puisse avoir lieu, le maximum particulier est le même que le maximum général. » (Communiqué par M. Even).

5. *Note sur l'article « une trisectrice remarquable »* (*Mathesis*, t. VIII, p. 5). Voici comment la déduction dont il est question à la page 10, lignes 2 et 3, s'établit très simplement. Soit (fig. 1) H le point où la perpendiculaire élevée en O à OJ coupe la normale en J. On a OH = JF = 3DJ. Donc

$$\frac{OH}{OJ} = \frac{3DJ}{OJ} = \frac{3JI}{DJ} = \frac{JI}{\frac{1}{3}DJ} = \frac{JI}{K'J}.$$

Par suite, les triangles IJK′ et HOJ sont semblables, et comme les côtés homologues IJ et OH, d'une part, K′J et OJ, de l'autre, sont perpendiculaires, il en est de même des troisièmes côtés K′I et JH. C. Q. F. D.

La méthode par laquelle j'ai obtenu la relation entre les rayons de courbure des polaires réciproques (*Mathesis*, t. VIII, p. 8) a été publiée dans les *Annales de l'École normale supérieure* (1887, p. 313), avec généralisation pour le cas où la directrice de la transformation est une conique à centre quelconque, et extension aussi à la transformation parabolique. (D'Ocagne.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 325.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 94 et t. VII, p. 185).

On donne une courbe C *et un point fixe* O. *La circonférence décrite de* O *comme centre et passant par un point* M *de* C *rencontre la tangente et la normale menées en* M, *aux points* T *et* N. *Construire les tangentes aux lieux décrits par* T *et* N. (J. Neuberg.)

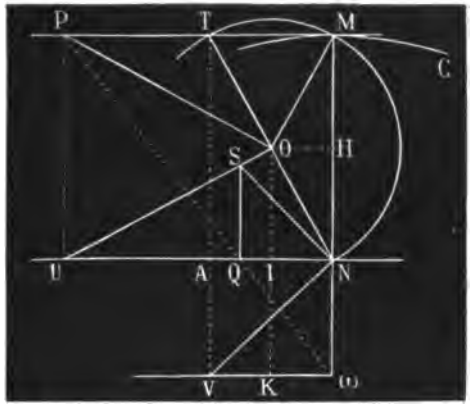
Seconde solution, par MM. Mineur *et* d'Ocagne. Les points N et T étant symétriques par rapport à O, il suffit de construire la normale en N(*).

Du point O abaissons sur MN la perpendiculaire OH. Le lieu du point

---

(*) La figure est celle qui a accompagné la solution précédente.

H est la podaire de la développée de la courbe C pour le pôle O. La normale à la courbe (H) passe donc par le pied K de la perpendiculaire abaissée de O sur la normale ωK à la développée. On est maintenant ramené au problème suivant : *Une droite* MH *s'appuie par ses extrémités* M, H *sur deux courbes fixes et roule sur une troisième courbe donnée; trouver la normale à la trajectoire du point* N *qui divise* MH *dans un rapport donné* (2:1). D'après la solution connue(*), la normale à la courbe (N) coupe ωK en un point V symétrique de ω par rapport à K; ce point V est aussi la projection de T sur NK.



Question 423.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 94.)

D'une parabole variable, on donne la tangente AY *au sommet* A *et un point* M. *Chercher le lieu du foyer* F *et le lieu du centre* C *du cercle osculateur en* M. (Farisano.)

Solutions par MM. S. B. (*Reims*), Mosnat (*Toulon*), Verniory (*Seraing*), Déprez (*Dinant*) *et* Boedt.

1° Soient AX l'axe de la parabole, MP l'ordonnée de M, F le foyer, MT et MN la tangente et la normale terminées à l'axe. On sait que AT = AP, FT = FM; donc le lieu de F est une parabole ayant M pour foyer et AY pour tangente au sommet.

2° D'après un théorème connu(**), le rayon MC du cercle osculateur

(*) Voir Mannheim, *Cours de géométrie descriptive.*

(**) Voir, par exemple, *Mathesis*, t. V, p. 178. M. S. B. donne, dans sa solution, une démonstration géométrique de ce théorème; nous regrettons que le défaut d'espace ne nous permette pas de la reproduire.

est égal à la normale divisée par le carré du cosinus de l'angle que la normale fait avec l'axe. Si l'on prend pour axe des x la perpendiculaire Mx à AY, pour axe des y la parallèle My à AY, et que l'on désigne par ρ la distance de M à AY, par θ l'angle CMx, on a

$$MC \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{MN}{\cos^2\theta} = \frac{MT\cot\theta}{\cos^2\theta} = \frac{TP\cot\theta}{\cos^2\theta.\sin\theta} = \frac{2a}{\cos\theta\sin^2\theta}.$$

Telle est l'équation du lieu de C en coordonnées polaires.

En coordonnées rectangulaires, on a

$$xy^2 = 2a(x^2+y^2), \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{2ax^2}{x-2a}.$$

Le point M est un point isolé. La courbe se compose de deux branches séparées, symétriques par rapport à Mx et asymptotes à une parallèle à My ($x = 2a$).

Remarques. I. y^2 étant infini pour $x = 2a$ et pour $x = \infty$, admet un minimum. Comme on a

$$y = \sqrt{2a}\,x\,(x-2a)^{-\frac{1}{2}}, \quad y' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a}\,(x-2a)^{-\frac{3}{2}}(x-4a),$$

le minimum de y^2 correspond à $x = 4a$. (S. B., Boedt et Mosnat.)

II. On trouve aisément

$$y'' = \tfrac{1}{4}\sqrt{2a}\,(x-2a)^{-\frac{5}{2}}(8a-x).$$

Donc un point d'inflexion correspond, sur chacune des deux branches, à

$$x = 8a, \quad y = \frac{8a}{\sqrt{3}}, \quad y' = \frac{1}{3\sqrt{3}}. \qquad \text{(S. B.)}$$

III. L'équation de la courbe étant mise sous la forme

$$y^2 = 2ax + 4a^2 + \frac{8a^3}{x-2a},$$

on voit que la parabole représentée par $y^2 = 2ax$ est asymptote à la cubique. (S. B.)

IV. On a $\overline{MP}^2 = TP.PN = 2x.PN$. Or PN et MP sont les coordonnées de N par rapport aux axes Mx, My; donc N décrit une parabole dont M est le sommet et My la tangente au sommet.

Soit MK la corde d'osculation au point M. On a MK = 4MT (*Mathesis*, t. V, p. 176); par conséquent, la projection de MK sur Mx est égale à

$8a$, et le lieu de K est une perpendiculaire à Mx. La perpendiculaire au milieu de MK enveloppe une parabole ayant pour foyer le point M. Les points de rencontre des cercles osculateurs avec l'axe de la parabole décrivent une cubique. (VERNIORY.)

Solution analytique par MM. DÉPREZ, BOEDT *et* POILVACHE. 1° Prenons pour axes une perpendiculaire et une parallèle à AY menées par le point M. L'équation de la parabole variable est

$$(y-b)^2 = 2p(x-a), \qquad (1)$$

avec la condition $b^2 = -2pa$. Les coordonnées du foyer étant visiblement $y=b$, $x=a-\frac{1}{2}p$, l'équation du lieu de ce point est $y^2=4a(x-a)$.

2° Les coordonnées (α, β) du centre de courbure au point (x, y) d'une courbe vérifient les équations

$$x-\alpha+(y-\beta)y'=0, \quad 1+y'^2+(y-\beta)y''=0. \qquad (2)$$

Les valeurs de (x, y) sont, dans la question actuelle, (0, 0) et de l'équation (1) on tire

$$y'=\frac{p}{y-b}=-\frac{p}{b}, \quad y''=-\frac{p^2}{(y-b)^3}=\frac{p^2}{b^3}.$$

On a donc, au lieu des équations (1) et (2),

$$b^2=-2pa, \quad \alpha-\frac{p}{b}\beta=0, \quad 1+\frac{p^2}{b^2}-\frac{p^2\beta}{b^3}=0.$$

L'élimination de p et b donne pour le lieu demandé, savoir :

$$2a(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta^2=0.$$

***Question 472(*).**

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 215.)

On donne trois points A, B, C. *Deux circonférences variables dont l'une passe par* A *et* B, *l'autre par* A *et* C *se coupent sous un angle donné* φ. *Trouver* 1° *le lieu du second point d'intersection des deux circonférences*; 2° *le lieu du point de rencontre des tangentes menées par* B *et* C; 3° *l'enveloppe de la ligne des centres.* (GOB.)

(*) La première et la seconde partie de la solution, et les deux premières remarques sont *élémentaires*. Dans la figure, on suppose le point M à l'intérieur du triangle ABC, T intérieur à l'angle BAC.

Solution par MM. Jeřábek, Farisano, Meurice *et* Verniory. Soient β, γ les centres des deux circonférences, M le second point d'intersection, T le point d'intersection des tangentes en B et C.

×1° Par hypothèse, l'angle $\beta M\gamma$ est constant. Or *angle* $M\beta\gamma = MBA$, *angle* $M\gamma\beta = ACM$; d'où l'on conclut que dans le quadrilatère ABMC, un angle A et la somme des deux autres sont constants. Le lieu de M est donc une circonférence passant par B et C.

×2° L'angle $MBT = MAB$, $MCT = MAC$; d'où $MBT + MCT = BAC$, et l'angle BTC est constant. Le lieu de T est encore une circonférence passant par B et C.

3° La droite $\beta\gamma$ est perpendiculaire au milieu I de AM. Ce point I décrit une circonférence; donc l'enveloppe de $\beta\gamma$ est une antipodaire de cette circonférence par rapport à l'un de ces points, c'est donc une conique dont A est un foyer(*).

Remarques (dues à M. Meurice). I. On a

$$\text{angle } BMC = BAC + ABM + ACM = A + \pi - \varphi.$$

Donc, si $\varphi = A$, le lieu de M est la droite BC.

II. De la relation

$$\begin{aligned}\text{angle } BTC &= 2\pi - BMC - (MBT + MCT)\\ &= 2\pi - (A + \pi - \varphi) - A = \pi - 2A + \varphi,\end{aligned}$$

on conclut que le point T décrit la droite BC, lorsque $\varphi = 2A$, ou plutôt on voit que, dans cette hypothèse, deux circonférences passant par A touchent BC, l'une en B, l'autre en C.

III. Lorsque $\varphi = A$, l'enveloppe de $\beta\gamma$ est une parabole.

Solution analytique par M. Déprez. 1° Prenons pour axes AB et AC, et posons $AB = 2b$, $AC = 2c$. Les équations des circonférences variables β, γ seront

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2bx - 2\lambda y = 0, \qquad (1)$$

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2\mu x - 2cy = 0, \qquad (2)$$

λ et μ étant des paramètres variables. Les coefficients angulaires des tangentes en un point (x, y) sont

$$-\frac{x + y\cos\theta - b}{x\cos\theta + y - \lambda}, \qquad -\frac{x + y\cos\theta - \mu}{x\cos\theta + y - c};$$

(*) *Autrement.* La droite $\beta\gamma$ est vue de A sous un angle constant et ses extrémités se déplacent sur deux droites fixes. (Jeřábek.)

si ce point est l'origine des coordonnées, ces valeurs se réduisent à $-\frac{b}{\lambda}$, $-\frac{\mu}{c}$. Donc la condition que l'angle des deux cercles est constant s'exprime par

$$c\lambda + b\mu - (bc + \mu\lambda)\cos\theta = (bc - \mu\lambda)\sin\theta\cot\varphi. \qquad (3)$$

Si l'on élimine λ et μ entre (1), (2), (3), il vient (S désignant $x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta$) :

$$2cx(S - 2bx) + 2by(S - 2cy) - \{8bcxy + S^2 - 2S(cy + bx)\}\cos\theta = \{-S^2 + 2S(cy + bx)\}\sin\theta\cot\varphi.$$

En écartant le facteur S, on trouve l'équation d'une circonférence.

2° La tangente au point (x, y) de la circonférence (1) a pour équation

$$X(x + y\cos\theta - b) + Y(x\cos\theta + y - \lambda) - (bx + \lambda y) = 0.$$

Si B est le point de contact, on a pour cette équation

$$bx + (2b\cos\theta - \lambda)y - 2b^2 = 0. \qquad (4)$$

De même la tangente menée en C à la circonférence (2) est représentée par

$$(2c\cos\theta - \mu)x + cy - 2c^2 = 0. \qquad (5)$$

Tirons λ et μ de (4) et (5) et portons les valeurs dans l'égalité (3), etc.(*).

Question 503.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 23.)

Si le quart de $n^3 - 1$ est un nombre entier, décomposable en une somme de deux triangulaires, de rang p et q, l'un, au moins, des nombres $2p + 1$ et $2q + 1$, est composé, sauf si $n = 5$(**). (E. Cesàro.)

Solution par M. Fauquembergue (*Mont-de-Marsan*). Il s'agit de démontrer que l'équation

$$\frac{n^3 - 1}{4} = \frac{p(p+1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2},$$

ou

$$2n^3 = (2p + 1)^2 + (2q + 1)^2, \qquad (A)$$

(*) M. Dépaux résout le 3e cas comme M. Jeřábek, etc.

(**) Énoncé corrigé.

est impossible si $2p+1$ et $2q+1$ sont des nombres premiers absolus, sauf si $n=5$.

Or, tout diviseur d'une somme de deux carrés, premiers entre eux, étant aussi une somme de deux carrés premiers entre eux, on résoudra complètement l'équation (A) en posant

$$n = r^2 + s^2,$$

r et s étant des nombres premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair. Il en résultera

$$n^5 = R^2 + S^2, \quad 2n^5 = (R+S)^2 + (R-S)^2,$$

où

$$R = r^5 - 10r^3s^2 + 5rs^4, \quad S = 5r^4s - 10r^2s^3 + s^5.$$

Donc

$$\pm(2p+1) = R+S = (r+s)[r+s)^4 - 5(2rs)^2],$$
$$\pm(2q+1) = R-S = (r-s)[(r-s)^4 - 5(2rs)^2].$$

Si les facteurs des seconds membres sont différents de l'unité, les nombres $2p+1$ et $2q+1$ seront composés l'un et l'autre.

Si l'un des facteurs est l'unité, $2p+1$ et $2q+1$ ne peuvent être simultanément premiers, sauf si $n=5$. En effet, il faudrait pour cela que l'on eût

$$r-s=1, \quad (r+s)^4 - 5(2rs) = \pm 1.$$

Or, en éliminant r entre ces deux relations et posant $u = 2s+1$, on trouve

$$u^4 - 10u^2 + 5 \pm 4 = 0, \quad u^2 = 5 \pm \sqrt{20 \mp 4}.$$

Le signe + sous le radical, donnant pour u un nombre incommensurable est à rejeter et il reste $u^2 = 5 \pm 4$, c'est-à-dire $u=3$, ou $u=1$. Il en résulte

$$s=1, \quad r=2, \quad 2p+1=3, \quad 2q+1=79, \quad n=5;$$

ou

$$s=0, \quad r=1, \quad 2p+1=1, \quad 2q+1=1, \quad n=1,$$

solution insignifiante. Le théorème est donc démontré.

×Question 578.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 170.)

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ***les angles sous lesquels on voit les diagonales d'un cube, l'œil étant placé en un point quelconque de la sphère inscrite au cube. Démontrer que***

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{tg}^2\delta = 8(*). \qquad \text{(Clarke.)}$$

Solution par MM. Gerondal (Thuin), Meurice, Emmerich *et* Breyens (Cadix.) Rapportons la figure à trois axes menés par le centre O du cube parallèlement aux arêtes de ce solide. Les coordonnées des extrémités des diagonales AA′, BB′, CC′, DD′ du cube sont de la forme

$$A(a, a, a),\ A'(-a, -a, -a);\quad B(-a, a, a),\ B'(a, -a, -a),\ \text{etc.}$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de l'espace et $MO = d$, sa distance à l'origine. On a

$$\overline{AA'}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MA'}^2 - 2MA \cdot MA' \cos\alpha,$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{\overline{MA}^2 + \overline{MA'}^2 - \overline{AA'}^2}{2MA \cdot MA'}.$$

Or

$$\overline{MA}^2 = (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = d^2 + 3a^2 - 2a(x+y+z)$$
$$MA'^2 = d^2 + 3a^2 + 2a(x+y+z),\quad \overline{AA'}^2 = 12a^2;$$

par conséquent

$$\cos\alpha = \frac{d^2 - 3a^2}{\sqrt{(d^2+3a^2)^2 - 4a^2(x+y+z)^2}},$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{12d^2a^2 - 4a^2(x+y+z)^2}{(d^2-3a^2)^2}.$$

Semblablement

$$\operatorname{tg}^2\beta = \frac{12d^2a^2 - 4a^2(-x+y+z)}{(d^2-3a^2)^2},\quad \text{etc.};$$

(*) Comparer pour la question analogue de géométrie plane, *Mathesis*, t. VI, p. 118. Il serait intéressant d'examiner si les autres polyèdres réguliers donnent lieu à des relations analogues à celle de M. Clarke et à celles de M. Gerondal, données plus bas.

d'où

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{tg}^2\delta = \frac{32d^2a^2}{(d^2-3a^2)^2}.$$

Donc la somme $S\operatorname{tg}^2\alpha$ ne dépend que du rapport (OM : OA). Si M est un point de la sphère inscrite au cube, on a $d = a$, et $S\operatorname{tg}^2\alpha = 8$.

Remarque (due à M. Gerondal). Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ les angles MOA, MOB, MOC, MOD. Les cosinus des angles des droites OM, OA, OB, etc., avec les axes des coordonnées sont

$$\frac{x}{OM}, \frac{y}{OM}, \frac{z}{OM}; \frac{a}{OA}, \frac{a}{OA}, \frac{a}{OA}; \frac{-a}{OA}, \frac{a}{OA}, \frac{a}{OA}; \text{ etc.};$$

d'où

$$\cos\alpha_1 = \frac{ax+ay+az}{ad\sqrt{3}}, \quad \cos\beta_1 = \frac{-ax+ay+az}{ad\sqrt{3}}, \quad \text{etc.},$$

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 + \cos^2\delta_1 = \frac{4a^2(x^2+y^2+z^2)}{3a^2d^2} = \frac{4}{3},$$

$$\sin^2\alpha_1 + \sin^2\beta_1 + \sin^2\gamma_1 + \sin^2\delta_1 = \frac{8}{3}.$$

---

*Question 588.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 240.)

Résoudre le système d'équations

$$x^2 - yz - zu - uy = a, \quad y^2 - zu - ux - xz = b,$$
$$z^2 - ux - xy - yu = c, \quad u^2 - xy - yz - zx = d.$$

(Dawson.)

Solution par M. J. Déprez et I. Beyens. Retranchant successivement de la première équation les trois autres, on trouve

$$(x-y)(x+y+z+u) = a-b, \text{ etc.}$$

Ajoutons ensemble ces nouvelles égalités, il vient

$$[4x - (x+y+z+u)][x+y+z+u] = 3a-b-c-d.$$

Donc si l'on fait $x+y+z+u = \lambda$, $a+b+c+d = t$, on a

$$x = \frac{\lambda}{4} + \frac{4a-t}{4\lambda}, \quad y = \frac{\lambda}{4} + \frac{4b-t}{4\lambda}, \quad \text{etc.} \qquad (1)$$

Substituant ces valeurs dans la première équation proposée, nous aurons

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 Sa + 2Sbc - 3Sa^2 = 0,$$

$$\lambda^2 = -Sa \pm 2\sqrt{Sa^2}.$$

Il reste à porter la valeur de λ dans les formules (1).

Autre solution par M. Emmerich. M. Mosnat pose

$$\mu = xy + xz + xu + yz + yu + zu.$$

Alors les équations données deviennent

$$\lambda x - \mu = a, \quad \lambda y - \mu = b, \quad \lambda z - \mu = c, \quad \lambda u - \mu = d.$$

En en faisant la somme et la somme de leurs carrés, on trouve $\lambda^2 - 4\mu$, et $\lambda^2 - 2\mu$, puis, aisément x, y, z, u.

QUESTIONS D'EXAMEN.

357. Un tronc de cône étant coupé par un plan parallèle aux bases, si R, R′, R″ sont les rayons des bases et de la section, on a entre les surfaces latérales S, s, s' et les volumes V, v, v' du tronc donné et des deux troncs partiels les relations

$$R''^2 S = R^2 s' + R'^2 s, \quad R''^3 V = R^3 v' + R'^3 v.$$

358. Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = a, \\ x^2y^2 + x^2y^2 = b. \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-z)^2 - y(x-y) = a^2, \\ z(x+2y) = a^2, \\ x(y+z) = a^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y + x^2yz + x^2 = 76, \\ xy^2 + zy^2 + y^2 = 171, \\ yz^2 + xyz^2 + z^2 = 304. \end{cases}$$

359. Lorsque $a + b + c = 0$, on a aussi

$$6(a^5 + b^5 + c^5) = 5(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2).$$

360. Soit ABCD... un polygone inscrit à une circonférence, et soit A′B′C′D′... le polygone formé par les tangentes en A, B, C, ... Démontrer que le produit des distances d'un point quelconque de la circonférence aux côtés du premier polygone est égal au produit des distances de ce point aux côtés du second polygone. (Cailler.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

95. (*Mathesis* I, p. 206), trouver l'équation des lignes de courbure d'une surface du second degré ayant pour équation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0.$$

120. (*Mathesis*, II, p. 71). Déterminer la constante A de manière que l'intégrale

$$\int \frac{x^2(x^4 + A)}{2x^4 - Ax^2 - A^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$$

s'exprime au moyen des fonctions élémentaires. (S. Realis.)

×**607.** Si $A + B + C = \pi$, démontrer que l'on a (*)

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 3\cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C + \cos\tfrac{3}{2}A \cos\tfrac{3}{2}B \cos\tfrac{3}{2}C,$$
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1 = 3\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C - \sin\tfrac{3}{2}A \sin\tfrac{3}{2}B \sin\tfrac{3}{2}C;$$
$$\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C = \tfrac{3}{2} + 2\cos A \cos B \cos C + \tfrac{1}{2}\cos 2A \cos 2B \cos 2C,$$
$$\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C = \tfrac{1}{2} - 2\cos A \cos B \cos C + \tfrac{1}{2}\cos 2A \cos 2B \cos 2C.$$

(E. Gelin.)

×**608.** Si un quadrilatère ABCD est à la fois inscriptible dans un cercle de rayon r et circonscriptible à un cercle de rayon R, la somme des distances du centre du second cercle aux quatre côtés est égale à $\frac{mn}{r} = r + \sqrt{r^2 + 4R^2}$, m et n désignant les diagonales. (Déprez.)

609. Soit GH une corde quelconque d'une ellipse, parallèle au demi-diamètre OC. Les circonférences décrites des points G et H comme centres, avec un rayon égal à OC, se coupent en deux points R, R'. Démontrer que le lieu des points R, R' se compose de deux diamètres symétriques par rapport à un axe de l'ellipse. (E. Catalan.)

(*) La première des formules se rencontre déjà dans *Mathesis*, t. V, p. 24, mais avec une faute d'impression. M. E. Gelin nous communique les formules analogues pour $\sin^m A + \sin^m B + \sin^m C$, $\cos^m A + \cos^m B + \cos^m C$. Nous engageons les lecteurs de *Mathesis* à les chercher. (*Réd.*)

SUR L'HYPERBOLE Γ′, INVERSE DE LA DROITE D'EULER(*).

1. Soient A′, B′, C′ les milieux des côtés du triangle scalène ABC, O le centre du cercle circonscrit, $A_1B_1C_1$ le triangle que forment les tangentes à ce cercle menées par les sommets A, B, C. Considérons la série des triangles $\alpha\beta\gamma$ homothétiques à $A_1B_1C_1$ par rapport à O. Les points α, β, γ marquent sur les médiatrices OA′, OB′, OC′, trois ponctuelles projectives semblables P_a, P_b, P_c; donc les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ se correspondent dans trois faisceaux projectifs F_a, F_b, F_c, de sommets A, B, C.

Le point d'intersection M des droites $A\alpha$, $B\beta$ engendre une conique Γ′ passant par les centres A, B des faisceaux F_a, F_b. Cette courbe passe aussi par C; car, si Q est le point de rencontre de OA′ avec AC, Q′ celui de OB′ avec BC, le quadrilatère A′B′QQ′ est inscriptible, d'où l'on déduit facilement que QQ′ est parallèle à A_1B_1. Elle passe également par les points O, K, H (point de Lemoine et orthocentre de ABC): ces points correspondent respectivement au triangle $\alpha\beta\gamma$ réduit au point O, ou confondu avec $A_1B_1C_1$, ou transporté à l'infini. L'intersection des droites $A\alpha$, $C\gamma$ engendre, visiblement, la même courbe. Celle-ci est une hyperbole équilatère, puisqu'elle contient l'orthocentre H.

2. Soit M′ l'inverse de M. Les droites AM′, BM′, CM′, symétriques des droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ par rapport aux bissectrices des angles de ABC, sont des rayons homologues de trois faisceaux projectifs F'_a, F'_b, F'_c. Ces faisceaux sont même perspectifs; car les droites AC et BC, par exemple, se correspondent dans les faisceaux F_a, F_b et ont le même rayon homologue AB dans les faisceaux F'_a, F'_b. Les points O,H de Γ′ ayant pour inverses les points H, O, le point M′ décrit la droite d'Euler OGH.

3. La droite HO rencontre la circonférence ABC en deux points w, w', dont les inverses sont à l'infini. Donc les asymptotes de Γ′ sont parallèles aux isogonales des droites Aw, Aw'(**).

(*) Les n^{os} 1-4 nous ont été communiqués en décembre 1884, par M. Jerábek, à l'occasion de la question 380. Les n^{os} 5, 6, 7 nous ont été suggérés par le mémoire de M. M'Cay sur l'hyperbole de Kiepert. Sur la figure, il y a O^4, C^1, au lieu de O_4, C_1. Cette figure ne contient pas toutes les lignes de construction dont il est parlé dans l'article. Ainsi, les triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, n'y sont pas marqués.

(**) Si $w'v$ est une corde parallèle à AC, Bv donne la direction d'une asymptote. On obtient, par un procédé analogue, les isogonales des droites AQ_a, BQ_b, CQ_c. (J. N.)

Soient Q_a, Q_b, Q_c les points d'intersection de la droite HO avec les côtés de ABC. Lorsque le point M' mobile sur HO tend vers Q_a, les droites AM, BM, CM tendent à se confondre avec l'isogonale de AQ_a et avec les droites BA, CA. Donc les tangentes en A, B, C à Γ' sont les isogonales des droites AQ_a, BQ_b, CQ_c.

Soient $T_aT_bT_c$ le triangle formé par ces tangentes, T le point d'intersection des droites AT_a, BT_b, CT_c. L'axe d'homologie des triangles ABC, $T_aT_bT_c$ est la transversale inverse de la droite HO; et le point T, harmoniquement associé à cette transversale, en est le pôle trilinéaire.

Le point à l'infini s' sur la droite HO a pour inverse le quatrième point d'intersection de la circonférence ABC avec l'hyperbole Γ'; autrement dit, les isogonales des parallèles à HO menées par A, B, C, concourent en s. Les points inverses s, s' sont les foyers d'une conique inscrite à ABC. Cette courbe est évidemment une parabole ayant pour foyer s, et pour diamètres des parallèles à HO; la directrice est la perpendiculaire élevée en H sur HO; la tangente au sommet est la droite de Simson de s.

Le centre L de Γ' est au milieu de la droite Hs; car il doit se trouver sur la circonférence des neuf points de ABC, de sorte que le point de Γ' diamétralement opposé à H, appartient à la circonférence ABC(*) et, par suite, se confond avec s(**).

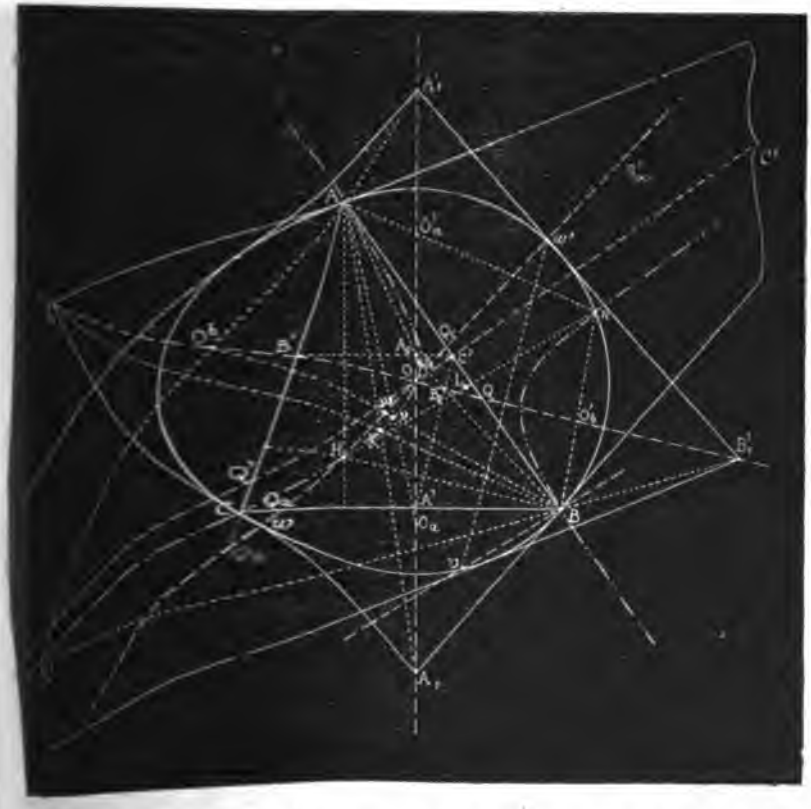
4. Le rapport anharmonique de quatre points α_1, α_2, α_3, α_4 de la ponctuelle P_a est égal à celui des rayons correspondants AM_1, AM_2, AM_3, AM_4 du faisceau F_a, et aussi à celui des points correspondants M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 de HO; si le premier rapport $= -1$, les autres ont la même valeur.

Soient, par exemple, O_a, O_b, O_c les centres des cercles circonscrits aux triangles BCO, CAO, ABO; ces points étant les milieux des droites OA_1, OB_1, OC_1 se correspondent dans les ponctuelles P_a, P_b, P_c. Donc les

(*) H est le centre de similitude externe des deux circonférences ABC, A'B'C'. Le centre de gravité G étant le centre de similitude interne, le centre de Γ' est le complémentaire du point F diamétralement opposé à s sur la circonférence ABC. Le point F, inverse du point à l'infini de la direction perpendiculaire à HO, est le foyer de la parabole inscrite à ABC qui a pour directrice HO. (J. N.)

(**) Des développements analogues s'appliquent aux transformées par points inverses ou par points réciproques d'une droite quelconque. Bien que ces détails ne soient pas nouveaux, nous avons cru utile de les indiquer ici. — M. Vermory nous a communiqué un mémoire intéressant dans lequel il parvient aux résultats qui précèdent. Nous donnerons plus tard quelques extraits de ce travail. (J. N.)

lignes AO_a, BO_b, CO_c *se coupent en un point* ν *de* Γ', *dont l'inverse* ν' *appartient à la droite* HO. Or les points O et A_1, O_a et le point à l'infini de OA_1 forment une division harmonique et correspondent sur HO aux points H, G (centre de gravité), ν' et O : d'où $\nu'H : \nu'G = -OH : OG = -3$, et ν' est le milieu de HO. Par conséquent, ν *est l'inverse du centre du cercle*



des neuf points. La question 380 (*Mathesis*, t. IV, p. 216, et t. VI, p. 164) est ainsi résolue.

La droite HO est divisée harmoniquement par son milieu ν' et le point à l'infini n'; donc O et le point à l'infini de P_a divisent harmoniquement la distance des points de P_a qui correspondent à ν' et n'. Ces points de P_a sont donc symétriques par rapport à O. Par conséquent,

Si A'_1, B'_1, C'_1 *sont les symétriques de* A_1, B_1, C_1 *par rapport à* O, *les*

droites joignant A, B, C *aux centres* O'_1, O'_2, O'_3 *des cercles* $OB'_1C'_1$, $OC'_2A'_2$, $OA'_3B'_3$ *concourent en un point n de la circonférence* ABC.

De même, *les droites* AA'_1, BB'_1, CC'_1 *concourent en un point* K' *dont l'inverse est le conjugué harmonique du centre de gravité* G *par rapport à* HO *ou le symétrique de* H *par rapport à* O.

5. Rangeons maintenant les points de P_a en couples (α_1, α_2) formant une involution. Les points correspondants M'_1, M'_2 de HO seront également conjugués dans une involution, et les points M_1, M_2 de Γ' marquent sur cette courbe une involution, de sorte que la corde M_1M_2 passe par un point fixe.

Soient, par exemple, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ deux triangles symétriques par rapport à O. Les points α_1, α_2 se correspondent dans une involution dont les points doublés sont O et le point à l'infini de P_a; par conséquent, les points M_1, M_2 marquent sur Γ' une involution dont les points doubles sont O et H. Il résulte de là que la droite M_1M_2 tourne autour du point d'intersection des tangentes menées par O et H à Γ'; ce point, d'après ce qu'on a vu au n° 4, est situé sur les droites $n\nu$ et KK'.

6. Les coordonnées normales absolues de Ô et H étant

$$R\cos A,\ R\cos B,\ R\cos C;\quad 2R\cos B\cos C,\ 2R\cos C\cos A,\ 2R\cos A\cos B,$$

celles d'un point M' divisant OH dans le rapport $(-1 : m)$, sont données par

$$\frac{x}{m\cos A+2\cos B\cos C}=\frac{y}{m\cos B+2\cos C\cos A}=\frac{z}{m\cos C+2\cos A\cos B};$$

si l'on remplace $m\cos A$ par $m(-\cos B\cos C+\sin B\sin C)$, ..., on obtient

$$\frac{x}{(m-2)\cos B\cos C-m\sin B\sin C}=\frac{y}{(m-2)\cos C\cos A-m\sin C\sin A}=\cdots,$$

formules qui résultent aussi de ce que les coordonnées de G sont

$$\tfrac{1}{3}R\sin B\sin C,\ \ldots$$

Nous déduisons de là les coordonnées d'un point M de Γ' en fonction d'un seul paramètre m ou n, savoir

$$(m\cos A+2\cos B\cos C)^{-1},\ \ldots,\quad \text{ou}\quad (n\cos B\cos C+\sin B\sin C)^{-1},\ \ldots$$

L'équation de la droite HO est

$$x\cos A(\cos^2 B-\cos^2 C)+\cdots=0,\quad \text{ou}\quad x\sin 2A\sin(B-C)+\cdots=0;$$

pour avoir celle de Γ', il suffit de substituer x^{-1}, y^{-1}, z^{-1} à x, y, z. Elle sera donc

$$yz\sin 2A\sin(B-C)+\text{etc.}=0.$$

Les points ν' et π' correspondent à $m = \pm 1$; donc les coordonnées de ν et π sont

$$\frac{1}{\cos(B-C)}, \quad \ldots; \quad \frac{1}{3\cos B\cos C - \sin B\sin C}, \quad \ldots.$$

Le centre de Γ' a pour coordonnées

$$\cos A\sin^2(B-C), \quad \cos B\sin^2(C-A), \quad \cos C\sin^2(A-B).$$

6. M. M'Cay a fait connaître une propriété fort intéressante de l'hyperbole de Kiepert (*Mathesis*, t. VII, p. 208, 1°). Nous allons généraliser ce théorème.

Considérons une droite Δ' et une conique Δ, qui dérivent l'une de l'autre par une inversion trilinéaire. Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées de deux points quelconques M'_1, M'_2 de Δ'; la droite qui joint les inverses M_1, M_2 de ces points, a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{y_1} & \frac{1}{z_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{y_2} & \frac{1}{z_2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} xx_1x_2 & yy_1y_2 & zz_1z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ou encore

$$fxx_1x_2 + gyy_1y_2 + hzz_1z_2 = 0,$$

si $fx + gy + hz = 0$ est l'équation de Δ'. Les coordonnées x_3, y_3, z_3 du point d'intersection M'_3 des droites Δ', M_1M_2 vérifient donc la relation

$$fx_1x_2x_3 + gy_1y_2y_3 + hz_1z_2z_3 = 0. \qquad (1)$$

Cette égalité étant symétrique par rapport aux points M'_1, M'_2, M'_3, tous les ternes $M'_1M'_2M'_3$ de Δ' qui la vérifient, sont dits former une *involution du troisième ordre*. Les ternes $M_1M_2M_3$ appartiennent à une involution marquée sur Δ. Les rôles des points d'un terne de l'involution pouvant être intervertis, nous avons d'abord le théorème suivant :

Soient Δ' et Δ une droite et une conique qui se transforment l'une dans l'autre par une inversion trilinéaire. Si M'_1, M'_2 sont deux points quelconques de Δ', et M_1, M_2 leurs inverses, les droites $M_1M'_2$ et $M_2M'_1$ se coupent en un même point M_3 de Δ, qui a pour inverse M'_3, point de rencontre de M_1M_2 avec Δ' (*).

(*) *Démonstration géométrique.* Les trois couples de droites (AM_1, AM'_1),

Si l'on fait coïncider M_2 avec M_1, on trouve que *la tangente en un point* M_1 *de* Δ, *et la droite qui joint* M_1 *à son inverse* M'_1 *rencontrent respectivement* Δ' *et* Δ *en deux points qui sont encore inverses l'un de l'autre.*

Pour mieux poursuivre les conséquences de l'équation (1), nous représenterons chaque point de Δ' par un seul paramètre. Soient donc (λ, μ, ν), (λ', μ', ν') les coordonnées de deux points fixes L, L' de Δ'; les coordonnées de M'_1, M'_2, ... sont de la forme $(\lambda + m_1\lambda', \mu + m_1\mu', \nu + m_1\nu')$, $(\lambda + m_2\lambda', \ldots)$ ..., et m_1, m_2, ... sont les paramètres de ces points. La relation (1) peut être écrite ainsi :

$$f(\lambda + m_1\lambda')(\lambda + m_2\lambda')(\lambda + m_3\lambda') + \cdots = 0,$$

ou

$$Dm_1m_2m_3 + E(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) + F(m_1 + m_2 + m_3) + G = 0, \quad (2)$$

pourvu que l'on fasse

$$D = f\lambda'^3 + g\mu'^3 + h\nu'^3, \qquad G = f\lambda^3 + g\mu^3 + h\nu^3,$$
$$E = f\lambda'^2\lambda + g\mu'^2\mu + h\nu'^2\nu, \qquad F = f\lambda^2\lambda' + g\mu^2\mu' + h'\nu^2\nu' (*).$$

On simplifie la relation (2) en adoptant pour L, L' les points d'intersection de Δ et Δ'; ces deux points étant inverses l'un de l'autre, on a $\lambda\lambda' = \mu\mu' = \nu\nu'$, de sorte que $E = \lambda\lambda'(f\lambda' + g\mu' + h\nu') = 0$, $F = 0$. Dans ce cas, l étant une constante on a

$$m_1m_2m_3 = -\frac{f\lambda^3 + g\mu^3 + h\nu^3}{f\lambda'^3 + g\mu'^3 + h\nu'^3} = l (**). \quad (3)$$

(AM_2, AM'_2), (AM_3, AM'_3) aboutissant aux sommets d'un quadrilatère complet sont en involution. Les deux premiers couples sont conjugués harmoniques par rapport aux bissectrices de l'angle BAC; donc le troisième couple admet les mêmes bissectrices. On voit immédiatement que la proposition est applicable à toutes les transformations quadratiques birationnelles. — M. Casey a énoncé le même théorème sous une forme un peu différente. (*Analytical Geometry*, p. 326, exercice 128).

(*) On peut dire que la relation (2) caractérise les groupes de trois points où une sécante quelconque rencontre Δ et Δ'.

(**) Une autre forme canonique de l'involution est

$$m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1 = \text{const}, \quad \text{ou} \quad m_1 + m_2 + m_3 = lm_1m_2m_3.$$

La première suppose $D = 0$, $F = 0$. L'égalité $D = 0$ caractérise les points *triples* de l'involution; c'est-à-dire les points de Δ' tels que l'une des tangentes issues d'un tel point passe par l'inverse de ce point; si L' est un tel point, L est l'inverse du point de contact de la deuxième tangente issue de L', c'est ce qu'indique la condition $F = 0$. Ce choix des points L, L' correspond à la relation $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = n\pi$ se rapportant à l'hyperbole de Kiepert : L et L' sont remplacés par O, K et KG, KH sont deux tangentes; le paramètre m est $\cot\theta = S \cot A$. (J. N.)

Soient maintenant $M_1M_2M_3$, $M'_1M'_2M'_3$ deux ternes satisfaisant à l'égalité (3)(*). Les points de rencontre de Δ' avec les tangentes en M_1, M_2, M_3 à Δ, points que nous désignons par M'_4, M'_5, M'_6, vérifient les équations

$$m_1^2 m_4 = l, \quad m_2^2 m_5 = l, \quad m_3^2 m_6 = l; \tag{4}$$

et celles-ci sont aussi vérifiées par les points de rencontre de Δ avec les droites $M_1M'_1$, $M_2M'_2$, $M_3M'_3$, de sorte que ces points sont les inverses M_4, M_5, M_6 de M'_4, M'_5, M'_6, résultat déjà connu. De (3) et (4), on conclut encore

$$m_4 m_5 m_6 = l,$$

ce qui montre que *les droites* M_4M_5, M_5M_6, M_6M_4 *passent respectivement par* M'_6, M'_4, M'_5.

Par les trois points M'_1, M'_2, M'_3 d'un terne de l'involution, menons trois couples de tangentes à Δ, et soient (M_7, N_7), (M_8, N_8), (M_9, N_9) les points de contact. Si m_7, m_8, m_9 sont les paramètres de M_7, M_8, M_9, ceux de N_7, N_8, N_9 seront $-m_7$, $-m_8$, $-m_9$, et nous aurons

$$m_1 m_7^2 = l, \quad m_2 m_8^2 = l, \quad m_3 m_9^2 = l,$$

d'où

$$m_7 m_8 m_9 = l,$$

pourvu que les signes de m_7, m_8, m_9 soient bien choisis. Il résulte de là que les six points de contact constituent quatre ternes $M_7M_8M_9$, $M_7N_8N_9$, $M_8N_7N_9$, $M_9N_7N_8$ de l'involution marquée sur Δ.

Les polaires de M'_1, M'_2, M'_3 rencontrent Δ' en trois points Q'_7, Q'_8, Q'_9, dont les paramètres sont $-m_1$, $-m_2$, $-m_3$; donc $M'_1Q'_8Q'_9$, $M'_2Q'_9Q'_7$, $M'_3Q'_7Q'_8$ sont encore trois ternes de l'involution.

7. Appliquons ces résultats à l'hyperbole Γ'. Les points de HO désignés ci-dessus par L, L' sont ici H et O. Nous poserons donc

$$\lambda : \mu : \nu = 2\cos B \cos C : 2\cos C \cos A : 2\cos A \cos B,$$
$$\lambda' : \mu' : \nu' = \cos A : \cos B : \cos C,$$
$$f : g : h = \cos A(\cos^2 B - \cos^2 C) : \cos B(\cos^2 C - \cos^2 A) : \cos C(\cos^2 A - \cos^2 B),$$

et, après un calcul facile, la relation (3) prend la forme

$$\frac{M'_1H}{M'_1O} \cdot \frac{M'_2H}{M'_2O} \cdot \frac{M'_3H}{M'_3O} = 8\cos A \cos B \cos C.$$

Soient α_1, α_2, α_3 les points de OA' qui correspondent à un terne

(*) Nous désignons ici constamment par M_i, M'_i deux points inverses situés respectivement sur Δ et Δ'.

$M'_1M'_2M'_3$ de l'involution, et posons $OA_1 = d$, $O\alpha_1 = d_1$, $O\alpha_2 = d_2$, $O\alpha_3 = d_3$. Les coordonnées normales absolues de O et A_1 étant

$$R\cos A,\quad R\cos B,\quad R\cos C;$$
$$-R\sin A\operatorname{tg} A,\quad R\sin B\operatorname{tg} A,\quad R\sin C\operatorname{tg} A,$$

les coordonnées du point α_1 qui divise OA_1 dans le rapport $d_1 : (d - d_1)$ sont proportionnelles à

$$(d - d_1)\cos A - d_1\sin A\operatorname{tg} A,\quad (d - d_1)\cos B + d_1\sin B\operatorname{tg} A,$$
$$(d - d_1)\cos C + d_1\sin C\operatorname{tg} A,$$

d'où l'équation de la droite $AM_1\alpha_1$, savoir :

$$\frac{y}{d_1\cos C + d\cos A\cos B} = \frac{z}{d_1\cos A + d\cos B\cos C}.$$

En la comparant à celle de AM'_1, qu'on avait représentée par

$$\frac{y}{\mu + m_1\mu'} = \frac{z}{\nu + m_1\nu'},$$

on voit que $m_1 = \dfrac{2d_1}{d}$; de même, $m_2 = \dfrac{2d_2}{d}$, $m_3 = \dfrac{2d_3}{d}$. Par suite, la relation entre les points α_1, α_2, α_3 est

$$d_1d_2d_3 = -d^3\cos A\cos B\cos C = -\frac{R^3\cos B\cos C}{\cos^2 A}.$$

Parmi les applications de cette formule, nous signalons la suivante. Le point K de Γ' correspond à $d_1 = d$; la tangente en K coupe donc HO en un point qui correspond à $d_1 = d_2 = d$, $d_3 = -R\cos B\cos C$. Cette valeur de d_3 correspond à l'intersection de B'C' avec OA' ; d'où le théorème :

Soient A_2, B_2, C_2 *les pieds des hauteurs du triangle* A'B'C', *complémentaire de* ABC *et dont* O *est l'orthocentre. Les droites* AA_2, BB_2, CC_2, *concourent en un point* Λ *de l'hyperbole* Γ' ; *l'inverse* Λ' *de* Λ *est le point de la droite d'Euler situé sur la tangente menée par* K *à* Γ'. Λ est le point étudié par MM. Brocard et Vigarié (*Mathesis*, VII, 105-108.) Ce point a pour coordonnées ($\cos B : \sin^2 B$), etc. Elles vérifient l'équation de Γ', car celle-ci se réduit à

$$S\sin^3 A\sin(B - C) = 0,$$

qui est bien une identité (N. C. M., 1878, IV, 142 et 1879, V, 345; *Mathesis*, IV, 136.)

COMPLÉMENTS DE LA NOUVELLE THÉORIE DES LOGARITHMES.

(Extrait d'une lettre de M. V. JAMET, voir p. 40-44.)

8. *Seconde démonstration de l'existence d'une limite de* $n(\sqrt[n]{a}-1)$, *quand* $n=2^p$, *et que* p *croît indéfiniment.* Après avoir démontré que $n(\sqrt[n]{a}-1)$ va sans cesse en décroissant (n° 2), quand p est de plus en plus grand, on peut prouver que cette expression n'a pas une limite nulle, sans recourir à la formule du binôme, de la manière suivante : Si dans l'identité

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1),$$

on fait $x=\sqrt[n]{a}$, et si l'on suppose $a>1$, on trouve

$$a-1=(\sqrt[n]{a}-1)(a^{\frac{n-1}{n}}+a^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+a^{\frac{1}{n}}+1),$$

et, par suite,

$$a-1<(\sqrt[n]{a}-1)(a+a+\cdots+a+a) \quad \text{ou} \quad a-1<na(\sqrt[n]{a}-1).$$

Donc

$$n(\sqrt[n]{a}-1)>\frac{a-1}{a},$$

et, par suite, $n(\sqrt[n]{a}-1)$ a une limite différente de zéro.

9. *La base des logarithmes népériens est* $e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (*Seconde démonstration*). En effet, soit β la base des logarithmes népériens, de sorte que

$$\lim n(\sqrt[n]{\beta}-1)=1,$$

ou encore

$$n(\sqrt[n]{\beta}-1)=1+\varepsilon,$$

ε étant une quantité positive indéfiniment décroissante quand p et n deviennent de plus en plus grands. On aura

$$\beta=\left(1+\frac{1+\varepsilon}{n}\right)^n.$$

Par suite, en faisant $x=1+\frac{1+\varepsilon}{n}$, $y=1+\frac{1}{n}$ dans l'identité

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}),$$

il viendra

$$\beta-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{\varepsilon}{n}\left[\left(1+\frac{1+\varepsilon}{n}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{1+\varepsilon}{n}\right)^{n-2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right].$$

Remplaçons chacun des termes de la parenthèse du second membre par la quantité plus grande

$$\beta=\left(1+\frac{1+\varepsilon}{n}\right)^n,$$

nous trouverons

$$\beta-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\beta\varepsilon.$$

D'ailleurs,

$$\beta-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>0.$$

Si n croît indéfiniment, ε devient aussi petit qu'on le veut. De la double inégalité précédente, on déduit

$$\beta=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

16. *Calcul approché de* $\lim n(\sqrt[n]{a}-1)$ *ou de* $\log a$. Soient u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, ... une suite indéfinie de quantités de plus en plus petites tendant vers une limite u. On a identiquement

$$u_p-u=(u_p-u_{p+1})+(u_{p+1}-u_{p+2})+(u_{p+2}-u_{p+3})+\text{etc.}$$

Soient $n=2^p$, $u_p=n(\sqrt[n]{a}-1)$. Alors

$$u_p-u_{p+1}=n(\sqrt[2n]{a}-1)^2,\quad u_{p+1}-u_{p+2}=2n(\sqrt[4n]{a}-1)^2,\ \text{etc.}$$

Posons, pour un instant,

$$u_p-u_{p+1}=v_p,\quad u_{p+1}-u_{p+2}=v_{p+1},\ \text{etc.}$$

On trouve

$$\frac{v_{p+1}}{v_p}=2\left[\frac{\sqrt[2n]{a}+1}{\sqrt[2n]{a}+1}\right]^2\cdot\frac{2}{(\sqrt[4n]{a}+1)^2}<\frac{1}{2},\quad \frac{v_{p+2}}{v_{p+1}}<\frac{1}{2},\quad \frac{v_{p+3}}{v_{p+2}}<\frac{1}{2},\ \text{etc.}$$

On aura donc

$$v_{p+1}<\tfrac{1}{2}v_p,\quad v_{p+2}<\tfrac{1}{2}v_{p+1}<\tfrac{1}{4}v_p,\quad v_{p+3}<\tfrac{1}{2}v_{p+2}<\tfrac{1}{8}v_p,\ \text{etc.},$$

et comme

$$u_n - u = v_p + v_{p+1} + v_{p+2} + \text{etc.},$$

il vient

$$u_n - u < v_p\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \text{etc.}\right),$$

ou encore,

$$u_n - u < 2v_p = 2n\,(\sqrt[2n]{a} - 1)^2.$$

La valeur de u sera donc comprise entre

$$n(\sqrt[n]{a} - 1) \text{ et } n(\sqrt[n]{a} - 1) - 2n(\sqrt[2n]{a} - 1)^2 = n(\sqrt[n]{a} - 1) - \frac{[2n(\sqrt[2n]{a} - 1)]^2}{2n}.$$

Comme

$$n(\sqrt[n]{a} - 1) > 2n\,(\sqrt[2n]{a} - 1),$$

on peut encore dire que l'on a

$$u_n > u > u_n - \frac{1}{2n}\,u_n^2.$$

---

*EXERCICES SUR LES CERCLES TANGENTS;

par J. Déprez, professeur à Dinant.

1. Soient M, N les extrémités d'un diamètre d'un cercle O. Sur OM et ON comme diamètres, décrivons deux nouvelles circonférences A, B. Si R est le rayon du cercle O; R_1 celui du cercle C_1 qui touche les cercles A, B, O; R_2 celui du cercle C_2 qui touche les cercles A, B, C_1 (C_2 étant dans l'espace compris entre ces trois cercles); R_3 celui du cercle C_3 qui touche A, B, C_2 (C_3 étant encore dans l'espace compris entre ces trois cercles), etc., on a

$$R_1 = \frac{R}{1.3},\quad R_2 = \frac{R}{3.5},\quad R_3 = \frac{R}{5.7}\cdots$$

Les surfaces des cercles C_1, C_2, ... étant désignées par S_1, S_2, ..., on a

$$S_1 + 2S_2 + \cdots + nS_n = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)^2}\cdot \pi R^2.$$

2. On élève une perpendiculaire PQ en un point quelconque P du diamètre MN du cercle O, et sur les segments MP, PN comme diamètres, on décrit deux nouveaux cercles A, B. On construit ensuite un cercle C touchant les cercles O, A et la droite PQ, puis un cercle D tangent aux

cercles O, A, C. Soient R, r_1, r_2, r_3, x les rayons des cercles O, A, B, C, D; démontrer que

$$\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2},\quad x=\frac{Rr_2(R^2+r_2^2-2r_2\sqrt{Rr_2})}{r_1^3+4R^2r_2}.$$

3. Soient (notations du n° 2) y_1 le rayon d'un cercle E_1 tangent aux cercles A, C et à la droite PQ; y_2 celui d'un cercle E_2 touchant les cercles A, E_1, et la droite PQ, ... Démontrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{y_1}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\sqrt{\frac{R}{r_1r_2}}+\frac{1}{\sqrt{r_1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{y_2}}=\sqrt{\frac{R}{r_1r_2}}+\frac{2}{\sqrt{r_1}},\quad \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{y_n}}=\sqrt{\frac{R}{r_1r_2}}+\frac{n}{\sqrt{r_1}}.$$

4. Soient ρ_1 le rayon du cercle F_1 touchant les cercles A, B, O; ρ_2 celui du cercle F_2 touchant les cercles A, B, F_1; ρ_3 celui du cercle F_3 touchant les cercles A, B, F_2, etc. On a

$$\rho_1=\frac{Rr_1r_2}{R^2-r_1r_2},\quad \rho_2=\frac{Rr_1r_2}{4R^2-r_1r_2},\quad \ldots,\quad \rho_n=\frac{Rr_1r_2}{n^2R^2-r_1r_2},$$

ou

$$\frac{1}{\rho_n}=n\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)-\frac{1}{R}.$$

Les points de contact mutuel des cercles F_1, F_2, ... se trouvent sur une même circonférence(*).

NOTES MATHÉMATIQUES.

6. ***Sur les nombres parfaits***, par M. Cl. Servais. M. E. Cesàro a donné (*Mathesis*, t. VII, p. 245) deux limites supérieures du plus petit facteur premier d'un nombre parfait. Ces limites sont $2n-3$ et $n\sqrt{2}$, n étant le nombre de facteurs premiers distincts du nombre parfait. Nous allons démontrer que n est une limite supérieure de ce plus petit facteur.

(*) Ces formules se démontrent facilement en transformant les cercles A, B, O, F_1, F_2,... par rayons recteurs réciproques, le pôle étant en P. Comparer *Mathesis*, t. VII, p. 155.

Soit un nombre parfait $N = a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma} \ldots$ On a (*Mathesis*, VII, p. 230).

$$2 < \frac{a}{a-1} \cdot \frac{b}{b-1} \cdots \qquad (1)$$

Si a est le plus petit facteur, on a aussi

$$\frac{b}{b-1} < \frac{a+1}{a}, \quad \frac{c}{c-1} < \frac{a+2}{a+1}, \quad \text{etc.};$$

donc

$$2 < \frac{a}{a-1} \cdot \frac{a+1}{a} \cdot \frac{a+2}{a+1} \cdots \frac{a+n-1}{a+n-2},$$

d'où

$$a < n+1.$$

De là ce théorème : *S'il existe un nombre parfait contenant n facteurs premiers, le plus petit de ces facteurs ne dépasse pas n.* En particulier, si $n = 2$, $a = 2$; par conséquent, *il n'existe pas de nombres parfaits impairs ne contenant que deux facteurs premiers distincts* (*Mathesis*, t. VI, p. 250).

II. Soit

$$\frac{a}{a-1} \cdot \frac{b}{b-1} \cdot \frac{c}{c-1} \cdots \frac{l}{l-1} \leqq L < 2$$

l étant le $(m-1)^{ième}$ facteur. Si s est le facteur suivant, l'inégalité (1) donne *a fortiori*,

$$L \cdot \frac{s}{s-1} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+2}{s+1} \cdots \frac{s+n-m}{s+n-m+1} > 2;$$

d'où

$$s < \frac{L(n-m)+2}{2-L}.$$

ce qui fournit rapidement une limite supérieure du $m^{ième}$ facteur.

×7. *Conséquences du théorème de Stewart* (voir *Mathesis*, t. VIII, p. 17), par M. Cl. Thiry. On considère trois circonférences quelconques dont les centres O, O', O'' sont en ligne droite, et une quatrième circonférence quelconque C. Si R, R', R'', x sont les rayons des circonférences O, O', O'', C et t, t', t'' les longueurs respectives des tangentes communes intérieures aux trois couples de circonférences (O, C), (O', C), (O'', C), on a

$$(t^2 + R^2)\,O'O'' + (t'^2 + R'^2)\,O''O + (t''^2 + R''^2)\,OO' + OO'.O'O''.O''O + 2x(R.O'O'' + R'.O''O + R''.OO') = 0. \qquad (1)$$

En effet, le théorème de Stewart donne

$$\overline{OC}^2.O'O'' + \overline{O'C}^2.O''O + \overline{O''C}^2.OO' + OO'.O'O''.O''O = 0. \quad (2)$$

Mais

$$\overline{OC}^2 = t^2 + (R + x)^2, \quad \overline{O'C}^2 = t'^2 + (R' + x)^2, \quad \overline{O''C}^2 = t''^2 + (R'' + x)^2,$$
$$OO' + O'O'' + O''O = 0;$$

d'où résulte l'égalité (1).

Corollaire. Si les trois circonférences O, O', O'' ont un même centre d'homothétie directe, le multiplicateur de $2x$ est nul, et l'on trouve le théorème de M. Simart(*) :

$$(t^2 + R^2)O'O'' + (t'^2 + R'^2)O''O + (t''^2 + R''^2)OO' + OO'.O'O''.O''O = 0. \quad (3)$$

Remarque. Les formules (1) et (3) subsistent encore si l'on considère les tangentes communes extérieures, à la condition de changer x en $-x$.

8. *Sur les normales à la parabole*, par M. Maurice d'Ocagne. L'élégante construction donnée par M. Schoute (*Mathesis*, 1887, p. 41) pour mener par un point pris sur une normale d'angle α à une ellipse les trois autres normales d'angle α qui sont issues de ce point, n'est pas applicable au problème suivant, où il s'agit d'ailleurs de normales ordinaires :

Par un point pris sur une normale à une parabole, mener les deux autres normales qui en sont issues.

Dans un mémoire qui sera publié prochainement, j'ai rencontré, à titre de cas très particulier de certaines propriétés des normales aux courbes quelconques, la solution suivante de ce problème :

Soit P *le point choisi sur la normale en* A *à la parabole. La normale* PA *coupe la parabole en un second point* K. *La tangente au cercle décrit sur* PK *comme diamètre, menée par le point où ce cercle est coupé par la tangente en* K *à la parabole, passe par les pieds des deux autres normales issues de* P.

Le lecteur pourra chercher la démonstration directe de ce théorème.

(*) La formule de *Mathesis*, t. VIII, p. 17, renferme des erreurs de signe.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 452.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 167.)

Sur les côtés AB, AC *d'un triangle donné, on décrit deux cercles égaux de rayon variable. Trouver :* 1° *le lieu du second point d'intersection* D *des deux circonférences ;* 2° *l'enveloppe de la ligne des centres* O, O'.

Solutions géométriques : 1° Les angles ABD, ACD ayant même mesure, la différence des angles à la base du triangle DBC est constante. Donc le point D décrit une hyperbole équilatère passant par A, B, C, ayant son centre au milieu de BC et ses asymptotes parallèles aux bissectrices de l'angle BAC. (Gob et Meurice).

Les angles ABD, ACD étant égaux, les droites BD, CD engendrent des faisceaux inversement égaux, etc. (Pisani et Boedt.)

2° La ligne des centres OO' est perpendiculaire au milieu E de la corde commune AD ; donc l'enveloppe de la droite OO' est l'antipodaire, par rapport à A, d'une hyperbole équilatère passant par A, les milieux B' et C' de AB, et AC et ayant son centre au milieu de B'C' ; c'est aussi le lieu des centres des circonférences touchant l'hyperbole (D) en un point variable D et passant par un point fixe A de cette courbe(*). (Boedt, Meurice et Gob.)

Si l'on joint un point quelconque M aux centres O, O' des deux cercles variables, les droites MO, MO' sont des rayons correspondants de deux faisceaux entre lesquels il existe une correspondance (2, 2) ; car, à une même valeur du rayon R des cercles variables correspondent deux positions de O et deux positions de O'. Ces faisceaux présentent quatre

---

(*) Pour trouver la classe de l'antipodaire d'une conique par rapport à un point quelconque A, on peut chercher combien de droites de l'enveloppe passent par un point M situé à l'infini sur une direction donnée δ. La perpendiculaire abaissée de A sur δ rencontre la conique en deux points ; les parallèles à δ par ces points sont les droites cherchées. Mais la droite à l'infini (dont la direction est indéterminée) correspond aux deux points de la conique situés à l'infini et compte pour deux droites de l'enveloppe. Donc celle-ci est de la quatrième classe. Lorsque A est situé sur la conique, toutes les droites du faisceau de sommet A sont des lignes de l'enveloppe ; donc ce faisceau étant retranché, l'enveloppe proprement dite n'est plus que de la troisième classe. (J. N.)

coïncidences, c'est-à-dire il arrive quatre fois que MO, MO' se confondent avec OO'; l'enveloppe de OO' est donc de la quatrième classe ou plutôt de la troisième, si l'on fait abstraction du centre du cercle ABC, lequel fait partie de l'enveloppe comme étant son propre homologue des ponctuelles (O), (O'). (BOEDT.)

Solutions analytiques : 1° Les axes étant AB, AC et les angles ABD, ACD étant désignés par φ, les équations de BD, CD sont

$$y = -(x-b)\frac{\sin\varphi}{\sin(A+\varphi)}, \quad y-c = -x\frac{\sin(A+\varphi)}{\sin\varphi},$$

d'où par multiplication

$$y^2 - x^2 + ay + bx = 0. \qquad \text{(PISANI et BOEDT.)}$$

2° Prenons pour axes les perpendiculaires B'F, C'F aux milieux B', C' de AB, AC. Soient $FO = \beta$, $FO' = \gamma$, $FA = R$, $O'A = OA = r$. L'équation de la droite OO' est

$$\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\gamma} = 1,$$

sous la condition

$$r^2 = R^2 + \beta^2 - 2R\beta\cos C = R^2 + \gamma^2 - 2R\gamma\cos B. \qquad (1)$$

Éliminons γ entre ces égalités; il vient

$$(\beta - 2R\cos C)(\beta - x)^2 = \beta y^2 - 2R(\beta - x)\, y\cos B,$$

ou en posant $\beta - x = \lambda$, $2R\cos C = h$, $2R\cos B = k$:

$$\lambda^3 + \lambda^2(x-h) - \lambda y(y-k) - xy^2 = 0.$$

Si l'on élimine λ entre cette équation et sa dérivée par rapport à λ, on trouve

$$(x-h)^2(y-k)^2 + 4x(x-h)^3 + 4y(y-k)^3 + 18xy(x-h)(y-k) - 27x^2y^2 = 0,$$

équation d'une quartique ayant ses asymptotes parallèles aux bissectrices de l'angle des axes. (MOSNAT et PISANI.)

M. MOSNAT a également résolu la première partie de la question en prenant pour axes FA et une perpendiculaire en F. MM. DÉPREZ et VERNIORY ont traité la question en prenant pour axes, le premier, les droites AB et AC, le second, les perpendiculaires aux milieux de ces lignes, autrement dit, les médiatrices. —

L'équation (1), où l'on remplace β et γ par $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$ représente l'enveloppe de OO' en coordonnées tangentielles.

Question 491.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 264.)

Par le foyer F ***d'une parabole, on mène trois rayons vecteurs*** FA, FB, FC ***faisant entre eux des angles égaux, et en leurs milieux, on élève des perpendiculaires. Trouver le lieu du centre et l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle équilatéral*** A'B'C' ***ainsi formé.*** (E. Fauquembergue.)

Solution par M. Mosnat (Toulon). Soient α, β, γ les angles de FA, FB, FC avec l'axe focal FX, et $\rho = p\,(1 - \cos\theta)^{-1}$ l'équation de la parabole. Nous ferons

$$\beta = \alpha + 120^\circ; \quad \gamma = \alpha - 120^\circ,$$

$$\text{FA} = a = \frac{p}{1-\cos\alpha}, \quad \text{FB} = b = \frac{p}{1-\cos\beta}, \quad \text{FC} = c = \frac{p}{1-\cos\gamma}.$$

Les axes étant FX et la perpendiculaire FY, les côtés du triangle équilatéral A'B'C' ont pour équations

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \frac{a}{2} = 0, \ldots,$$

et la circonférence A'B'C' est représentée par

$$\mathrm{S}\left(x\cos\alpha + y\sin\alpha - \frac{a}{2}\right)\left(x\cos\beta + y\sin\beta - \frac{b}{2}\right) = 0,$$

ou

$$(x^2+y^2)\,\mathrm{S}\cos\alpha\cos\beta - \frac{px}{2}\mathrm{S}\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{1-\cos\alpha} - \frac{py}{2}\mathrm{S}\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{1-\cos\alpha}$$

$$+\frac{p^2}{4}\mathrm{S}\frac{1}{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)} = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2\mathrm{X}x - 2\mathrm{Y}y + \mathrm{P} = 0,$$

X et Y étant les coordonnées du centre.

Pour réduire facilement les valeurs de X, Y, P, nous rappelons que les racines des équations

$$\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha, \quad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

où l'on considère $\cos 3\alpha$, $\sin 3\alpha$ comme des données, et $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ comme des inconnues, sont respectivement

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma, \quad \text{et} \quad \sin\alpha,\ \sin\beta,\ \sin\gamma,$$

de sorte que

$$S\cos\alpha = 0, \quad S\sin\alpha = 0,$$
$$S\cos\alpha\cos\beta = S\sin\alpha\sin\beta = -\tfrac{3}{4},$$
$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \tfrac{1}{4}\cos 3\alpha, \quad \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = -\tfrac{1}{4}\sin 3\alpha,$$
$$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) = 1 - S\cos\alpha + S\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \tfrac{1}{4}(1-\cos 3\alpha).$$

Au moyen de ces relations, on trouve

$$X = \frac{p}{3} S\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{4p\,S\cos\alpha\,(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)}{3(1-\cos 3\alpha)} = \frac{p(2+\cos 3\alpha)}{1-\cos 3\alpha},$$

$$Y = \frac{p}{3} S\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{4p\,(S\sin\alpha\cos\alpha + S\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma)}{3(1-\cos 3\alpha)} = \frac{p\sin 3\alpha}{1-\cos 3\alpha}\ (*),$$

$$P = \frac{-4p^2}{1-\cos 3\alpha}.$$

Des valeurs de X et Y, on déduit

$$\cos 3\alpha = \frac{X-2p}{X+p}, \quad \sin 3\alpha = \frac{3Y}{X+p},$$

et, par suite, le lieu du centre du cercle a pour équation

$$Y^2 = \frac{2}{3}p\left(X - \frac{p}{2}\right).$$

C'est donc une parabole ayant même axe que la proposée et un paramètre trois fois moindre; les deux sommets sont symétriques par rapport à F.

L'équation de la circonférence A'B'C' peut être écrite ainsi :

$$(x^2+y^2+2px)\cos 3\alpha + 2py\sin 3\alpha = x^2+y^2-4px-4p^2.$$

Sa dérivée par rapport à 3α est :

$$-(x^2+y^2+2px)\sin 3\alpha + 2py\cos 3\alpha = 0.$$

Pour éliminer α, il suffit de faire la somme des carrés de ces égalités; on trouve

$$(x+p)\left(x^2+y^2-\tfrac{4}{3}px-\tfrac{4}{3}p^2\right) = 0,$$

c'est-à-dire la directrice et une circonférence C.

(*) $S\sin 2\alpha = 0$, $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = S\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

Question 539.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 240.)

Soient C, D *deux points fixes divisant le diamètre* AB *du cercle* O *en parties harmoniques. Par* C, D *on fait passer un cercle quelconque* O'. *Trouver les lieux des points où la tangente menée en* C *au cercle* O' *est rencontrée par la corde* MN *commune aux cercles* O *et* O', *par la droite* MD *ou par la tangente en* M *à l'un ou l'autre cercle.* (Gob.)

Solution par M. Boedt. 1° Soit F le milieu de CD. Prenons pour axes CO et CY, et posons $CO = \alpha$, $FO' = \beta$, $CF = \gamma$, $OA = R$. Les équations des cercles O et O' seront

$$(x-\alpha)^2 + y^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 - 2\gamma x - 2\beta y = 0.$$

La corde commune MN et la tangente en C sont représentées par

$$2(\gamma-\alpha)x + 2\beta y + \alpha^2 - R^2 = 0, \quad \gamma x + \beta y = 0.$$

Soit P leur point d'intersection. Pour avoir l'équation du lieu de P, il suffit d'éliminer β entre les dernières équations; on trouve

$$\alpha^2 - 2\alpha x - R^2 = 0.$$

Le lieu est donc une droite, quels que soient les points C et D de la droite AB. Dans la question proposée, $2\alpha\gamma = \alpha^2 - R^2$; par suite, le lieu est la droite O'F.

Pour démontrer ce résultat par la géométrie, observons d'abord que la droite MN rencontre AB en un point fixe K d'égale puissance par rapport aux segments AB, CD. Les deux droites CP, MN, perpendiculaires aux rayons homologues CO', OO' de deux faisceaux perspectifs; se correspondent également dans deux faisceaux projectifs. Mais la droite qui joint les sommets C, K des deux faisceaux est sa propre homologue; donc P engendre une droite(*).

La relation $(PC)^2 = PM.PN$ s'appliquant au point F, celui-ci est une position de P, etc.

(*) *Autrement.* Soit p la projection de P sur CD; des triangles semblables CO'F et PCp, OO'F et PKp, on déduit aisément la proportion $Cp : Kp = OF : CF$; donc le point p est fixe. (J. N.)

2° Soient Q le point d'intersection de CP avec DM, x' et y' les coordonnées de M. Nous aurons à éliminer x', y', β entre les équations

$$\gamma x + \beta y = 0, \quad y = \frac{y'}{x' - 2\gamma}(x - 2\gamma)$$

$$2\beta y' + 2(\gamma - \alpha)x' + \alpha^2 - R^2 = 0, \quad (x' - \alpha)^2 + y'^2 = R^2.$$

On trouve une équation du second degré.

On peut vérifier ce résultat par un raisonnement géométrique. Entre les droites CQ, DQ il existe une correspondance (2, 2). Car si l'on donne CQ, le cercle O′ est déterminé et les droites DM, DN rencontrent CQ en deux points du lieu; si l'on donne DQ, on trouve deux cercles correspondants O′ et, par suite, deux droites CQ. Le lieu paraît donc être du quatrième degré; mais la droite CD se correspond à elle-même, quand on la considère comme droite DM ou DN; donc elle est à compter deux fois dans le lieu.

3° Soient S, T les points de rencontre de la tangente en C au cercle O′, avec les tangentes menées en M aux cercles O ou O′. Pour le point S, on a

$$\gamma x + \beta y = 0, \quad 2\beta y' + 2(\gamma - \alpha)x' + \alpha^2 - R^2 = 0,$$
$$(x' - \alpha)^2 + y'^2 = R^2, \quad (x - \alpha)(x' - \alpha) + yy' = R^2.$$

Pour le point T, la dernière équation est à remplacer par la suivante

$$x'(x - \gamma) + y'(y - \beta) = 0,$$

qui représente la doite OT′. Le point T décrit une conique; le lieu de S est une quartique.

Cherchons également les degrés de ces lieux par la géométrie. A une droite CT correspond un seul cercle O′ qui le touche; les tangentes à ce cercle aux deux points d'intersection M et N avec le cercle O rencontrent CT aux deux points du lieu (T). Comme le point C ne peut appartenir au même lieu(*), celui-ci est du second degré. Les tangentes au cercle O, aux deux points M, N déterminent sur CT deux points S; mais le point C lui-même est à compter pour deux points S : le cercle correspondant O′ passe par le point de contact de l'une ou l'autre tangente menée de C au cercle O. Donc le lieu de S est du quatrième degré.

Solution géométrique par M. MANDART. 1° Faisons une inversion de la

(*) Lorsque O′ est à l'infini, CT coïncide avec AB, M et N avec A et B, et O′T avec la perpendiculaire au milieu de CA ou de CB. (J. N.)

figure, le pôle étant placé en C et la puissance d'inversion étant égale à CA.CB. Le cercle O se reproduit lui-même et l'inverse de D est le point 0. Le tangente C*z* au cercle O′ est sa propre inverse et le cercle O′ se transforme dans le diamètre *mn* du cercle O parallèle à C*z*. La droite MN se change dans la circonférence *mn*C qui vient couper C*z* en un point *p*, inverse du point P dont nous cherchons le lieu. La figure *m*C*pn* étant un trapèze isoscèle, on a O*p* = OC; donc le lieu de *p* est une circonférence, et P décrit une droite perpendiculaire à AB (*).

2° Le point d'intersection Q de C*z* avec la droite DM a pour inverse le point de rencontre *q* de C*z* avec la circonférence O*m*C. Ce point *q* est le symétrique de C par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de O*m*. Comme cette perpendiculaire enveloppe une circonférence, le milieu de C*q* décrit une podaire de cercle (limaçon de Pascal); il en sera de même de *q*, et Q a pour lieu géométrique une conique dont C est un foyer.

3° La tangente en M au cercle O′ rencontre C*z* en un point T, dont l'inverse *t* est le point d'intersection de C*z* avec la circonférence menée par C et touchant O*m* en *m*. Il est visible que *t* est le symétrique de C par rapport à la tangente au cercle O en M; donc il décrit un limaçon de Pascal et son inverse T parcourt une conique de foyer C.

Le point de rencontre S de C*z* avec la tangente en M au cercle O a pour inverse le point *s* où C*z* est coupé par la circonférence touchant le cercle O en *m* et passant par C. Il est facile de former l'équation du lieu du point *s* en coordonnées polaires.

M. Déprez a également résolu la question 539. Voici comment il détermine géométriquement les lieux (P) et (T). Les cercles O et O′ étant orthogonaux, la corde MN est la polaire de O par rapport au cercle O′; donc les tangentes aux extrémités d'une corde CD menée par O se coupent en un point P de MN ..

La tangente MT passe par O et TC = TM; d'où l'on conclut aisément que le point T décrit une conique ayant pour foyers O et C, et pour axe focal OA. La directrice correspondant au foyer C est la droite O′F; car TO′ est la tangente et l'angle TCO′ est droit.

(*) Le même raisonnement est applicable, à une légère modification près, au cas de deux points *quelconques* C, D. (J. N.)

×Question 589.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 240).

Dans tout triangle ABC,

$$c^n = a^n \cos nB + na^{n-1}b\cos[(n-1)B - A]$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2\cos[(n-2)B - 2A] + \cdots + b^n \cos nA. \quad \text{(Brill.)}$$

Solution par M. Emmerich. De

$$c = a\cos B + b\cos A = a(\cos B + i\sin B) + b(\cos A - i\sin A),$$

on tire

$$c^n = SC_{n,r}a^{n-r}b^r[\cos(n-r)B + i\sin(n-r)B][\cos rA - i\sin rA]$$

et, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$c^n = SC_{n,r}a^{n-r}b^r\cos[(n-r)B - rA]$$
$$0 = SC_{n,r}a^{n-r}b^r\sin[(n-r)B - rA].$$

Solutions analogues par M. M. Déprez et Beyens qui emploient les exponentielles imaginaires.

Généralisation par M. Laisant. Soit c la résultante des droites $a_1, a_2, \ldots, a_n$, faisant avec c les angles $x_1, x_2, \ldots x_n$. On a

$$c = a_1\cos x_1 + a_2\cos x_2 + \cdots + a_n\cos x_n;$$
$$0 = a_1\sin x_1 + a_2\sin x_2 + \cdots + a_n\sin x_n,$$

d'où

$$c = Sa_i(\cos x_i + \sqrt{-1}\sin x_i).$$

Élevant à la puissance n et séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on trouve

$$c^n = (a_1\cos x_1 + a_2\cos x_2 + \cdots)^n$$
$$0 = (a_1\sin x_1 + a_2\sin x_2 + \cdots)^n,$$

égalités qu'il faut entendre symboliquement : après avoir développé la puissance n^e indiquée dans le second membre, on remplace $\cos x_i \cos x_k \ldots$ par $\cos(x_i + x_k + \ldots)$, et $\sin x_i \sin x_k \ldots$ par $\sin(x_i + x_k + \ldots)$

×Question 592.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 240.)

Étant donnés, dans l'espace, deux cercles, trouver le lieu d'un point qui soit le sommet commun de deux cônes semblables construits sur les deux cercles. (J. N.)

Solution par MM. Emmerich, Beyens et Ghuys. 1° Les distances du sommet S aux centres O, O' des deux cercles sont proportionnelles aux rayons R, R' de ces cercles; donc un premier lieu de S est la sphère qui a pour diamètre la distance des points divisant la droite OO' dans le rapport R : R'. 2° Les distances de S aux plans des cercles O, O' étant dans le rapport R : R', un second lieu de S se compose de deux plans passant par l'intersection des plans des cercles.

Le lieu cherché consiste donc en deux circonférences.

Note. Lorsque les cercles O, O' sont dans un même plan, on peut les regarder, d'une infinité de manières, comme deux figures semblables (non homothétiques). Le lieu des centres de similitude est la circonférence qui a pour diamètre la distance des centres d'homothétie des cercles donnés. (J. N.)

×Question 600.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 280).

Le nombre qui exprime la somme des puissances $p^{ièmes}$ de dix nombres entiers consécutifs se termine par un 5, ***excepté si p est un multiple de*** 4; ***dans ce cas, il se termine par*** 3. (E. Cesàro.)

Solution par MM. Brocard (Grenoble), E. Gelin, Molenbroek (Rotterdam), Emmerich (Mülheim a/R), et Mosnat (Toulon). La démonstration de ce théorème résulte du tableau suivant :

Valeurs de p.	Chiffres terminaux des puissances.										Somme.
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	5
2	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0	5
3	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0	5
4	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0	3
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	5

La cinquième puissance d'un nombre étant terminée par le même chiffre que le nombre, la périodicité du dernier chiffre de la somme de dix entiers consécutifs est manifeste.

QUESTIONS D'EXAMEN.

361. Soient BC, DE deux diamètres rectangulaires d'une circonférence. On joint un point quelconque A de la demi-circonférence CDB aux points B, C, E, et de D comme centre, avec un rayon égal à AE, on décrit une circonférence, rencontrant la droite AE au point M. Démontrer la relation $\overline{AM}^2 = 2AB.AC$. (L. Meurice.)

362. a, b, c étant trois angles quelconques, démontrer les relations

$$\Sigma \sin a \sin(b-c)\sin(b+c-a) = 2\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b),$$

$$\Sigma \cos a \sin(b-c)\cos(b+c-a) = 2\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b),$$

$$\Sigma \cos a \sin(b-c)\sin(b+c-a) = 0,$$

$$\Sigma \sin a \sin(b-c)\cos(b+c-a) = 0.$$ (Emmerich.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

195. (*Mathesis*, t. II, p. 231). L'expression *symbolique*

$$\frac{(H+\alpha)^n - (H+\alpha-1)^n}{\alpha^n}$$

dans laquelle H_p représente la somme des p premiers termes de la série harmonique, tend vers le logarithme néperien de α, lorsque n croît indéfiniment. (E. Cesáro.)

×**610.** Étant donnés dans un même plan deux triangles directement semblables $A_1A_2A_3$, $P_1P_2P_3$ et une droite MN de longueur et de position quelconques, si l'on construit les triangles $A_2B_1A_3$, $A_3B_2A_1$, $A_1B_3A_2$ directement semblables à MP_1N, MP_2N, MP_3N, les triangles $B_1B_2B_3$, $A_1A_2A_3$ auront même centre de gravité G. (H. Van Aubel.)

×**611.** On donne un point O et une droite CD sur laquelle on abaisse de O une perpendiculaire OC. Une circonférence passant par O et touchant CD en un point variable E, rencontre OC au point A. Trouver le lieu de la projection M de A sur la droite EO, et l'enveloppe de la droite AM. (Mandart.)

×**612.** Quels que soient les nombres entiers a, b, c, l'équation indéterminée $xy + ax + by = c$ admet au moins deux systèmes de solutions entières. (H. Brocard.)

Rectification. Page 80, question 608, remplacer, ligne 2, r par R, R par r, ligne 3, *second* par *premier*, ligne 4, $\frac{mn}{r}$ par $\frac{1}{2}\frac{mn}{r}$.

SUR LA THÉORIE DES TRANSFORMATIONS;

par M. Cl. Servais, répétiteur à l'Université de Gand.

I. Sur diverses transformations planes.

1. *Généralisation de la transformation quadratique.* Soient

$$U = 0, \qquad V = 0.$$

deux courbes de degré N. Les droites polaires d'un point (x', y', z') par rapport à ces deux courbes, ont respectivement pour équation

$$x\frac{dU'}{dx'} + y\frac{dU'}{dy'} + z\frac{dU'}{dz'} = 0,$$

$$x\frac{dV'}{dx'} + y\frac{dV'}{dy'} + z\frac{dV'}{dz'} = 0.$$

Si l'on prend une courbe dont l'équation est

$$U + kV = 0,$$

on voit facilement que la droite polaire du point (x', y', z') par rapport à cette courbe, passe par le point d'intersection des deux précédentes. Les coordonnées (x'', y'', z'') de ce point sont données par :

$$\frac{x''}{\frac{dU'}{dy'}\cdot\frac{dV'}{dz'} - \frac{dU'}{dz'}\cdot\frac{dV'}{dy'}} = \frac{y''}{\frac{dU'}{dz'}\frac{dV'}{dx'} - \frac{dU'}{dx'}\frac{dV'}{dz'}} = \frac{z''}{\frac{dU'}{dx'}\frac{dV'}{dy'} - \frac{dU'}{dy'}\frac{dV'}{dx'}}.$$

Ces équations définissent une transformation, mais elle n'est pas birationnelle. En effet, au point (x', y', z') correspond, dans la deuxième figure, le seul point (x'', y'', z''), mais au point (x'', y'', z'') de la deuxième figure, correspondent $(N-1)^2$ points de la première. Ces $(N-1)^2$ points sont les points d'intersection des premières courbes polaires du point (x'', y'', z''), par rapport au faisceau de courbes $U + kV$.

La transformation n'est donc birationnelle que dans le cas de $N = 2$.

2. *Transformation corrélative*(*). Des résultats précédents (*Mathesis*, VII, pp. 110-114, 129-134, 187-190), on peut déduire facilement des résultats corrélatifs par le principe de dualité. Au lieu de considérer des

(*) Voir N. A. M., 1866, (2), V, p. 118.

coniques circonscrites à un quadrilatère, on prendra des coniques inscrites dans un quadrilatère. Une droite quelconque A aura tous ses pôles sur une même droite, dont l'enveloppe sera la transformée de la figure engendrée par A. Un point quelconque de l'une des deux figures aura toutes ses polaires tangentes à une même conique.

Donc, à un point correspond une conique tangente aux droites diagonales du quadrilatère.

A un faisceau de droites correspondent des tangentes à la conique transformées du sommet du faisceau, et le rapport anharmonique de quatre de ces droites, est égal à celui des quatre tangentes correspondantes. A quatre points situés sur une ligne droite D, correspondent quatre coniques inscrites au triangle de référence, et tangentes à la droite D'. *Si, d'un point quelconque de* D' *on mène quatre tangentes à ces coniques, le rapport anharmonique de ces quatre droites est constant.*

3. *Autres transformations*(*). Si on combine la transformation quadratique avec la transformation par polaires réciproques, on obtient d'autres transformations qui, dans certains cas particuliers, peuvent donner des résultats intéressants. Mais, en général, au lieu d'appliquer la transformation résultante, il y aura avantage à faire les transformations successives. On pourra mieux suivre, dans ses diverses phases, le théorème à transformer.

II. Mode de Génération des Courbes ayant un point multiple à l'infini.

1. Il suffit dans la transformation quadratique de supposer un des points A, B, C, à l'infini (*Math.*, VII, p. 130). Mais au lieu de prendre les polaires d'un point par rapport aux coniques circonscrites à un quadrilatère, prenons-les par rapport à un système de cercles ayant même axe radical. Nous supposerons imaginaires, les points d'intersection de ces cercles avec l'axe radical. Alors les trois points A, B, C, sont réels et l'un d'eux est à l'infini. Soient B et C les deux points réels non situés à l'infini. Ces deux points sont les points limites du système de cercles. Nous les considérons comme des cercles de rayon nul, et nous prendrons les polaires du point P par rapport à ces deux cercles; ces droites sont évidemment BP' et CP', respectivement perpendiculaires à BP et à CP.

(*) Voir N. A. M. 1865, (2), IV, p. 393.

De là cette construction facile du point P':

On joint BP et CP et on élève sur ces droites aux points B et C des perpendiculaires qui se coupent en P'.

2. *Transformée d'une droite.* C'est une conique, d'après le mode de description des coniques de Newton. Soit I le point d'intersection de la droite avec BC, le correspondant I' sera le point A situé à l'infini. Quant au point à l'infini de la droite, il aura pour correspondant le point à l'infini de la perpendiculaire abaissée de B ou de C sur la droite donnée. La conique est donc une hyperbole et nous connaissons la direction des asymptotes. Dans le cas où la droite est parallèle à BC, les deux asymptotes coïncident et la courbe est une parabole.

3. *Autre mode de transformation.* Soient deux points B et C; pour avoir le point correspondant de P, on mène par P une parallèle à une direction fixe. Elle coupe BC en p; P' est le point de cette parallèle déterminé par la relation,

$$Pp.P'p = Bp.Cp,$$

ou bien, c'est l'intersection de cette parallèle avec le cercle circonscrit au triangle BPC.

III. Sur la transformation arguesienne de M. Saltel.

1. *Définition.* Soient pris à volonté, dans le plan d'une courbe géométrique Σ d'ordre m : 1° deux coniques S_1 et S_2, 2° un point P.

Par le point P menons une sécante quelconque qui rencontre la courbe Σ en un point μ et les coniques S_1, S_2 en des points (α, α'), (β, β').

Le lieu géométrique du point M homologue au point μ dans l'involution définie par les quatre points (α, α') (β, β'), est l'arguesienne de la courbe Σ par rapport aux deux coniques S_1, S_2 dites de référence et au point P appelé pôle. Soient A, B, C, D les points d'intersection supposés réels de S_1, S_2; on peut prendre pour coniques de référence deux des paires de droites AB et CD, AC et BD, AD et BC.

2. *Transformation arguesienne triangulaire.* Si le point P est situé au point de rencontre de deux cordes communes correspondantes, on a l'homologie harmonique.

Supposons ensuite le pôle P pris en un point quelconque d'une corde commune, par exemple sur AB; comme la transformation peut être définie au moyen du point P et du triangle des droites BD, AC, CD, elle prend,

dans ce cas particulier, le nom de transformation arguesienne triangulaire. Le point P n'est alors jamais un des points doubles de l'involution déterminée par les couples de points (α, α') (β, β').

Il en résulte que si, par le point P, on mène une infinité de sécantes, le lieu géométrique des points doubles des involutions déterminées sur ces sécantes par les coniques S_1 et S_2, est une conique ne passant pas par P.

Donc la transformation arguesienne triangulaire n'est que le premier cas de l'inversion quadrique de M. Hirst, celui où le pôle n'est pas situé sur la conique fondamentale.

3. *Transformation arguesienne dans le cas où P n'est situé sur aucune des sécantes communes à* S_1 *et* S_2. Cherchons encore le lieu des points doubles des involutions déterminées par les coniques S_1 et S_2 sur toutes les sécantes issues de P. Soit P' le point de concours des polaires de P par rapport aux coniques S_1 et S_2. L'involution déterminée sur la droite PP', a pour points doubles les points P et P'; donc le lieu passe par P. Ce sera donc une cubique. Appelons A, B, C, D les quatre points d'intersection des coniques S_1 et S_2; la cubique passera par ces points, qui seront les points de contact des tangentes menées de P à la courbe. Cette courbe est donc une cubique non singulière et elle est parfaitement déterminée.

Cela étant, la transformation peut se définir comme il suit :

L'arguesien du point μ est son conjugué harmonique par rapport aux deux points d'intersection de la droite $P\mu$ avec la cubique. Au point P correspond la conique polaire.

4. *Généralisation de la transformation.* Le transformé du point μ est son conjugué harmonique par rapport aux deux points d'intersection de la droite $P\mu$ avec une courbe d'ordre N dont P est un point multiple d'ordre N — 2.

Afin de pouvoir trouver la transformée d'une droite, nous démontrerons le théorème suivant(*) :

Étant donnée une courbe d'ordre N *ayant un point* P *multiple d'ordre* N — 2, *toute droite menée par ce point est divisée harmoniquement par la courbe et par la première polaire de* P.

(*) Généralisation du n° 169, de SALMON, *Courbes planes* (p. 208, de la trad. française).

Appelons x', y', z' les coordonnées du point P et x'', y'', z'' celles d'un point quelconque Q de la première polaire de P. Un point de la droite PQ aura pour coordonnées,

$$\lambda x' + \mu x'', \quad \lambda y' + \mu y'', \quad \lambda z' + \mu z''.$$

Si $U = 0$ est l'équation de la courbe, le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ sera déterminé par

$$\lambda^n U' + \lambda^{n-1}\mu \Delta U' + \cdots + \frac{\lambda^2 \mu^{n-2}}{1.2\ldots(N-2)} \Delta^{n-2} U'$$
$$+ \frac{\lambda \mu^{n-1}}{1.2\ldots(N-1)} \Delta^{n-1} U' + \mu^n U'' = 0.$$

Mais P étant un point multiple d'ordre $N - 2$ on a

$$U' = \Delta U' = \Delta^2 U' = \cdots = \Delta^{n-3} U' = 0.$$

De plus $\Delta^{n-1} U' = 0$, car Q est un point de la première polaire de P, donc

$$\frac{\lambda^2}{1.2.3\ldots(N-2)} \Delta^{n-2} U' + \mu^2 U'' = 0.$$

Les racines de cette équation étant égales et de signes contraires le théorème est démontré.

5. *Transformée d'une droite.* La droite rencontre la première polaire en $N - 1$ points, donc P est un point de l'ordre $(N - 1)$ sur la transformée. De plus, toute sécante issue du point P, rencontrant la droite en un seul point, ne coupera sa transformée qu'en un seul point différent de P. Donc la transformée est une courbe d'ordre n, ayant P pour point multiple d'ordre $(N - 1)$.

6. Cette transformation générale se ramène à une série de transformations de M. Hirst. En effet, la première transformée d'une droite est une conique passant par P. Changeons de conique fondamentale en conservant le pôle P; alors la transformée de la conique est une cubique ayant le point P pour point double, et ainsi de suite. Après $(N - 1)$ transformations, on aura une courbe de degré N, ayant P comme point multiple d'ordre $(N - 1)$.

SUR LES NORMALES AUX CONIQUES;

par M. G. de Longchamps, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

1. Soient A un point pris sur une conique à centre, P un point quelconque de la normale en A; de P, on peut mener trois autres normales; soient B, C, D les pieds de ces normales.

Étant donnés les points A, P, on peut se proposer de tracer le cercle BCD; c'est le problème que M. Schoute a traité pour les normales d'angle α (*Mathesis*, 1887, p. 41) et dont j'ai indiqué, moi-même, une solution (J. M. S., 1888, p. 47)(*), dans le cas des normales ordinaires.

Quant à déterminer les côtés BC, CD, DB, cela ne se peut avec la règle et le compas, le problème étant du troisième degré.

2. Si nous prenons maintenant une parabole, question soulevée par M. d'Ocagne (*Mathesis*, p. 94), le problème peut être posé dans les termes suivants :

On donne une parabole. En un point A de la courbe, on mène la normale et l'on prend sur cette droite un point quelconque P. Soient PB, PC les deux autres normales issues de P. On demande de tracer 1° le cercle ABC; 2° la corde BC.

Soient H la projection de P sur la tangente menée au sommet O de la parabole, R le milieu de OH. On sait que le cercle ABC passe par les points O, A, R. La première partie du problème est donc résolue.

Pour déterminer la droite BC, M. d'Ocagne a indiqué (*loc. cit.*) une construction très ingénieuse; en voici une qui est peut-être plus simple et qui n'exige que l'emploi de la règle.

Projetons P en K sur l'axe Δ de la parabole et soit I le point où AP

(*) Le cercle BCD passe par le point A diamétralement opposé à A sur le théorème de Joachimsthal et par le point de rencontre O de la conique avec la tangente menée en A à la courbe (théorème de M. de Longchamps). Soient M, N les points de rencontre de la conique avec les axes de symétrie, les tangentes menées à la courbe en M, N aux extrémités des diamètres PM, PN [illegible] aux extrémités de la corde [illegible] théorème de M. de Longchamps). Il ne reste donc à déterminer que la corde BC, lorsque on connaît les points A, P. Nous avons vu que les normales issues de M, C, M, [illegible] par

rencontre Δ. En prenant sur Δ le segment OE égal à IK (et de même *direction*), BC passe par le point E. Comme OA et BC sont antiparallèles par rapport à Δ, la droite BC se trouve ainsi déterminée.

En effet, soient x, y les coordonnées de A ; x_0, y_0 celles de P. On sait que l'équation du cercle ABC est (*)

$$X^2 + Y^2 - X(p + x_0) - \tfrac{1}{2} Y y_0 = 0.$$

Celle de la droite BC antiparallèle à OA est de la forme

$$Yx + Xy + \theta = 0.$$

Donc, on peut poser

$$\lambda(Y^2 - 2pX) + X^2 + Y^2 - X(p + x_0) - \tfrac{1}{2} Y y_0 \equiv \mu(Yx - Xy)(Yx + Xy + \theta).$$

On déduit de là, entre autres conséquences,

$$-\tfrac{1}{2} y_0 = \mu x\theta, \quad 1 = -\mu y^2;$$

par suite, $\theta = py_0$. L'équation de BC est donc

$$Yx + Xy + py_0 = 0.$$

La projection de AI sur Δ étant égale à p, on a

$$\frac{py_0}{y} = KI, \quad \text{etc.}$$

Remarque. On peut aussi observer que BC est perpendiculaire sur RE ; ce qui permet de construire, avec le règle et le compas, la droite BC. La remarque faite ici donne lieu au théorème suivant : *Soit* ABC *un triangle inscrit à une parabole et tel que les normales aux points* A, B, C *soient concourantes, les perpendiculaires élevées aux côtés de ce triangle, aux points où ils rencontrent l'axe, concourent sur la tangente au sommet* (**).

(*) Voici comment M. de Longchamps, dans sa *Géométrie analytique* (p. 481), trouve l'équation du cercle ABC. Les pieds A, B, C des normales issues du point P (x_0, y_0) sont situés sur l'hyperbole équilatère représentée par l'équation $xy + y(p - x_0) - py_0 = 0$. Multipliant cette égalité par y et remplaçant y^2 par $2px$, on obtient $x^2 + x(p - x_0) - \tfrac{1}{2} y_0 y = 0$; si l'on ajoute à cette équation celle de la parabole, on a l'équation indiquée ci-dessus.

(**) Δ est donc la droite de Simson du point R par rapport au triangle ABC. Il résulte de là que, lorsque le point P se meut sur une parallèle à Δ, le triangle ABC est circonscrit à une parabole fixe, ayant R pour foyer et Δ pour tangente au sommet. Plus généralement, lorsque P se déplace sur une courbe du $m^{ième}$ ordre, le triangle ABC est circonscrit à une courbe fixe de la $2m^{ième}$ classe. (J. N.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

9. ***Sur les nombres parfaits*** (Extrait d'une lettre de M. E. CATALAN). Soit $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots l^\lambda$; $a, b, c, \dots, l$ étant ***premiers, impairs***, et rangés par ordre de grandeur ***croissante***. Si N est parfait, on doit avoir, comme l'on sait,

$$\frac{a}{a-1}\frac{b}{b-1}\cdots\frac{l}{l-1} > 2, \tag{1}$$

ou

$$\frac{a-1}{a}\frac{b-1}{b}\cdots\frac{l-1}{l} < \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Soit $P(l)$ le premier membre de la seconde inégalité. La ***Théorie des Nombres***, de Legendre, contient une table des valeurs de $P(l)$, prolongée jusqu'à $l = 1229$(*). Soit Q_n le produit de n facteurs, choisis parmi

$$\frac{a-1}{a}, \quad \frac{b-1}{b}, \quad \dots, \quad \frac{l-1}{l}.$$

Il est visible que : 1° le minimum de Q_1 est $P(a) = \frac{a-1}{a} = \frac{2}{3}$; 2° le minimum de Q_2 est $P(b) = \frac{a-1}{a}\cdot\frac{b-1}{b} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{15}$; etc. En effet, nous avons :

$$1 - \frac{1}{a} < 1 - \frac{1}{b} < 1 - \frac{1}{c} \dots.$$

Cela posé, considérons un nombre parfait, impair, premier avec 3, 5 et 7. Alors on doit avoir

$$\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdots < \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire,

$$P(l) < \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7} \text{ ou } \frac{8}{35} \text{ ou } 0{,}2285\dots.$$

D'après la table, cette condition suppose $l \geqq 127$.

(*) Le produit $P(l)$ a pour limite zéro (Voir, par exemple, les *Exercices d'Analyse numérique*, par LEBESGUE, p. 138).

En conséquence, *si un nombre* N, *premier avec* 105, *est parfait, il est composé d'au moins vingt-six facteurs premiers, inégaux.*

Le logarithme du produit 11.13.17...109.113 est compris entre 44 et 45. Donc *tout nombre parfait, impair, premier avec* 105, *a au moins quarante-cinq chiffres!*

BIBLIOGRAPHIE.

Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure, par M. J. Koehler, répétiteur à l'École polytechnique. Questions et solutions à l'usage des candidats aux écoles polytechnique et normale et à l'agrégation. Deux volumes in-8°, avec figures. — Première partie : Géométrie plane, 1886, VI-347 pages; prix : 9 fr. — Deuxième partie : Géométrie dans l'espace, 1888, 372 pages; prix, 9 fr.

L'auteur a voulu essayer d'introduire en France un recueil de problèmes classiques, basé sur l'exemple déjà suivi en Angleterre où ce genre de livres est très-apprécié depuis longtemps. C'est ainsi que l'ouvrage de M. Wolstenholme, cité et mis à profit par M. Koehler, renferme plus de 2000 exercices ou problèmes donnés aux élèves de l'Université de Cambridge. La publication des solutions développées des questions que propose l'*Educational Times*, donne aussi chaque semestre un recueil fort utile à l'enseignement mathématique de l'Angleterre; il n'est peut-être pas de pays où les problèmes trouvent autant de faveur comme méthode pédagogique. Il y a donc à approuver toute nouvelle tentative dans cette voie, et c'est pourquoi nous croyons devoir appeler l'attention de nos lecteurs sur l'ouvrage que nous venons d'annoncer.

La première partie a été analysée dans *Mathesis*, t. VII, p. 115. La deuxième renferme sept chapitres relatifs à la géométrie de l'espace suivant une progression offrant quelque analogie avec l'ordre adopté dans le premier volume.

I. *Sphère*. 18 questions relatives à des systèmes de sphères.

II. *Cônes et cylindres du second degré*. Propriétés des lignes focales du cône. 38 questions.

III. *Quadriques rapportées à leurs axes*. 26 questions sur les plans tangents, les cônes et les cylindres circonscrits, 24 sur les diamètres et les plans diamétraux conjugués

IV. *Sections planes des quadriques. Génératrices rectilignes*. 42 questions dans la solution desquelles nous rencontrons un fréquent usage des équations d'une génératrice rectiligne de l'hyperboloïde

$$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\sin\alpha+\cos\alpha,\quad \frac{y}{b}=-\frac{z}{c}\cos\alpha+\sin\alpha,$$

dont la forme est particulièrement avantageuse dans les applications.

V. *Problèmes sur les normales. Propriétés focales des quadriques. Quadriques homofocales*. Important chapitre qui renferme 51 questions.

VI. *Quadriques représentées par l'équation générale du second degré. Théorèmes et lieux géométriques divers.* 47 questions dont plusieurs, bien classiques, doivent être recommandées à l'attention des candidats. Elles sont toutes résolues avec élégance et clarté.

Ces deux chapitres renferment un certain choix de problèmes de concours généraux, d'agrégation et d'admission aux écoles.

VII. *Coordonnées tétraédriques.* Monographie de 77 pages, consacrée à l'étude des coordonnées tétraédriques. L'auteur expose, d'abord, les formules fondamentales relatives à la droite, au plan et aux quadriques; il traite ensuite 20 questions, servant d'applications des coordonnées tétraédriques. Il signale, incidemment, l'extension de propriétés du triangle au tétraèdre harmonique (ou isodynamique).

Les solutions sont, en général, très bien présentées. Quelques-unes pourraient être plus simples : par exemple, à la page 2 le déterminant (2) mis sous la forme d'un déterminant du cinquième ordre se ramène facilement au déterminant (1); pour les problèmes des pages 10 et 11, Salmon indique une méthode plus intuitive; la question 8, page 9, se ramène à une proposition connue, si l'on observe que la sphère coupant deux autres suivant deux grands cercles devient orthogonale à celles-ci pourvu que l'on en échange les rayons (les dernières phrases de la question 8 renferment une faute d'inattention). On peut regretter l'absence de renseignements bibliographiques à propos de plusieurs questions importantes. Il existe aussi quelques lacunes : les concours d'agrégation ont déjà proposé des questions sur les complexes et sur les cyclides.

Malgré ces légères critiques, nous n'hésitons pas à recommander l'ouvrage de M. Koehler comme devant rendre de grands services aux géomètres, aux professeurs et aux élèves. (J. N.)

Nous nous empressons de signaler à nos lecteurs deux ouvrages importants qui viennent de paraître.

1. « Companion to the Weekly Problem Papers, intended for the Use of Students preparing for Mathematical Scholarships and for the Junior Members of the Universities who are reading for mathematical honours, » by J. MILNE, M. A., London, Macmillan and C°. Un vol. in-8° de XXVIII-340 pages.

Ce livre, dont l'*Educational Times* vient de publier un compte-rendu très-élogieux, contient un excellent exposé de la géométrie récente (80 pages) par le Rev. T. C. Simmons.

2. « A Treatise on Plane Trigonometry Containing an Account of Hyperbolic Functions, with Numerous Examples; » by JOHN CASEY, LL. D., F. R. S., Professor of the Higher Mathematics and Mathematical Physics in the Catholic University of Ireland. Dublin : Hodges, Figgis and Co. London, Longmans, Green, and Co. Un volume in-8° de XVI-276 pages.

Ce traité se recommande sous tous les rapports. Théorie rigoureuse, recueil d'exercices variés et nombreux, applications numériques, répertoire complet de toutes les formules ou questions présentant quelque intérêt.

SUR L'HYPERBOLE Γ′;

par M. Fuhrmann, professeur à Königsberg (Prusse).

Aux propriétés signalées dans *Mathesis*, t. VIII, p. 81, on peut ajouter les suivantes qui rappellent, à certains égards, les rôles du premier triangle de Brocard et du point de Tarry dans l'hyperbole de Kiepert.

Soient A_f, B_f, C_f les symétriques de l'orthocentre H de ABC par rapport aux médiatrices OA′, OB′, OC′. Le triangle $A_fB_fC_f$, inscrit dans une circonférence de centre O et de rayon OH, est inversement semblable à ABC. Les droites AA_f, BB_f, CC_f concourent en un point F de l'hyperbole Γ′. Les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur B_fC_f, C_fA_f, A_fB_f concourent au point ε, intersection de l'hyperbole Γ′ avec la circonférence ABC. L'axe d'homologie des triangles ABC, $A_fB_fC_f$ est perpendiculaire à la droite Fε.

Note. Soient $A_hB_hC_h$ le triangle orthocentrique, $A_pB_pC_p$ le triangle anticomplémentaire de ABC (B_pC_p est la parallèle à BC menée par A, etc.), H_p l'orthocentre de $A_pB_pC_p$. Les milieux A_i, B_i, C_i de A_pH_p, B_pH_p, C_pH_p sont les symétriques de A, B, C par rapport à O; les projections A_λ, B_λ, C_λ de A_p, B_p, C_p sur BC, CA, AB sont les isotomiques de A_h, B_h, C_h, de sorte que les droites AA_λ, BB_λ, CC_λ concourent en un point Λ, point de Lemoine de $A_pB_pC_p$.

Désignons, comme précédemment, par $A_tB_tC_t$ le triangle que forment les tangentes menées en A, B, C au cercle ABC, et soit $\alpha\beta\gamma$ un triangle quelconque homothétique à $A_tB_tC_t$ par rapport à O. Les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ rencontrent les hauteurs A_pH_p, B_pH_p, C_pH_p du triangle anticomplémentaire en trois points α', β', γ' qui se correspondent dans trois ponctuelles semblables dont deux triples homologues sont (A_i, B_i, C_i), $(A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda)$. Un troisième triple de ces ponctuelles est formé par les points $A_fB_fC_f$ considérés ci-dessus; ces points sont les symétriques de A_h, B_i, C_i par rapport aux côtés de ABC. Les coordonnées barycentriques de F sont tang 2A, tang 2B, tang 2C.

La considération des groupes α', β', γ', à la place des groupes α, β, γ nous paraît, au premier abord, présenter des avantages dans l'étude de l'hyperbole Γ′. Comme les perpendiculaires abaissées des sommets du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ sur les côtés de ABC concourent en un même point H_p, les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur les côtés correspondants du

triangle $\alpha'\beta'\gamma$ concourent également en un même point μ. On peut, par un raisonnement analogue à celui que nous avons indiqué dans l'article de M. M'Cay sur l'hyperbole de Kiepert (*Mathesis*, t. VII, p. 210, note) démontrer que le point μ appartient également à l'hyperbole Γ'.

Les triangles $A_AB_AC_A$, $\alpha\beta\gamma$ ont pour centre d'homothétie un point de la droite OH. Il y a, sans doute, à tirer parti de cette remarque.

A est le point de Lemoine de $A_pB_pC_p$; H le centre du cercle circonscrit; donc la circonférence décrite sur AH comme diamètre rencontre les lignes AH, BH, CH aux sommets du triangle de Brocard de $A_pB_pC_p$. La circonférence décrite sur HH_p comme diamètre rencontre les hauteurs de $A_pB_pC_p$ aux points $A_fB_fC_f$, et les hauteurs de ABC aux sommets d'un triangle symétrique de $A_fB_fC_f$ par rapport à O. De là, on conclut facilement que les côtés homologues du triangle $A_fB_fC_f$ et du triangle de Brocard de $A_pB_pC_p$ sont dans le rapport de $HH_p : HA = HO : OK$ et font entre eux un angle égal à 2HOK. (J. NEUBERG.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

*Question 333.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 94.)

Démontrer l'identité

$$(-1)^n\frac{a_1a_2\cdots a_n}{b_1b_2\cdots b_n}+\frac{(a_1-b_1)(a_2-b_1)\cdots(a_n-b_1)}{b_1(b_1-b_2)(b_1-b_3)\cdots(b_1-b_n)}+$$
$$\frac{(a_1-b_2)(a_2-b_2)\cdots(a_n-b_2)}{b_2(b_2-b_1)(b_2-b_3)\cdots(b_2-b_n)}+\cdots+\frac{(a_1-b_n)(a_2-b_n)\cdots(a_n-b_n)}{b_n(b_n-b_1)(b_n-b_2)\cdots(b_n-b_{n-1})}=(-1)^n.$$

(BARBARIN.)

Les identités de ce genre se rattachent très simplement à la théorie des fractions rationnelles.

Les quantités $b_1, b_2, \ldots$ étant supposées différentes, faisons

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)}=1+S\frac{A_p}{x-b_p}. \qquad (1)$$

Pour déterminer les coefficients $A_1, A_2, \ldots$, chassons les dénomina-

teurs de cette égalité, puis faisons successivement $x = b_1$, b_2, ... Il vient

$$A_p = \frac{(b_p - a_1)(b_p - a_2)\cdots(b_p - a_n)}{(b_p - b_1)\cdots(b_p - b_{p-1})(b_p - b_{p+1})\cdots(b_p - b_n)}.$$

Substituant dans (1) et posant ensuite $x = 0$, nous aurons l'identité proposée.

Il existe une identité analogue entre m quantités a_1, a_2, ..., a_m et n quantités b_1, b_2, ..., b_n, n étant plus grand m; avec cette différence que le premier terme est

$$(-1)^m \frac{a_1 a_2 \cdots a_m}{b_1 b_2 \cdots b_n},$$

et que le deuxième membre est 0.

M. Mosnat a résolu la même question en faisant voir que les coefficients de l'identité ordonnée par rapport aux quantités a_1, a_2, ... sont nuls. Le coefficient de $a_1 a_2 \ldots a_{n-p}$, par exemple, est

$$\frac{b_1^{p-1}}{(b_1 - b_2)\cdots(b_1 - b_n)} + \cdots + \frac{b_n^{p-1}}{(b_n - b_1)\cdots(b_n - b_{n-1})}\ (*);$$

décomposons en fractions simples les différentes fractions qui y entrent, en prenant pour variable respectivement b_1, b_2, ... b_n, etc. (J. N.)

Question 440.

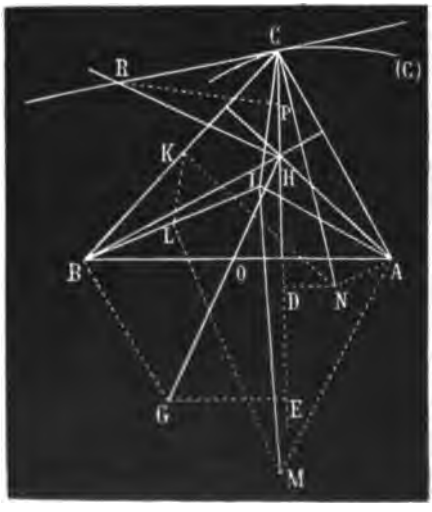
(Voir *Mathesis*, t. V, p. 119.)

Deux sommets A, B *d'un triangle sont fixes, et le troisième sommet* C *décrit une courbe donnée* (C). *Trouver, par la méthode de Roberval, la tangente aux lieux décrits par l'orthocentre* H, *le centre* I *du cercle inscrit, et le centre* ω *du cercle des neuf points.* (J. Neuberg.)

Solution par M. Meurice. I. On peut décomposer la vitesse de H sur sa trajectoire: 1° en une vitesse de circulation autour de B et une vitesse de glissement suivant HB; 2° en deux vitesses respectivement parallèle et perpendiculaire à AB. Pour déterminer les relations entre quelques-unes de ces composantes, nous opérons deux décompositions analogues

(*) Comparer Bertrand, *Algèbre*, 2e partie, décomposition des fractions rationnelles, exercice I.

de la vitesse de C : 1° une vitesse de circulation autour de A et une vitesse de glissement suivant CA ; 2° en deux vitesses respectivement parallèle et perpendiculaire à AB. Les constructions gagnent en simplicité, si nous tournons toutes les vitesses d'un angle droit autour de leurs points d'application. D'après cela, la vitesse de circulation de C autour de A étant représentée par le rayon vecteur CA, la perpendiculaire élevée en A sur CA intercepte sur la normale CN à la courbe (C) un segment CN qui figure la vitesse totale de C; la parallèle ND à AB fait connaître les grandeurs des composantes CD, DN parallèle et normale à AB.



Or les droites AC, BH étant perpendiculaires, leurs vitesses angulaires sont égales : donc puisque la vitesse de circulation de C autour de A est représentée par CA, celle du point H autour de B l'est par HB. La droite CH se déplace parallèlement à elle-même ; donc les points C et H ont même vitesse parallèlement à AB. En conséquence, si l'on prend HE = CD, la règle du quadrilatère des vitesses fait connaître la vitesse de H. Il suffit donc de mener en B et E des perpendiculaires BG, EG à HB, HE, et HG sur la normale à la trajectoire de H.

II. Les bissectrices des angles CBA, CAB ont des vitesses angulaires égales aux moitiés de celles des droites BC, AC. Or la vitesse de C étant représentée par le segment CN de la normale à sa trajectoire, les vitesses de circulation de C autour des pôles A et B sont représentées par les projections de CN sur CA et CB, soit par CA et CK. Les vitesses de circulation de I autour des mêmes pôles s'obtiennent en modifiant celles du point I respectivement dans les rapports BI : 2BC, AI : 2AC. Donc si l'on mène KL parallèle à CI, les doubles des vitesses de circulation de I sont IA, IL. Élevons les droites LM, AM perpendiculaires à LI et IA ; la droite IM sera, d'après la règle du quadrilatère des vitesses, la normale à la trajectoire de I.

III. Soient P le milieu de CH, O celui de AB. On sait que ω est au milieu de OP, de sorte que les tangentes aux lieux décrits par ω et P sont parallèles. Mais si C′, P′, H′ sont d'autres positions des points C, P, H, on voit facilement que les droites CC′, PP′, HH′ sont concourantes, d'où l'on tire aisément que les tangentes en C, P, H aux lieux de ces points se coupent en un même point R. Il reste donc à mener par ω une parallèle à PR, pour avoir la tangente à la trajectoire de ω.

Question 446.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 144.)

A un cercle donné O *on inscrit un triangle quelconque* ABC *dont deux côtés* AB, AC *ont des directions invariables. Démontrer* 1° *que l'orthocentre* H, *le centre* M *du cercle des neuf points, et les pieds des hauteurs* BB′, CC′ *décrivent des ellipses;* 2° *que la hauteur* AA′ *enveloppe une hypocycloïde*(*). (J. Neuberg.)

Solution par MM. Gob *et* Meurice. Menons OX, OY parallèles aux bissectrices de l'angle BAC; ces droites sont fixes. Soient E, F les points de rencontre de la hauteur AA′ avec OX, OY. Les angles OAA′, BAC ayant les mêmes bissectrices, on a OA = AE = AF; donc EF est une droite de longueur constante glissant entre deux axes rectangulaires. Il résulte de là que AA′ enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements, et que le point H, situé à une distance constante du milieu A de cette droite (AH est double de la distance de O au milieu N de la corde BC, laquelle a une longueur constante) décrit une ellipse dont les demi-axes ont pour longueurs OA ± 2ON.

Le milieu M de OH décrit également une ellipse. Il en est de même du centre de gravité G du triangle ABC.

Les côtés de l'angle BB′C ont des directions invariables. Soient OX′, OY′ des parallèles aux bissectrices de cet angle; ces droites font aussi le même angle avec la médiane B′N et la hauteur du triangle rectangle BB′C. Donc si E′, F′ sont les points de rencontre de NB′ avec OX′, OY′ on a ON = NE′ = NF′, NB′ = $\frac{1}{2}$ BC. Par conséquent, B′ est un point d'une droite E′F′ de longueur invariable qui glisse entre deux axes rectangulaires.

(*) Énoncé rectifié. Le lieu de M nous a été signalé par M. Blondeel. (J. N.)

NOTES. 1° Les milieux B'', C'' de AC, AB décrivent deux droites OB'', OC''; la longueur B''C'' est invariable, et le triangle MB''C'' est de forme constante. Donc M décrit une ellipse (Démonstration de MM. BLONDEEL et DÉPREZ).

2° La première partie de la question résulte du théorème suivant qui a été le sujet du concours d'admission à l'école normale supérieure de Paris, en 1862 et dont M. Barbarin a donné une démonstration géométrique très simple dans *Mathesis*, t. IV, p. 13 :

BC *est une corde de longueur constante, mobile dans une circonférence donnée* O. *On tire les droites* BM, CM *parallèles à deux directions fixes. Le lieu de* M *est une ellipse.*

3° La génération suivante des hypocycloïdes ou des épicycloïdes est souvent utile dans les applications :

Une corde AB *se meut dans une circonférence, de manière qu'il existe un rapport constant entre les vitesses de ses extrémités ou entre la vitesse de l'une des extrémités et la vitesse angulaire de la corde. L'enveloppe de cette droite est une hypocycloïde ou une épicycloïde.*

4° M. DÉPREZ, de Dinant, généralise ainsi la première partie de la question :

A une conique donnée, on inscrit un triangle ABC *dont deux côtés* AB, AC *ont des directions invariables; trouver le lieu du centre de gravité, de l'orthocentre, des pieds des hauteurs* BB',CC', *du centre du cercle des neuf points*, etc.

Soit $Ay^2 + Bxy + Cx^2 = D$ l'équation de la conique rapportée à des axes parallèles à AB, AC fesant entre eux un angle θ. Notre honorable collègue trouve les résultats suivants :

1° Pour le centre de gravité.

$$(Ay+Bx)^2 C+(Ay+Bx)(By+Cx)B+(By+Cx)^2 A=\frac{D}{9AC}(AC-B^2)^2.$$

2° Pour le point B'

$$\frac{A(y+2x\cos\theta)^2}{C'^2}+\frac{Bx(y+2x\cos\theta)}{C'}+Cx^2=D,$$

pourvu que l'on fasse

$$C'=1-\frac{B}{C}\cos\theta,\quad A'=1-\frac{B}{A}\cos\theta.$$

3° Pour l'orthocentre

$$A\,[A'(y + x\cos\theta) - \cos\theta\,(x + y\cos\theta)]^2 + \cdots = D\,(A'C' - \cos^2\theta)^2.$$

4° Le centre du cercle des neuf points et celui du cercle circonscrit décrivent également des coniques.

Question 462.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 192.)

Une conique passe par quatre points fixes O, A, B, C. *Trouver le lieu du centre du cercle osculateur au point* O. (V. JAMET.)

Solution par MM. BROCARD, PISANI, VERNIORY *et* DÉPREZ. Prenons pour axes OA et une perpendiculaire OY. L'équation de la conique est de la forme

$$Ay^2 + Bxy + Dy + x(x - a) = 0, \qquad (1)$$

a étant l'abscisse du point A. Les coordonnées du centre de courbure au point (x, y) vérifient les équations

$$x - \alpha + (y - \beta)\,y' = 0, \quad 1 + y'^2 + (y - \beta)\,y'' = 0,$$

d'où, en supposant le point d'osculation à l'origine,

$$y' = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad y'' = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^3}.$$

De l'équation (1), on déduit aussi pour les valeurs de y' et y'' au point (0, 0),

$$y' = \frac{a}{D}, \quad y'' = -2\,\frac{Aa^2 + BDa + D^2}{D^3},$$

de sorte que

$$D\alpha + a\beta = 0, \quad D^2(\alpha^2 + \beta^2) + 2\beta^2(Aa^2 + BDa + D^2) = 0. \qquad (2)$$

Si (x_1, y_1), (x_2, y_2) sont les coordonnées de B, C, on a aussi les équations de condition

$$Ay_1^2 + Bx_1y_1 + Dy_1 + x_1(x_1 - a) = 0, \quad Ay_2^2 + Bx_2y_2 + Dy_2 + x_2(x_2 - a) = 0.$$

Entre celles-ci et les égalités (2), il est facile d'éliminer A, B, D; on trouve

$$x^2 + y^2 = 2\,\frac{y_1(a - x_2) - y_2(a - x_1)}{ay_1y_2\,(x_1y_2 - x_2y_1)}\,x\left\{x_1x_2x^2 - (x_1y_2 + x_2y_1)xy + y_1y_2y^2\right\};$$

Le lieu est donc une cubique. L'origine est un point isolé; les tangentes en ce point ont pour coefficient angulaire $\pm\sqrt{-1}$, de sorte que l'origine est un foyer. Les asymptotes sont perpendiculaires à OA, OB, OC; la première a pour équation

$$x = \frac{a(x_1y_2 - x_2y_1)}{2(ay_1 - ay_2 - y_1x_2 + y_2x_1)}.$$

Pour discuter plus complétement l'équation du lieu, on peut la résoudre par rapport à y.

Cas particuliers (Verniory). 1° Supposons que les coniques passent par trois points fixes O, A, B et touchent en B une droite donnée $y = mx + n$. Si l'on remplace y_1 et y_2 par $mx_1 + n$, $mx_2 + n$ et qu'on fasse, après les simplifications, $x_1 = x_2$, il vient

$$x^2 + y^2 = 2\frac{y_1 - m(x_1 - a)}{ay_1^2(y_1 - mx_1)}x(x_1^2x^2 - 2x_1y_1xy + y_1^2y^2).$$

2° Si l'on fait $a = 0$, les coniques passent par deux points fixes B, C et touchent une droite fixe OX en un point donné. On trouve

$$x = 0, \quad y = \frac{y_1}{x_1}x, \quad y = \frac{y_2}{x_2}x,$$

solutions qui correspondent, respectivement, aux coniques proprement dites du faisceau considéré, et au système des droites OA, OB.

Question 546.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 280.)

Étant données une courbe (C) *et deux points fixes* O *et* A, *on porte sur un rayon vecteur quelconque* OC *de la courbe une longueur* CD *telle que le triangle* ACD *ait une surface constante* K^2. *Trouver* 1° *l'équation de la courbe* (D); 2° *la tangente à cette ligne par une construction géométrique. Le lieu de* D *est une conchoïde de Nicomède, quand* C *est un cercle, de centre* O; *il se compose de deux hyperboles, quand* (C) *est une droite.*

(Méuricr.)

Solution par MM. Deroussseau, professeur à l'Athénée de Liége, Déprez *et* Gob, élève de l'École normale des Sciences (Gand). 1° Prenons sur OD

une longueur OD′ = CD; les triangles OAD′, ADC étant équivalents, le point D′ parcourt une droite (D′), parallèle à OA et distante de OA de la quantité ($2K^2 : OA$) = h. La courbe (D) est donc susceptible de la définition suivante :

On donne une droite (D′) *et une ligne* (C). *Une sécante quelconque menée par le point fixe* O *les rencontre aux points* D′ *et* C. *On porte sur cette sécante,* CD = OD′.

Si l'on prend pour pôle O et pour axe polaire OA, l'équation de (D) est

$$\rho = f(\theta) \pm \frac{h}{\sin\theta},$$

pourvu que celle de (C) soit $\rho = f(\theta)$.

2° Si la courbe (C) est une circonférence de centre O, la droite D′D, égale à OC, est constante; donc le lieu de D′ est une conchoïde de la droite (D′).

Prenons pour (C) une droite; l'équation de (D) sera de la forme

$$\rho = \frac{p}{a\cos\theta + b\sin\theta} \pm \frac{h}{\sin\theta},$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$(ax + by)(x \mp h) - py = 0,$$

équation de deux hyperboles dont les asymptotes sont respectivement (D′) et (C), ou (C) et une droite symétrique de (D′), par rapport à (O).

On peut établir géométriquement ce résultat, en s'appuyant sur ce théorème qu'une hyperbole et ses asymptotes déterminent sur une sécante quelconque deux segments égaux. (J. N.)

3° *a*) Soit CE la tangente à la courbe donnée (C). Faisons glisser le point C sur cette droite; le point correspondant D glissera sur une hyperbole à laquelle on peut construire la tangente en un point D, lorsqu'on en connaît les asymptotes. (Gob.)

b) Supposons qu'un rayon vecteur infiniment voisin de OC rencontre les lignes (D′), (C), (D) en d', c, d. Menons la droite CF parallèle et égale à Od'; Fd sera parallèle à la corde Cc, et DF parallèle à la droite (D′). En passant à la limite, on voit que la tangente en D est parallèle au troisième côté d'un triangle DF_1d_1 dont deux côtés DF_1, F_1d_1 sont parallèles à la droite (D′) et à la tangente en C à (C); les longueurs DF_1, F_1d_1

sont dans un rapport égal à la limite du rapport des cordes D'd', Cc déterminées dans (D) et (C) par deux rayons vecteurs infiniment voisins OC, Oc. Or, si M est le point de rencontre des droites D'd', Cc, le triangle MCD' coupé par la transversale cd donne

$$\frac{D'd'}{d'M}\cdot\frac{Mc}{cC}\cdot\frac{CO}{D'O}=1,$$

d'où

$$\lim\frac{D'd'}{cC}=\frac{D'M.D'O}{CM\ CO}=\frac{\sin C}{\sin D'}\cdot\frac{DC}{DD'}=\frac{DH}{DK},$$

H et K étant les projections de O sur les droites MC, MD'.

Par conséquent, si l'on mène DF_1 parallèle à (D') et égale à DH, F_1d_1 parallèle à la tangente en C à la courbe donnée, et égale à DK, Dd_1 est la tangente cherchée. (Dérousseau.)

c) Si les points se suivent dans l'ordre OD'CD, O$d'cd$, les droites D'd' et Cc sont des transversales réciproques du triangle ODd et rencontrent Dd en deux points équidistants du milieu de Dd. Si l'on passe à la limite, on trouve que la droite (D') et la tangente en C rencontrent la tangente en D en deux points équidistants de D, propriété qui ramène la construction de la dernière tangente à un problème connu.

Si l'ordre des points était autre, la droite (D') et la tangente en D deviendraient des transversales réciproques du triangle OCc.

(D'après M. de Longchamps.)

d) Si entre les rayons vecteurs ρ, ρ_1, ρ_2 de trois courbes, on a une relation de la forme $\rho = a\rho_1 + b\rho_2$, les sous-normales ont entre elles la même relation : $\rho' = a\rho'_1 + b\rho'_2$. D'où un procédé pour obtenir la normale à l'une de ces courbes, lorsqu'on connaît les normales aux deux autres courbes.

×Question 562.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 76.)

Démontrer les formules

$$u_n = 2^{n-1} - 2^{n-3}C_{n-2,1} + 2^{n-5}C_{n-3,2} - \cdots$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3} = 1 - C_{n-1,1} + C_{n-2,2} - C_{n-3,3} + \cdots \text{ (Ed. Lucas.)}$$

Solution par M. Stuyvaert (Bruxelles). Ces formules se vérifient

immédiatement pour $n = 1$, $n = 2$. Supposons-les vraies pour n et $n + 1$ et démontrons qu'elles subsistent encore pour $n + 2$.

1° Soit $n = 2p$. Par hypothèse,

$$n = 2^{n-1} - 2^{n-3}C_{n-2,1} + 2^{n-5}C_{n-3,2} \cdots + (-1)^p 2C_{n-p,p-1}$$
$$2(n+1) = 2^{n+1} - 2^{n-1}C_{n-1,1} + 2^{n-3}C_{n-2,2} - \cdots + (-1)^p 2C_{n-p,p}.$$

Retranchons la première égalité de la seconde; en réduisant au moyen de la relation

$$C_{n,k} = C_{n-1,k} + C_{n-1,k-1}, \qquad (1)$$

on trouve la formule proposée pour $n + 2$.

La vérification se fait de la même manière pour $n = 2p + 1$; les derniers termes des valeurs précédentes de n et $2(n + 1)$ seront alors

$$(-1)^{p-1}2^2C_{n-p,p-1} + (-1)^p C_{n-p-1,p}, \quad (-1)^p . 2^2 C_{n-p,p}.$$

2° Soient, pour $n = 2p$,

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3} =$$
$$1 - C_{n-1,1} + C_{n-2,2} - C_{n-3,3} + \cdots + (-1)^{p-1}C_{n-p+1,p-1} + (-1)^p C_{n-p,p},$$
$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{(n+1)\pi}{3} =$$
$$1 - C_{n,1} + C_{n-1,2} - C_{n-2,3} + C_{n-3,4} - \cdots + (-1)^p C_{n-p+1,p}.$$

Retranchons la première égalité de la seconde et réduisons au moyen de la relation (1). Dans le premier membre, nous aurons

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\sin\frac{(n+1)\pi}{3} - \sin\frac{n\pi}{3}\right] = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{(n+2)\pi}{3},$$

comme on le vérifie sans peine en faisant successivement $n = 3q$, $3q + 1$, $3q + 2$; dans le second membre, nous aurons

$$1 - C_{n+1,1} + C_{n,2} - C_{n-1,3} + \cdots + (-1)^p C_{n-p+2,p} + (-1)^{p+1} C_{n-p+1,p+1}.$$

La formule est donc vraie pour $n + 2$.

La vérification est analogue pour $n = 2p + 1$ (*).

(*) Comparez N. C. M., t. II, p. 74. (J. N.)

Question 564.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 76).

Dans quel rapport la parabole ayant pour équation $y^2 = 2px$ ***partage-t-elle l'ellipse représentée par*** $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$?

Solution par M. Emmerich. Soient AA', BB' les axes de l'ellipse, O le centre, C et D les points d'intersection des deux courbes, C' et D' les points correspondants de la circonférence décrite sur AA' comme diamètre, φ l'angle C'OA et x, y les coordonnées de C. La corde commune CD limite un segment parabolique COD qui a pour mesure $\frac{4}{3}xy$. Le segment elliptique CAD est au segment circulaire C'AD' dans le rapport $(a : b)$; le secteur circulaire C'OD'AC' et le triangle C'OD' ayant pour mesure $\frac{\pi a^2 \varphi}{180}$ et $\frac{1}{2}a^2 \sin 2\varphi$, on a

$$\text{aire CODA} = \frac{b}{a}\left(\frac{\pi a^2 \varphi}{180} - \frac{1}{2}a^2 \sin 2\varphi\right) + \frac{4}{3}xy = \frac{\pi ab\varphi}{180} + \frac{1}{3}xy.$$

En retranchant cette aire de celle de l'ellipse entière, on obtient pour le rapport cherché

$$\frac{\text{aire CODA}}{\text{aire CODA'C}} = \frac{\left(1 - \frac{\varphi}{180}\right)\pi ab - \frac{1}{3}xy}{\frac{\pi ab\varphi}{180} + \frac{1}{3}xy}.$$

Les quantités x, y, φ sont déterminées par les égalités

$$x = \frac{a^2}{b^2}(-p + \sqrt{a^2p^2 + b^4}), \quad y^2 = 2px, \quad x = a\cos\varphi.$$

M. Couturiaux nous a envoyé une bonne solution de la même question, par les intégrales elliptiques, en supposant qu'il s'agisse, dans l'énoncé du problème, non de l'aire, mais de la longueur de l'ellipse.

Question 586.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 207).

Sur les côtés AC, BC ***d'un triangle*** ABC, ***on prend*** AD = BE. ***Si, la base*** AB ***étant fixe, le sommet*** C ***décrit une circonférence passant par les extrémités de cette base, le point*** M, ***milieu de la droite*** DE, ***décrit une circonférence ayant pour centre le milieu de*** AB. (E. CATALAN.)

Solution géométrique par MM. CL. THIRY, MEURICE, MINEUR, DÉPREZ, MANDART *et* GHUYS. Construisons les parallélogrammes ADMF, BEMG; les lignes AF et BG étant égales et parallèles, la droite FG passe par le milieu I de AB, et FI = IG. L'angle ACB étant constant, le triangle FMG a une forme constante; donc la hauteur IM est invariable (= AD cos $\frac{1}{2}$ C), et M décrit une circonférence.

Solution analytique par MM. LAMBOTTE (Solières), EMMERICH *et* GHUYS. Prenons pour axes AB et la perpendiculaire au milieu I de AB, et posons

$$AB = 2c, \quad AD = l, \quad CAB = A, \quad CBA = B.$$

Les coordonnées de D et E seront (B étant sur l'axe des x positifs),

$$c - l\cos B, \quad l\sin B; \quad -c + l\cos A, \quad l\sin A,$$

d'où celles de M, savoir :

$$x = \tfrac{1}{2}l(\cos A - \cos B), \quad y = \tfrac{1}{2}l(\sin A + \sin B).$$

Par conséquent

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}l^2(2 + 2\cos C) = l^2\cos^2\frac{C}{2},$$

ce qui est l'équation du lieu.

QUESTIONS D'EXAMEN.

363. Résoudre le système

$$x(y + z + xyz) = a, \quad y(z + x + yzx) = b, \quad z(x + y + zxy) = c.$$

Écrire $(xy + 1)(xz + 1) = a + 1$, etc. (EMMERICH.)

364. On donne la projection horizontale *abcd* d'un quadrilatère plan ABCD et les projections verticales a', b', c' de A,B,C. Trouver la projection verticale de D.

365. Une droite étant donnée par ses projections, trouver les projections horizontale et verticale de sa projection sur le second plan bissecteur.

366. Deux droites AB, CD étant données par leurs projections, trouver sur AB un point d'où l'on voit CD sous un angle droit.

367. Déterminer l'angle x par la condition que la somme de la progression indéfinie

$$\sin x + 2 \sin x \cos x + 4 \sin x \cos^2 x + \ldots$$

soit égale à $2\sqrt{2}$.

368. Dans tout triangle ABC,

$$2(\operatorname{tg} \tfrac{1}{4} A + \cot \tfrac{1}{4} A) - \cot \tfrac{1}{4} A (1 - \operatorname{tg} \tfrac{1}{4} A)(1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{4} B)(1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{4} C) = 1 + 2(\operatorname{tg} \tfrac{1}{4} A + \operatorname{tg} \tfrac{1}{4} B + \operatorname{tg} \tfrac{1}{4} C)$$ (E. CATALAN.)

Cette relation ne peut être distincte de la suivante

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{4}(A + B + C) = 1 = \frac{S \operatorname{tg} \tfrac{1}{4} A - \operatorname{tg} \tfrac{1}{4} A \operatorname{tg} \tfrac{1}{4} B \operatorname{tg} \tfrac{1}{4} C}{1 - S \operatorname{tg} \tfrac{1}{4} A \operatorname{tg} \tfrac{1}{4} B}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

613. Trois circonférences ω, ω', ω'' ont une corde commune AB. Démontrer qu'il existe une infinité d'hexagones CC'C''DD'D'' dont les sommets opposés C et D, C' et D', C'' et D'' sont situés, respectivement, sur les circonférences ω, ω', ω'' et dont les côtés passent alternativement par A et B.

Transformer la proposition par projection centrale, par polaires réciproques et par inversion. (E. CATALAN.)

La 1re partie de cette question est très élémentaire.

×**614.** Trouver la relation qui existe entre les angles d'un triangle dont l'orthocentre est situé sur la circonférence inscrite. (DE ROCQUIGNY.)

×**615.** Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, H l'orthocentre, I le centre du cercle inscrit, K le point de Lemoine; α, β, γ, x, y, z les inclinaisons des droites OA, OB, OC, OH, OI, OK sur un axe quelconque OX. Démontrer les formules

$$\sin(\alpha - x) + \sin(\beta - x) + \sin(\gamma - x) = 0,$$
$$\sin(\alpha - y) \sin^2 \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) + \sin(\beta - y) \sin^2 \tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) + \ldots = 0,$$
$$\sin(\alpha - z) \sin^2 \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) + \sin(\beta - z) \sin^2 \tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) + \ldots = 0.$$

(J. NEUBERG.)

SUR UN THÉORÈME DE M. OLTRAMARE(*).

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 272.)

I. ***Démonstration de la première partie par*** M. E. Cesàro. Soit N un nombre entier, supérieur à l'unité, et N′ la somme de ses diviseurs premiers. Si $N = p^r$, p étant premier et $r \geqq 2$, il est évident que $N' = 1 + p < N$, puisque déjà $1 + p < p^2$, pour $p \geqq 2$. L'introduction de chaque nouveau facteur dans N *accentue* l'inégalité $N' < N$, car *on ajoute* à N′ un certain nombre entier, et l'*on multiplie* $N \geqq 4$ par le même nombre. Si N est premier, $N' = 1 + N > N$. Lorsque N est le produit de plusieurs nombres premiers différents, on peut encore se borner à examiner le cas de $N = pq$, si l'on fait attention aux effets différents que l'introduction d'un nouveau facteur, nécessairement supérieur à 4, produit sur N et sur N′. On a $N - N' = (p-1)(q-1) - 2$. Par suite, à cause de $p \geqq 2$, $q \geqq 3$, on voit que $N' \leqq N$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $p = 2$, $q = 3$. Il en résulte que l'on a, en général, $N' < N$; mais $N' = N$, si $N = 6$, et $N' > N$ si N est premier. Dans ce dernier cas, N étant impair, le nombre $N' = 1 + N$ renferme le facteur 2, et l'on sait que la somme des autres diviseurs premiers ne peut surpasser $1 + \frac{1}{2}(1 + N)$. Donc $N'' \leqq 3 + \frac{1}{2}(1 + N) < N$, si $N > 7$. D'ailleurs, pour $N = 7$, on a $N'' = 3 < N$. Conséquemment, si l'on forme la suite $N, N', N'', N''', \ldots$, on doit finir par rencontrer quelque terme égal ou inférieur à 6. Si l'on rencontre 6 ou 5, la suite finit par devenir 6, 6, 6, 6, 6, ... Si l'on rencontre 4, ou 3, ou 2, la suite finit par devenir 3, 4, 3, 4, 3, ...

II. *Théorème empirique, par* M. Catalan. La proposition suivante,

---

(*) Voici l'énoncé de ce théorème :

1° Soit N un nombre entier. Je fais la somme de tous les nombres premiers, facteurs de N, y compris l'unité (et N, si N est premier). Soit N′ cette somme. J'opère sur N′ comme j'ai opéré sur N; soit N″ le résultat. J'opère de même sur N″, et ainsi de suite. Démontrer que le résultat final sera toujours 3 ou 6.

2° Soit P un nombre quelconque, suffisamment grand. J'opère successivement sur tous les nombres de 1 à P comme j'ai opéré tantôt sur N. Si k est le nombre de fois que le résultat est 6, k' le nombre de fois qu'on obtient 3, le rapport $(k : k')$ est toujours très voisin de $\frac{1}{2}$ ou égal à $\frac{1}{4}$.

qui offre une grande analogie avec le théorème de M. Oltramare, a été vérifiée sur un grand nombre d'exemples :

Désignons par $\int n$ la somme des diviseurs de n, et posons

$$n_1 = -n + \int n,$$
$$n_2 = -n_1 + \int n,$$
$$\dots\dots\dots$$

Pour une valeur donnée de n, les nombres $n_1, n_2, n_3, \dots$ tendent vers l'unité ou vers un nombre parfait.

QUESTION DE LICENCE;

par M. H. BROCARD, chef de bataillon du Génie (Grenoble).

(*Suite;* voir *Mathesis*, t. VII, p. 135.)

XXXVI. ***Intégrer l'équation différentielle***

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0; \qquad (1)$$

montrer qu'on peut disposer de l'une des arbitraires qui entrent dans l'intégrale générale, de manière que cette équation intégrale représente, en coordonnées rectangulaires, un faisceau de courbes coupant l'axe des y en deux points fixes; étudier les trajectoires orthogonales de ces courbes.

(CAEN; juillet 1885.)

Première solution. L'équation donnée peut s'écrire

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} - \frac{y'}{y}.$$

Les variables sont séparées et l'intégration donne

$$y' = C\frac{x}{y}, \quad y^2 = Cx^2 + C',$$

équation d'un système de coniques rencontrant l'axe des y en deux points fixes, si l'on suppose C' constant et C variable.

Le coefficient angulaire de la tangente à ces courbes a pour expression

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Cx}{y},$$

donc l'équation différentielle de leurs trajectoires orthogonales est

$$-\frac{dx}{dy}=\frac{Cx}{y},$$

dont on déduit

$$xy^C = C''.$$

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 124 et t. V, p. 224.)

Deuxième solution. On reconnaît immédiatement l'identité de l'équation (1) avec l'équation caractéristique de l'ellipse, donnée au t. II de *Mathesis*, p. 26. Nous devons donc y renvoyer le lecteur.

Ceci nous fournit en même temps l'occasion de préciser la bibliographie de ce travail. On pourra en effet consulter, à propos des théorèmes énoncés, pp. 27 et 29, plusieurs articles des N. A. M., notamment (1) VIII, 1849, 444-445 (Umpfenbach); (1) XX, 1861, 429-430 (Peaucellier); (2) I, 1862, 123-125 (Mannheim), où se trouvent cités le *Journal de Liouville* (IX, 350), les *Annales de Tortolini* (II, 212) et le *Journal de Crelle* (XXX, 95).

A PROPOS D'UNE NOTE RÉCENTE SUR LE TRIANGLE(*);

par M. Maurice d'Ocagne, ingénieur des ponts et chaussées (Rochefort-sur-Mer).

J'ai appelé x' et x'' deux longueurs telles que si l'on porte l'une ou l'autre d'entre elles à partir de A sur AB, à partir de B sur BC et à partir de C sur CA, dans le sens ABCA, ou à partir de A sur AC, à partir de C sur CB et à partir de B sur BA, dans le sens ACBA, on obtient sur les côtés du triangle trois points en ligne droite.

Je suppose d'ailleurs le triangle dénoté de telle sorte que l'on ait $a > b > c$. Les quantités x' et x'' sont les racines de l'équation

$$(a+b+c)\,x^2-(ab+bc+ca)\,x+abc=0,$$

que fournit immédiatement le théorème des transversales, mais que j'ai établie différemment dans ma première note parce que le problème s'y rattachait à une autre question.

(*) *Mathesis*, 1887, p. 265.

Plus généralement, on inscrit à un angle XOY une ligne brisée ABCD... dont les côtés sont alternativement parallèles à deux directions fixes δ, δ'.

Posons $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$; les quantités a, b, c peuvent être considérées comme données, de même que $AB = m$, $BC = n$. Le contour ABCD.... a pour expression

$$(m+n)\left(1+\frac{c}{a}+\frac{c^2}{a^2}+\cdots\right), \text{ etc.}$$

8. Partager 90° en deux parties x, y telles que la tangente de l'une soit le quadruple de la tangente de l'autre, et prouver que $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = 2\sin 18°$. (GERONDAL.)

9. Quels que soient les angles A, B, C, on a :

$$\frac{\sin(A+B) \pm 2\sin A + \sin(A-B)}{\cos(A+B) \pm 2\cos A + \cos(A-B)} = \operatorname{tg} A,$$

$$\frac{\operatorname{tg}(A+B)+\operatorname{tg}(A-B)-\operatorname{tg}(A+C)-\operatorname{tg}(A-C)}{\cot(A+B)+\cot(A-B)-\cot(A+C)-\cot(A-C)} =$$
$$\operatorname{tg}(A+B)\operatorname{tg}(A-B)\operatorname{tg}(A+C)\operatorname{tg}(A-C),$$

$$\sin^2(A+B)+\sin^2(B+C)+\sin^2(C+A)+\cos^2(A-B)$$
$$+\cos^2(B-C)+\cos^2(C-A)$$
$$-2\sin^2(A+B)\cos^2(A-B)-2\sin^2(B+C)\cos^2(B-C)$$
$$-2\sin^2(C+A)\cos^2(C-A)$$
$$=\cos^2 2A+\cos^2 2B+\cos^2 2C.$$ (GERONDAL.)

10. Dans tout triangle ABC,

$$r_a+r_b+r_c-r=\frac{2p+a}{3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\frac{2p+b}{3}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{2p+c}{3}\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

$$S=\frac{3abc}{(2p+a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}+(2p+b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}+(2p+c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}}.$$

(GERONDAL.)

11. Dans tout triangle sphérique ABC,

$$\operatorname{tg} a(\cos A+\cos B\cos C)=\operatorname{tg} b(\cos B+\cos A\cos C)$$
$$=\operatorname{tg} c(\cos C+\cos A\cos B),$$
$$\operatorname{tg} A(\cos a-\cos b\cos c)=\operatorname{tg} B(\cos b-\cos a\cos c)$$
$$=\operatorname{tg} C(\cos c-\cos a\cos b).$$ (GERONDAL.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

10. ***Sur les nombres parfaits***, par M. Cl. Servais. — Théorème. ***Il n'existe pas de nombres parfaits ne contenant que trois facteurs premiers.*** Nous avons démontré (*Mathesis*, t. VII, p. 231) que les deux premiers facteurs devaient être 3 et 5, et le dernier un des nombres 7, 11, 13. Les puissances impaires de 3 et 7 sont terminées par 3 ou par 7; donc les expressions $3^{2\alpha+1}-1$, $7^{2\gamma+1}-1$ ne sont pas divisibles par 5. Si 13 était le troisième facteur son exposant serait impair, et alors $13^{2\gamma+1}-1$ introduirait le facteur 7, puisque cette expression est divisible par $13^2-1=24.7$. Le troisième facteur est donc 11. Mais $\dfrac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1}$ n'est jamais multiple de 3, puisque les puissances impaires de 11 sont égales à un multiple de $3+2$; donc ce quotient devrait être puissance exacte de 5, et on aurait

$$\frac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1}=5^{\beta}. \qquad (1)$$

L'égalité

$$2.3^{2\alpha}.5^{\beta}.11^{2\gamma}=\frac{3^{2\alpha+1}-1}{2}\cdot\frac{5^{\beta+1}-1}{4}\cdot\frac{11^{2\gamma+1}-1}{11-1}$$

deviendrait alors

$$2.3^{2\alpha}.11^{2\gamma}=\frac{3^{2\alpha+1}-1}{2}\cdot\frac{5^{\beta+1}-1}{4};$$

ou en remplaçant 5^{β} par sa valeur tirée de (1) et chassant les dénominateurs,

$$32.3^{2\alpha}.11^{2\gamma}=(3^{2\alpha+1}-1)(11^{2\gamma+1}-3);$$

ce qui est impossible, puisque le second membre n'est pas divisible par 3.

11. ***Sur un problème de Leonard de Pise***, par M. E. Fauquembergue. Le problème dont il s'agit, proposé dans la *Nouvelle Correspondance Mathématique* (t. IV, p. 224, n° 384), a pour objet la résolution du système d'équations suivant :

$$x_1+t=\quad a(x_2+x_3), \qquad (1)$$
$$x_2+t=(a+1)(x_3+x_4), \qquad (2)$$
$$x_3+t=(a+2)(x_4+x_1), \qquad (3)$$
$$x_4+t=(a+3)(x_1+x_2), \qquad (4)$$

Si de la somme des équations (1) et (3), on retranche la somme des équations (2) et (4), on obtient la relation

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Retranchant ensuite membre à membre les équations (1) et (2), on arrive, en tenant compte de la relation précédente, à cette conclusion que

$$x_2 = x_4 \quad \text{et} \quad x_1 = -x_3.$$

Le système proposé donne alors les équations

$$(a+2)\,x_1 + x_2 = 0,$$
$$(a+1)\,x_1 - a x_2 + t = 0,$$

pour déterminer x_1 et x_2. Donc

$$x_1 = -\frac{t}{a^2+3a+1}, \quad x^2 = \frac{(a+2)\,t}{a^2+3a+1}.$$

Si l'on fait $t = a^2+3a+1$, on obtient pour solution en nombres entiers :

$$x_1 = -1, \quad x_2 = a+2, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = a+2.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Étude des sections coniques par la géométrie élémentaire, par M. Henin, capitaine commandant d'artillerie. Bruxelles, Rosez, 1884, brochure in-8° de 40 pages, (30 figures).

Sommaire : Définitions et tracés classiques. Cercle directeur. Tangente. Symétrie. Diamètres et cordes supplémentaires. Pôles et polaires. Théorème de Newton (ou plutôt d'Apollonius) sur les segments déterminés par une conique sur deux sécantes. Théorèmes d'Apollonius. Asymptotes de l'hyperbole. Hexagones de Pascal et de Brianchon. Polaires des foyers. Constructions de coniques satisfaisant à cinq conditions données. Quadrature de l'ellipse et de la parabole. Sections planes du cône.

Nous sommes d'accord avec l'auteur quand il recommande l'étude des sections coniques par la géométrie; mais nous ne pouvons l'approuver de n'avoir guère consulté les ouvrages sur la matière. En France, les bons écrits sur les *courbes usuelles* ne manquent pas. Dans le *Traité* et dans les *Éléments* de Géométrie par Rouché et de Comberousse, dans les *Leçons* de Steiner-Geiser, dans les *Coniques* de Zeuthen, M. Henin aurait trouvé maintes simplifications, maintes additions indispensables ou du moins très utiles à introduire dans son opuscule (intersection d'une conique par une droite, propriétés segmentaires des tangentes de la parabole, figure polaire réciproque d'un cercle par rapport à un cercle, etc.)

Quoi qu'il en soit, l'ouvrage de M. Henin, même sous sa forme actuelle, forme un complément utile du manuel de géométrie analytique en usage chez nous; comme tel, il peut rendre de grands services aux élèves du cours de première scientifique. (J. N.)

Semelhança e rectificação dos arcos ellipticos por R. Guimaraes, autigo alumno da Eschola Polytechnica de Porto. Porto, Tipographia occidental, 1887. Broch. in-8° de XI-79 pages.

Cet intéressant travail traite d'abord de l'association, puis de la rectification des arcs elliptiques. Deux arcs sont associés, si leur différence est rectifiable. Deux points M et N d'une ellipse sont associés, si les normales menées à la courbe en ces points sont également éloignées du centre. Si A et B sont les sommets de l'ellipse, AM et BN sont deux arcs associés, et l'on a

$$AM - BN = \frac{k^2}{a} x_1 x_2 = p,$$

égalité qui n'est que la traduction du théorème de Fagnano. L'auteur donne deux autres démonstrations de ce célèbre théorème; la dernière est une belle application de la méthode dont s'est servi Talbot pour déduire un grand nombre de formules analogues à celles de Fagnano. Dans le troisième paragraphe, on rencontre les théorèmes de Graves et de Mac-Cullagh, qui donnent des arcs à différence rectifiable sans qu'il soit nécessaire que les arcs se terminent aux sommets de l'ellipse; citons aussi une généralisation de la relation

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\mu) = ak^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\mu,$$

si

$$F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = 0.$$

La seconde partie de ce travail comprend aussi trois paragraphes. Dans le premier, l'auteur démontre qu'il existe, sur un quadrant elliptique, une infinité d'arcs rectifiables au moyen de droites, et il donne la relation qui doit exister entre les coordonnées des extrémités de ces arcs. De ce théorème, il conclut qu'il existe une infinité de valeurs pour les limites d'une intégrale elliptique de deuxième espèce, rendant cette intégrale exprimable algébriquement. La démonstration géométrique de la propriété précédente, supposant qu'aucune des extrémités de l'arc ne soit un sommet, l'auteur établit directement qu'il est possible d'obtenir différents arcs rectifiables, comptés à partir des sommets. Le second paragraphe est consacré aux recherches sur les limites supérieures et inférieures du périmètre E de l'ellipse. L'auteur reproduit la démonstration du théorème

$$\pi(a+b) < E < \pi\sqrt{2a^2+2b^2},$$

donnée par M. Mister (N.A.M. (2) t. XI, p. 280), ainsi que la substance des articles de MM. Barbarin et Mansion (*Mathesis*, t. II, p. 280) sur les valeurs approchées de E.

Dans le dernier paragraphe, l'auteur établit l'impossibilité de rectifier, d'une manière générale, un arc elliptique et cherche l'équation de la développante de l'ellipse. (Cl. S.)

First Lessons in Geometry, for the Use of Technical, Middle and High schools, by HANUMANTA RAU, B. A., Mathematical Lecturer Kumbhakonam College. Second Edition, revised and enlarged. Madras, 1888, in-12°, de X-XII, 171 pages.

Bonne introduction à la géométrie raisonnée, contenant sous une forme *semi-intuitive*, l'équivalent du livre I d'Euclide, plus l'évaluation des aires, y compris celle du cercle.

SOMMAIRE. *Préfaces.* Sur l'utilité et la possibilité d'un enseignement préliminaire de la géométrie, antérieur à celui de la géométrie rationnelle d'Euclide ou de Legendre. *Instruments du jeune géométricien*, nécessaires pour qu'il puisse dessiner les figures dont on parle dans le manuel. L'auteur indique les moyens de se procurer ou de se construire ces instruments rudimentaires, aux moindres frais possibles. *Introduction pour le maître.* Conseils aux professeurs de géométrie intuitive. Construction des solides réguliers; sur la symétrie. 1. Solide, surface, ligne et point. 2. Lignes droites. 3. Cercles. 4. Axiomes. 5. Angles. 6. Mesure des angles. 7. Angles droits et perpendiculaires. 8. Triangles. 9. 10. Parallèles. 11. Angles des polygones. 12. Quadrilatères. 13. Aires.

Le livre de M. Rau est bien fait; il est plus rapproché d'Euclide qu'on ne le croirait au premier abord et l'intuition y joue un moindre rôle qu'on ne pourrait le craindre, après la lecture des Préfaces et de l'Introduction. Il est intéressant de le comparer aux manuels italiens de *Géométrie intuitive*, que nous avons signalés autrefois dans *Mathesis*, 1883, III, pp. 204-205, 1884, IV, p. 172.

Elementi di Geometria ad uso dei Licei per AURELIANO FAIFOFER, professore nel liceo Marco Foscarini. Quinta edizione notevolmente migliorata. Venezia. Tipografia Emiliana 1896. Un volume in-12 de 547 pages Prix : 4 francs.

Cinquième édition, *déjà épuisée maintenant*, d'un excellent livre, de la troisième édition duquel nous avons publié un compte rendu détaillé en 1884, dans la *Revue de l'instruction publique en Belgique*, et un compte rendu sommaire dans *Mathesis*, 1884, IV, p. 168-169. M. Faifofer a encore perfectionné son ouvrage depuis cette époque, particulièrement dans les questions relatives à l'équivalence des figures et à l'aire du cercle. Nous recommandons vivement à tous ceux qui sont chargés de l'enseignement de la géométrie, la prochaine édition des *Éléments* de M. Faifofer, persuadé qu'elle l'emportera encore sur les précédentes, déjà si remarquables au point de vue scientifique et au point de vue pédagogique.

(P. M.)

SUPPLÉMENT.

Le supplément de la présente livraison est extrait des *Éléments de Trigonométrie plane et sphérique*, par M. E. GELIN, D. S. Th. et Ph., professeur au Collège St-Quirin, à Huy, ouvrage auquel l'Académie Royale de Belgique, sur la proposition de M. E. Catalan, a décerné récemment le prix De Keyn.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

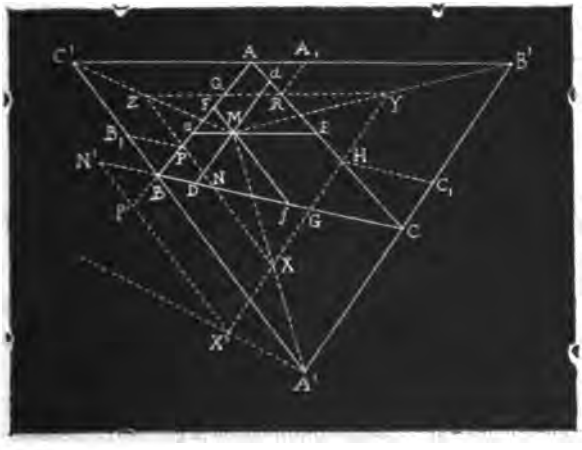
*Question 456.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 167).

Soit A'B'C' ***un triangle circonscrit au triangle*** ABC. ***Trouver, par la géométrie élémentaire, le lieu d'un point*** M ***tel que deux des parallèles menées par*** M ***aux droites*** B'C', C'A', A'B', ***et limitées respectivement aux côtés des angles du triangle*** ABC ***soient égales entre elles. Conclure de là le point*** M ***pour lequel les trois parallèles sont égales entre elles.***

(J. Neuberg.)

Solution par M. Jeřábek. Pour trouver un point quelconque X de l'un des lieux, prenons sur A'C', A'B' des segments égaux BB_1, CC_1 et construisons les parallélogrammes BB_1PN, CC_1HG; nous aurons $PN = BB_1 = CC_1 = GH$, et les droites NP, GH se rencontreront en un point



X du premier lieu. Lorsqu'on fait varier BB_1 et CC_1, le rapport BN : CG reste invariable; donc le point X décrit une droite passant par le point A'.

Prenons encore sur C'B' la longueur $AA_1 = BB_1$ et construisons le parallélogramme AA_1RQ. Les droites NP, GH, RQ forment un triangle XYZ. Tout triangle dont les côtés sont parallèles à ceux de A'B'C' et

dont les sommets sont situés sur les droites A'X, B'Y, C'Z jouit de la propriété que les angles du triangle ABC interceptent sur ses côtés trois segments égaux. En particulier, les parallèles E*e*, F*f*, D*d* menées à B'C', C'A', A'B' par le point de concours M des droites A'X, B'Y, C'Z sont égales entre elles.

MM. Farisano et Mandart ont résolu la même question en supposant MD = ME = MF, au lieu de D*d* = E*e* = F*f*.

Solution par M. Verniory(*). Supposons que les parallèles au lieu d'être égales soient proportionnelles à des nombres donnés m, n, q, et soient RQ, NP, GH trois lignes satisfaisant à ces conditions. Nous pouvons déterminer facilement le point α(**) de la droite BC dont les distances à AB et AC, mesurées parallèlement à A'C' et AB' sont dans le rapport $n : q$. Comme on a BN : Bα = CG : Cα, les droites PN, HG rencontrent A'α au même point X. On voit donc que les droites A'X, B'Y, C'Z sont les lieux cherchés, et que leur point d'intersection M jouit de la propriété que les parallèles menées par M aux côtés du triangle A'B'C' et limitées respectivement par les côtés des angles A, B, C du triangle ABC sont proportionnelles à m, n, q.

Examinons les cas particuliers les plus remarquables.

1° *Les côtés du triangle* A'B'C' *sont parallèles à ceux du triangle* ABC. On trouve aisément, au moyen de triangles semblables, que

$$B\alpha : C\alpha = nc : qb. \qquad (1)$$

Donc les coordonnées barycentriques de M par rapport au triangle A'B'C' sont $\frac{m}{a}$, $\frac{n}{b}$, $\frac{q}{c}$.

Lorsqu'on donne $m : n : q = a^r : b^r : c^r$, M est l'anticomplémentaire du point $(a^{r-1}, b^{r-1}, c^{r-1})$. Prenons pour M le centre de gravité, le centre

---

(*) Notre jeune collaborateur nous a remis, sur la question 456, un travail très-bien fait qui dénote une connaissance profonde de la géométrie récente et un talent digne d'encouragement. Il a retrouvé et complété les recherches de M. Lemoine, dont il ne connaissait que celles qui avaient paru dans *Mathesis* à l'époque où il a rédigé la solution du n° 456 (décembre 1885). En résumant ici le travail de M. Verniory, nous croyons rendre service à un grand nombre de nos lecteurs auxquels les publications de l'Association française pour l'avancement des sciences ne sont pas accessibles. — M. Déprez a également traité la question 456 sous la forme la plus générale. (J. N.)

(**) Il manque, dans la figure, la lettre α à l'intersection de BC avec A'X.

du cercle inscrit à A'B'C' (point de Nagel de ABC), le point de Lemoine de A', B', C' (point Λ de Brocard), le point de concours des droites joignant A'B'C' aux pieds des bissectrices intérieures ou des symédianes de ABC : alors les parallèles menées par M aux côtés de ABC et limitées aux deux autres côtés seront respectivement proportionnelles à (a, b, c), (a^2, b^2, c^2), (a^3, b^3, c^3), égales entre elles ou inversement proportionnelles à a, b, c. Les coordonnées barycentriques de M sont, dans ces différents cas,

$$(1, 1, 1), \quad (-a+b+c, \cdots), \quad (-a^2+b^2+c^2, \cdots),$$
$$\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}, \cdots\right), \quad \left(-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}, \cdots\right).$$

Les droites joignant A', B', C' aux pieds des hauteurs de ABC ou aux points de rencontre des côtés de ABC avec les rayons AO, BO, CO du cercle circonscrit, concourent en des points qui correspondent, respectivement, aux hypothèses

$$m : n : q = \cos A : \cos B : \cos C, \quad m : n : q = \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}.$$

2° *Le triangle* A'B'C' *est formé par les tangentes au cercle* ABC. Les droites Ee, Ff, Dd sont des antiparallèles. Les parallèles à A'C', A'B' menées par α dans les angles CBA, BCA, forment avec ceux-ci des triangles semblables à ABC; d'où l'on conclut aisément $B\alpha : C\alpha = nc^2 : qb^2$. Les coordonnées barycentriques des points α, A' étant $(0, qb^2, nc^2)$, $(-a^2, b^2, c^2)$, la droite A'α a pour équation

$$(n-q)\frac{x}{a^2}+\frac{ny}{b^2}-\frac{qz}{c^2}=0.$$

En combinant celle-ci avec l'équation de B'β, on obtient les coordonnées de M sous la forme

$$a^2(-m+n+q), \quad b^2(m-n+q), \quad c^2(m+n-q).$$

Parmi les théorèmes qui découlent de ces relations, nous signalons les suivants :

a) Les antiparallèles menées par le point de Lemoine sont égales entre elles.

b) Le point qui correspond à des antiparallèles proportionnelles aux côtés de ABC est à l'intersection des droites joignant A', B', C' aux pieds des bissectrices intérieures de ABC; les coordonnées de ce point sont $a^2(p-a)$, ...

c) Les antiparallèles menées par le centre du cercle ABC sont proportionnelles à a^2, b^2, c^2.

d) Les droites joignant A′ B′, C′ aux points qui divisent les côtés de ABC dans le rapport inverse des premières ou des secondes puissances des côtés adjacents concourent, respectivement, en des points tels que les antiparallèles menées par ces points sont proportionnelles aux cubes ou aux quatrièmes puissances des côtés.

3° A′, B′, C′ *sont les centres des cercles exinscrits à* ABC. On a $B\alpha : C\alpha = n \sin \frac{1}{2} C : q \sin \frac{1}{2} B$. Les coordonnées barycentriques de α et A′ sont $(0, q \sin \frac{1}{2} B, n \sin \frac{1}{2} C)$, $(-a, b, c)$; d'où les équations de $A'\alpha$ et des droites analogues $B'\beta$, $C'\gamma$:

$$\frac{x}{a}(n \cos \tfrac{1}{2} B - q \cos \tfrac{1}{2} C) + \frac{y}{b} \cdot n \cos \tfrac{1}{2} B - \frac{z}{c} \cdot q \cos \tfrac{1}{2} C = 0, \ \ldots,$$

et les coordonnées du point de concours de ces droites :

$$a(-m \cos \tfrac{1}{2} A + n \cos \tfrac{1}{2} B + q \cos \tfrac{1}{2} C), \quad \ldots.$$

Pour trouver le point M qui correspond à $m = n = q$, il faut joindre A′, B′, C′ aux points de rencontre des bissectrices des angles BIC, CIA, AIB avec les côtés BC, CA, AB (I est le centre du cercle inscrit à ABC).

4° A′B′, B′C′, C′A′ *sont perpendiculaires à* CA, AB, BC. Lorsque $m = n = q$, on trouve que les coordonnées normales de M sont

$$\cos C - \cos C \cos A + \cos C \cos A \cos B,$$
$$\cos A - \cos A \cos B + \cos A \cos B \cos C, \quad \ldots.$$

Dans le cas où A′B′, B′C′, C′A′ sont perpendiculaires à CB, AC, BA, les coordonnées de M sont

$$\cos B - \cos B \cos A + \cos B \cos A \cos B,$$
$$\cos C - \cos C \cos B + \cos C \cos B \cos A, \quad \ldots.$$

Application. Soit à trouver le lieu d'un point M tel que les parallèles Dd, Ff, menées par ce point à deux droites fixes A′B, A′C, et limitées par les angles ACB, ABC satisfassent à la relation

$$m \cdot Dd + n \cdot Ff = q^2.$$

En écrivant

$$Dd = \frac{n}{m}\left(\frac{q^2}{n} - Ff\right),$$

on voit que la question est ramenée à la première partie du problème 456,

pourvu que l'on remplace la droite AB par une parallèle dont la distance à AB, mesurée parallèlement à BA′, soit égale à $\frac{q^2}{n}$.

Note. Soit N′P′ la symétrique de la droite NP par rapport à B, et soit X′ le point de concours de P′N′ avec GH. Les droites A′X′ et AX sont conjuguées harmoniques par rapport à A′B et A′C; car XX′, parallèle à A′C, est divisée en deux parties égales par A′B. Les lieux dont il s'agit dans la question 456, généralisée, se composent donc de deux droites, et il existe quatre points associés par rapport à A′B′C′, jouissant de la propriété que les parallèles menées par l'un de ces points aux côtés de A′B′C′ et limitées par les côtés des angles de ABC soient proportionnelles à m, n, q. (J. N.)

Question 468.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 192.)

Une conique passe par trois points fixes A, B, C *et touche une droite fixe* δ *en un point variable* M. *Lieu du centre du cercle osculateur au point* M. (V. Jamet.)

Solution par M. Pisani. Soit O le point de rencontre de AB avec δ.

Prenons pour axes δ et une perpendiculaire OY. En désignant OM par μ, on peut représenter les droites MA, MB, AB par

$$x - ay - \mu = 0, \quad x - by - \mu = 0, \quad x - cy = 0;$$

une conique passant par A, B et touchant OX en M a pour équation

$$(x - ay - \mu)(x - by - \mu) - \lambda y(x - cy) = 0. \tag{1}$$

Déterminons le paramètre λ par la condition que la courbe passe par le point C (x', y'); alors

$$\lambda = \frac{(x' - ay' - \mu)(x' - by' - \mu)}{y'(x' - cy')}. \tag{2}$$

Si nous transportons l'origine au point M $(\mu, 0)$, l'équation (1) est remplacée par

$$(x - ay)(x - by) - \lambda y(x - cy + \mu) = 0;$$

ou

$$x^2 - xy(a + b - \lambda) + y^2(ab + \lambda c) - \lambda\mu y = 0.$$

Le rayon ν du cercle osculateur est donné par la formule (SALMON, *Conic sections*, art. 245)

$$\nu = \frac{-\lambda\mu}{2},$$

ou, en vertu de (2), par

$$\nu = -\frac{\mu(x' - ay' - \mu)(x' - by' - \mu)}{2y'(x' - cy')}. \qquad (3)$$

Soient α, β les ordonnées des points A, B; les abscisses sont $c\alpha, c\beta$ et l'on a

$$a = \frac{c\alpha - \mu}{\alpha}, \quad b = \frac{c\beta - \mu}{\beta}.$$

L'égalité (3) peut donc prendre la forme

$$\nu = -\frac{\mu[\mu(y' - \alpha) + \alpha(x' - cy')][\mu(y' - \beta) - \beta(x' - cy')]}{2\alpha\beta y'(x' - cy')}.$$

Comme elle ne renferme plus d'autres éléments variables que les coordonnées (μ, ν) du centre de courbure en M, c'est l'équation du lieu cherché. Cette courbe est donc une parabole cubique.

Elle se réduit à une parabole du second degré, si $y' = \alpha$, ou si AC est parallèle à δ (H. BROCARD).

NOTE. M. Brocard a résolu la même question en prenant pour axes δ et la perpendiculaire à δ menée par le milieu de AB. M. Déprez rapporte la figure à des axes obliques, qui sont δ et la droite AB. Voici une solution très simple, donnant lieu à des calculs symétriques. La conique variable a une équation de la forme (δ étant l'axe des abcisses)

$$(x - \mu)^2 + (y - \nu)^2 - \nu^2 + \alpha y\{y - m(x - \mu)\} = 0; \qquad (4)$$

car elle a pour sécantes communes avec le cercle osculateur la tangente δ et une droite δ' menée par M. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées de A, B, C. Entre les équations de condition

$$(x_r - \mu)^2 + y_r^2 - 2\nu y_r + \alpha y_r^2 - \alpha m y_r (x_r - \mu) = 0, \qquad (5)$$

où $r = 1, 2, 3$, on peut éliminer linéairement α et αm.

Soit $px + qy - 1 = 0$ l'équation de la *corde d'osculation* δ'; on a $p\mu = 1$, et les équations (5) peuvent être écrites ainsi :

$$\left(x_r - \frac{1}{p}\right)^2 + y_r^2 - 2\nu y_r + \alpha y_r(px_r + qy_r - 1) = 0.$$

Si l'on élimine maintenant ν et α, on a, en coordonnées tangentielles, l'équation de l'enveloppe de la corde δ'. (J. N.)

×Question 595.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 264.)

Le produit de quatre nombres en progression arithmétique, augmenté de la somme des puissances quatrièmes de ces nombres, est la somme de cinq carrés. (DE ROCQUIGNY.)

Nous allons résumer les solutions qui nous sont parvenues. Soient

$$\tfrac{1}{2}(a-3d),\quad \tfrac{1}{2}(a-d),\quad \tfrac{1}{2}(a+d),\quad \tfrac{1}{2}(a+3d)$$

les quatre nombres, a et d étant des nombres entiers de même parité. S désignant la somme de leur produit et de leurs quatrièmes puissances, on a

$$16S = 5a^4 + 110a^2d^2 + 173d^4.$$

Décomposons 16S en cinq carrés de la forme $(A_r a^2 + B_r ad + C_r d^2)^2$ où $r = 1, 2, 3, 4, 5$. On voit immédiatement que les A admettent deux systèmes de valeurs : $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 1$, et $A_1 = 2$, $A_2 = 1$, $A_3 = A_4 = A_5 = 0$.

En décomposant 173 en une somme de cinq carrés, on trouve que les valeurs absolues des C sont à choisir dans les groupes

13, 1, 1, 1, 1; 13, 2, 0, 0, 0; 12, 5, 2, 0, 0;
12, 4, 3, 2, 0; 11, 7, 1, 1, 1; 11, 6, 4, 0, 0;
11, 5, 5, 1, 1; 11, 4, 4, 4, 2; 10, 8, 3, 0, 0, etc.

La circonstance que les termes en a^3d et ad^3 manquent dans 16S, suggère les décompositions de la forme

$$(ma^2 + nad + pd^2)^2 + (ma^2 - nad + pd^2)^2 +$$
$$(m'a^2 + n'ad + p'd^2)^2 + (m'a^2 - n'ad + p'd^2)^2 + (m''a^2 + p''d^2)^2.$$

Voici quelques-unes des décompositions de 16S :

1° $(2a^2)^2 + (10ad)^2 + (a^2 + 5d^2)^2 + (12d^2)^2 + (2d^2)^2$;

2° $(a^2 + 2d^2)^2 + (2a^2 + 13d^2)^2 + (7ad)^2 + (2ad)^2 + (ad)^2$,
$(a^2 + 2d^2)^2 + (2a^2 + 13d^2)^2 + (6ad)^2 + (3ad)^2 + (3ad)^2$,
$(a^2 + 2d^2)^2 + (2a^2 + 13d^2)^2 + (15ad)^2 + (5ad)^2 + (2ad)^2$,
$(2a^2 + 2d^2)^2 + (a^2 + 13d^2)^2 + (6ad)^2 + (6ad)^2 + (2ad)^2$;

3° $(a^2 + 3d^2)^2 + (a^2 - d^2)^2 + (a^2 - d^2)^2 + (a - 3d)^4 + (a + 3d)^4$;

4° $(a^2 + 2ad + d^2)^2 + (a^2 - 2ad + d^2)^2 + (a^2 + 8ad - d^2)^2$
$+ (a^2 - 8ad - d^2)^2 + (a^2 - 13d^2)^2$,

$$(a^2+4ad+d^2)^2+(a^2-4ad+d^2)^2+(a^2+4ad+5d^2)^2$$
$$+(a^2-4ad+5d^2)^2+(a^2+11d^2)^2,$$
$$(a^2+ad+5d^2)^2+(a^2-ad+5d^2)^2+(a^2+5ad+7d^2)^2$$
$$+(a^2-5ad+7d^2)+(a^2+5d^2)^2,$$
$$(a^2+2ad+\tfrac{11}{2}d^2)^2+(a^2-2ad+\tfrac{11}{2}d^2)^2+(a^2+5ad+\tfrac{15}{2}d^2)$$
$$+(a^2-5ad-\tfrac{15}{2}d^2)^2+a^4.$$

Elles sont dues, respectivement, à MM. Brasseur, Déprez, Emmerich et Molenbroek.

×Question 596.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 264.)

Étant donné un triangle ABC, *menons la tangente en* A *au cercle circonscrit, qui coupe* BC *en* α. *Soient* A', B', C' *les milieux des côtés de* ABC *et* H', H'', H''' *les pieds des hauteurs. Menons* A'A'', BB'', CC'' *perpendiculaires à* Aα *et rencontrant cette droite en* A'', B'', C''; *menons aussi* $\alpha\alpha'$ *perpendiculaire à* AA'. 1° *Les cinq droites* $\alpha\alpha'$, A'A'', AH', B''H'', C''H''' *concourent en un point* M *de la circonférence des neuf points de* ABC; 2° *Les deux triangles* AB'C', AA'α *ont pour orthocentre commun le point* M. (Vigarié.)

Solution par MM. Déprez, Molenbroeck Jr, I. Beyens (Cadix) et Mineur. Soient O le centre du cercle ABC, H l'orthocentre du triangle ABC. A'A'' et $\alpha\alpha'$ étant deux hauteurs du triangle AαA', leur point de concours M est sur la troisième hauteur AH'. De plus, la figure AMA'O est un parallélogramme, les côtés opposés étant parallèles; donc AM = OA' = $\frac{1}{2}$ AH. Le point M est l'orthocentre commun des triangles AαA', AB'C' et appartient au cercle des neuf points de ABC.

Il reste à démontrer que les droites B''H'', C''H''' se croisent en M. Or, dans le quadrilatère inscriptible AH''BB'', *angle* B''H''B = B''AB = ACB = AHH''; donc H''B'' est dirigée suivant la médiane H''M du triangle rectangle AHH''.

×Question 602.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 28.)

Si l'on donne les équations

$$\frac{ax'+by'}{x-x'}=\frac{bx'+cy'}{y-y'}=z' \qquad (1)$$

$$X=b(x-x')^2-(a-c)(x-x')(y-y')-b(y-y')^2, \qquad (2)$$

$$Z=(a+z')(c+z')-b^2, \qquad (3)$$

dans lesquelles les inconnues sont x', y', z', X, Z ; ***le produit*** XZ ***est indépendant de*** x', y', z'. (E. CATALAN.)

Solution par MM. MOSNAT, PISANI ***et*** DÉPREZ. On peut mettre les équations (1) sous la forme

$$(a+z')(x-x')+b(y-y')=ax+by,$$
$$b(x-x')+(c+z')(y-y')=bx+cy,$$

d'où, en tenant compte de (3),

$$x-x'=\frac{(c+z')(ax+by)-b(cy+bx)}{Z},$$

$$y-y'=\frac{(a+z')(bx+cy)-b(ax+by)}{Z}.$$

En substituant ces valeurs dans l'égalité (2), on trouve aisément

$$XZ=b(ax+by)^2-(a-c)(ax+by)(bx+cy)-b(bx+cy)^2$$
$$=(ac-b^2)[b(x^2-y^2)-(a-c)xy].$$

Autre solution par M. AUG. DENYS.

QUESTIONS D'EXAMEN.

369. Un angle constant α tourne autour de son sommet fixe A ; trouver la position de l'angle pour laquelle il intercepte sur un cercle donné O dans son plan, une corde de longueur connue ***d***.

(J. M. E, 1887, p. 254).

A résoudre par *renversement*, en plaçant sur une corde quelconque de longueur d l'angle α, la distance du sommet au centre étant égale à OA.

370. Vérifier que

$$(\operatorname{tg} 7°30' + \operatorname{tg} 37°30' + \operatorname{tg} 67°30')(\operatorname{tg} 22°30' + \operatorname{tg} 52°30' + \operatorname{tg} 82°50') = 17+8\sqrt{3}.$$

(HUDSON.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

196. (*Mathesis*, II, p. 231). Si a et b sont deux nombres entiers donnés, premiers entre eux, et n un nombre entier *variable*, la probabilité que le nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation $ax + by = n$ est égal à $E\left(\frac{n}{ab}\right)$ est réprésentée par

$$P_0 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right);$$

celle que le nombre de ces solutions est $E\left(\frac{n}{ab}\right)+1$ s'exprime par

$$P_1 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{ab} \qquad \text{(E. Cesáro.)}$$

200. (*Mathesis*, III, p. 23). Trouver l'enveloppe de l'axe d'une parabole de grandeur constante, qui reste tangente à une parabole donnée, tandis que son foyer se déplace sur l'axe de la courbe fixe. (H. Brocard.)

×**242.** (*Mathesis*, III, p. 95). Les N premiers nombres entiers sont renfermés dans une urne; on tire au hasard deux nombres x et y. La probabilité que la somme $x+y$ soit un nombre premier avec N est $\varphi(N):(N-1)$ ou $\varphi(N):N$ suivant que N est pair ou impair.

(de Rocquigny.)

Suivant l'usage, $\varphi(N)$ désigne combien il y a de nombres inférieurs et premiers à N.

×**243.** (*Mathesis*, III, p. 118.) A un certain jeu, le joueur A gagne un point chaque fois qu'il tire une boule blanche d'une urne qui contient 3 boules blanches et 2 boules noires; chaque fois qu'il tire une boule noire, il perd tous ses points et B, qui ne fait jamais de tirage, en gagne un. Quelle est la probabilité pour A de faire k points le premier. Cas particulier où $k = 3$. (B. Peirce.)

×**616.** Dans le triangle ABC, on mène la médiane et la symédiane issues du sommet A; ces droites rencontrent BC en M, N et la circonférence ABC en M', N'. Démontrer : 1° que les droites de Simson des points M', N' sont respectivement perpendiculaires aux droites AN', AM'; 2° que leurs distances à M' et N' sont égales à $\frac{S^2}{m^2 n}$, $\frac{S^2}{m^3}$, S désignant l'aire ABC et m, n les longueurs AM, AN. (J. Déprez.)

×**617.** Si n est premier avec 6, on a

$$C_{2n-4,n-2} = \mathscr{M}(n^2-n). \qquad \text{(E. Catalan.)}$$

×**618.** Par un point M, pris d'une manière arbitraire sur le côté BC du triangle ABC, on mène MB′ parallèle à AB, MC′ parallèle à AC; on forme ainsi le parallélogramme AB′MC′. Soient I le point de rencontre des droites BB′ et CC′, et N celui des droites AI et B′C′. Démontrer les relations

$$NB' : NC' = MB : NC; \qquad \text{(D'OCAGNE.)}$$

$$BI.CI : B'I \,.\, C'I = AI : NI;$$

$$BI.B'I : CI \,.\, C'I = \overline{MB}^2 : \overline{MC}^2. \qquad \text{(ED. TIMES.)}$$

×MÉTHODE DES INFINIMENT PETITS.

I. Principe de substitution des infiniment petits.

1. ***Définition.*** Un ***infiniment petit*** est une quantité variable qui a pour limite zéro; ou encore, en évitant de se servir du mot limite, un infiniment petit est une quantité variable qui peut ***devenir et rester*** inférieure, en valeur absolue, à une quantité donnée aussi petite qu'on le veut, tandis qu'une ou plusieurs variables dont dépend la première tendent vers des valeurs inaccessibles(*).

EXEMPLES : 1° Si x est une quantité positive toujours décroissante, mais qui ne peut devenir nulle, les quantités

$$x^2, \ \sin x, \ 1 - \cos x, \ \operatorname{tang} x - \sin x, \ x \sin \frac{1}{x},$$

pourront devenir et rester aussi petites qu'on le voudra, en valeur absolue, quand x deviendra suffisamment petit, puis continuera à décroître. On dira donc que ces quantités sont infiniment petites en

---

(*) La notion d'infiniment petit, ainsi définie d'après Newton, Leibniz, Cauchy, etc. ne présente rien de mystérieux, ni d'incompréhensible. Le nom seul prête à l'erreur et aurait dû être *indéfiniment petit*.

Ce qui est incompréhensible, ce sont les ***pseudo-infiniment petits***, parce que leur définition implique contradiction. Les pseudo-infiniment petits sont de soi-disant quantités qui sont différentes de zéro et qui, cependant, ***sont*** plus petites que toute quantité donnée! Evidemment, il n'y a que zéro qui soit inférieur à toute quantité donnée.

A cause des erreurs et des confusions causées par l'emploi des pseudo-infiniment petits, il vaut mieux, suivant nous, ne parler dans l'enseignement élémentaire, ni des infiniment petits, ni surtout des pseudo-infiniment petits.

même temps que x. La dernière s'annule pour une infinité de valeurs de x, savoir

$$x = \frac{1}{\pi}, \quad \frac{1}{2\pi}, \quad \frac{1}{3\pi}, \quad \frac{1}{4\pi}, \quad \text{etc.}$$

et change de signe chaque fois que x passe par l'une de ces valeurs.

2° Soient

$$p_n, \quad P_n, \quad s_n, \quad S_n$$

les périmètres et les aires des polygones réguliers de $n = 2^k$ côtés, inscrits ou circonscrits à un cercle de rayon R. Joignons au centre les sommets de ces polygones de manière à les décomposer en triangles isoscèles y, Y ayant pour base les côtes x, X des polygones, de sorte que

$$p_n = nx, \quad P_n = nX, \quad s_n = ny, \quad S_n = nY.$$

Quand k croît indéfiniment, x, X, y, Y peuvent devenir et rester aussi petits qu'on le veut; x, X, y, Y sont donc infiniment petits en même temps que $(1 : k)$.

Remarque. Les quantités p_n, s_n, P_n, S_n sont des sommes d'infiniment petits, en nombre n indéfiniment croissant. Quand n croît, p_n et s_n croissent aussi, mais P_n et S_n décroissent. Par suite, d'après le principe fondamental de la méthode des limites, ces quantités, qui sont évidemment toujours finies, ont une limite déterminée.

3° On peut circonscrire à la circonférence R (d'une infinité de manières) un polygone non régulier de périmètre P'_n, d'aire S'_n, tel que

$$P'_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad S'_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n;$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont les portions de côtés limitées d'une part à un point de contact, d'autre part à un sommet du polygone, voisin du point de contact, et toutes inférieures, par hypothèse, à une quantité variable X indéfiniment décroissante avec $(1 : N)$; $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont les triangles rectangles ayant pour sommet le centre du cercle et pour bases X_1, $X_2, \ldots, X_n$.

En joignant les points de contact entre eux, on formera un polygone inscrit, dont le périmètre p'_n et l'aire s'_n seront donnés par les formules

$$p'_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad s'_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n;$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les demi-côtés du polygone inscrit, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les triangles rectangles ayant ces côtés pour bases, et le centre pour sommet opposé.

Il est facile de voir que, si $X_1, X_2, \ldots X_n$ sont infiniment petits, en même temps que $(1 : N)$, il en est de même de $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

Réciproquement, si l'on se donne un polygone inscrit à côtés indéfiniment décroissants, on peut en déduire un polygone circonscrit jouissant de la même propriété.

2. *Principe de substitution des infiniment petits.* « Une des conceptions les plus importantes dans la mesure des grandeurs, dit DUHAMEL, est celle par laquelle on les considère comme limite de sommes de quantités d'espèce plus simple, qui tendent indéfiniment vers zéro, en même temps que leur nombre augmente indéfiniment, » comme on l'a vu à propos du dernier exemple. « Ces infiniment petits sont susceptibles d'une grande indétermination ; ils ne sont assujettis qu'à la condition que la différence de leur somme à la quantité proposée ait pour limite zéro. Il reste donc beaucoup de latitude dans le choix de ces éléments et l'on peut en profiter pour simplifier considérablement les calculs. »

« Le principe fondamental sur lequel se fondent ces simplifications est le suivant : »

« *La limite de la somme de quantités positives infiniment petites n'est pas changée, lorsqu'on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec elles ont respectivement pour limite l'unité*(*). »

« Soient, en effet, les infiniment petits

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$

dont la somme tend vers une limite à mesure que leur nombre augmente indéfiniment. Soient d'autres infiniment petits

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad \ldots, \quad \beta_n,$$

tels que les rapports

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 + \varepsilon_1, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1 + \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1 + \varepsilon_n,$$

aient TOUS pour limite l'unité. »

« Or, on sait que si l'on a une suite de fractions dont les dénominateurs sont positifs, la somme des numérateurs divisée par la somme des dénominateurs est intermédiaire entre la plus petite et la plus grande. »

(*) Nous n'introduisons pas dans l'énoncé du principe la notion des infiniment petits de différents ordres, parce que l'on peut, sans inconvénient, se dispenser d'en faire usage.

« La fraction

$$\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$$

est donc comprise entre la plus grande et la plus petite des précédentes; et tendra nécessairement vers l'unité. » Il résulte de là que son numérateur a une limite égale à son dénominateur. Car, soit $1+\varepsilon_\mu$ une quantité intermédiaire convenablement choisie entre la plus grande $1+\varepsilon_n$ et la plus petite $1+\varepsilon_m$ des fractions $(\beta:\alpha)$. On aura

$$\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}=1+\varepsilon_\mu.$$

$$(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=\varepsilon_\mu(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n).$$

Par suite, si $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$ est toujours fini,

$$\lim\left[(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\right]=0, \qquad (1)$$

puisque ε_μ, toujours compris entre ε_m et ε_n, a zéro pour limite, comme ces dernières quantités.

Par hypothèse, $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$ a une limite finie. Il résulte évidemment de l'égalité (1) que $(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)$ a la même limite; ce qu'il fallait démontrer.

Remarques. I. La démonstration de la relation (1) suppose seulement que la somme $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$ est toujours finie; elle ne s'appuie pas sur l'hypothèse de l'existence d'une limite pour cette somme.

II. La méthode des infiniment petits consiste essentiellement dans l'emploi du principe précédent, pour chercher des limites des quantités susceptibles d'être regardées comme des sommes de parties indéfiniment décroissantes et d'un principe analogue sur les limites de rapports d'infiniment petits (*).

(*) Voici ce principe, sous sa forme analytique : Si

$$\lim\frac{\beta_1}{\alpha_1}=1, \quad \lim\frac{\beta_2}{\alpha_2}=1,$$

on a

$$\lim\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\lim\frac{\beta_1}{\alpha_1}\cdot\frac{\beta_2}{\beta_1}:\frac{\beta_2}{\alpha_2}=\lim\frac{\beta_1}{\alpha_1}\times\lim\frac{\beta_2}{\beta_1}:\lim\frac{\beta_2}{\alpha_2}=\lim\frac{\beta_2}{\beta_1}.$$

Cette démonstration, fondée sur les premiers principes de la méthode des limites, est si simple et si courte, qu'on peut la refaire à propos de chaque application du principe, au lieu d'invoquer celui-ci comme théorème connu.

II. Longueur de la circonférence; aire du cercle.

3. ***Application.*** 1° Soit r la perpendiculaire abaissée du centre du cercle considéré au n° 1 (exemple 2), sur le côté x. On a $x < X$, $r > R - \frac{1}{2}x$; donc

$$1 > \frac{x}{X} = \frac{r}{R} > 1 - \frac{x}{2R}, \quad \lim \frac{x}{X} = 1.$$

D'ailleurs

$$\frac{y}{Y} = \frac{x^2}{X^2}, \quad \lim \frac{y}{Y} = \lim \frac{x^2}{X^2} = 1.$$

Il résulte immédiatement du n° 2 que p_n et P_n ont la même limite p, s_n et S_n la même limite s. Il est d'ailleurs facile d'établir ces théorèmes, sans s'appuyer sur le principe de substitution, en passant à la limite dans les relations

$$\frac{P_n}{p_n} = \frac{R}{r}, \quad \frac{S_n}{s_n} = \frac{R^2}{r^2}.$$

2° Dans l'exemple 3 du n° 1, posons $\delta_n = P'_n - p'_n$, $\Delta_n = S'_n - s'_n$. Soit ensuite, dans le triangle Y_1, R_1 la distance au centre, du sommet extérieur au cercle. On aura $R_1 < R + X_1$, $X_1 > x_1$, puis

$$1 > \frac{x_1}{X_1} = \frac{R}{R_1} > \frac{R}{R + X_1} = \frac{R(R - X_1)}{R^2 - X_1^2} > \frac{R(R - X_1)}{R^2} = 1 - \frac{X_1}{R},$$

$$\lim \frac{x_1}{X_1} = 1, \quad \lim \frac{y_1}{Y_1} = \lim \frac{x_1^2}{X_1^2} = 1.$$

On prouve de même que

$$\lim \frac{x_2}{X_2} = 1, \quad \lim \frac{y_2}{Y_2} = 1, \quad \ldots, \quad \lim \frac{x_3}{X_3} = 1, \quad \lim \frac{y_3}{Y_3} = 1.$$

Par suite, d'après la remarque qui termine le n° 2,

$$\lim \delta_n = 0, \quad \lim \Delta_n = 0.$$

3° On a évidemment

$$P_n > p'_n, \quad P'_n \text{ ou } p'_n + \delta_n > p_n.$$

En réunissant ces inégalités, on trouve

$$P_n > p'_n > p_n - \delta_n.$$

De même, on a

$$S_n > S'_n > s_n - \Delta_n.$$

Faisant croître n et N indéfiniment, il vient

$$\lim p'_n = \lim p_n = \lim P_n = p, \quad \lim s'_n = \lim s_n = \lim S_n = s.$$

4° Enfin, puisque

$$P'_n = p'_n + \delta_n, \quad S'_n = s'_n + \Delta_n,$$

on a aussi

$$\lim P'_n = \lim p'_n = p; \quad \lim S'_n = \lim s'_n = s.$$

5° *Par définition*(*), on appelle *longueur de la circonférence* et *aire du cercle*, les limites p et s du périmètre et de l'aire de tout polygone inscrit ou circonscrit à côtés indéfiniment décroissants.

La démonstration précédente prouve que cette limite existe et *qu'elle est unique*.

III. Difficultés.

4. *Exemples d'une fausse application du principe.* I. Considérons les trois sommes suivantes :

$$A_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha_p = \frac{1}{n},$$

$$B_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n, \quad \beta_p = \frac{1}{n}(1 + x), \quad x = \frac{p}{n},$$

$$C_n = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n, \quad \gamma_p = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{n^2 x}{e^{n^2 x^2}}\right), \quad x = \frac{p}{n}.$$

On trouve immédiatement $A_n = 1$; puis

$$B_n = 1 + \frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2n},$$

$$C_n = 1 + \frac{1}{e} + \frac{2}{e^4} + \frac{3}{e^9} + \cdots + \frac{n}{e^{n^2}}.$$

Si n croît indéfiniment, en prenant, par exemple, les valeurs successives 2, 4, 8, 16, etc., A_n ne varie pas; B_n diminue sans cesse et a pour

(*) C'est M. Catalan qui, dans ses *Éléments de Géométrie* (1843), a fait observer qu'il fallait définir ainsi la longueur de la circonférence et l'aire du cercle. Les postulats d'Archimède sur la longueur des lignes courbes sont d'ailleurs équivalents aussi à la définition précise de cette espèce de grandeur, comme l'a remarqué Peyrard.

limite $1\frac{1}{2}$; C_n croit sans cesse, et tend vers une limite finie inférieure à la progression indéfinie

$$1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\cdots$$

ayant pour somme $[e:(e-1)]$. En effet, on a $ne^{-n^2}<e^{-n}$ ou $n<e^{n(n-1)}$, puisque e est supérieur à 2, et que, par conséquent, $e^{n(n-1)}>(1+1)^{n(n-1)}>1+n(n-1)>n$.

Les trois sommes ont donc des limites inégales A, B, C.

II. On a

$$\frac{\beta_p}{\alpha_p}=1+x=1+\frac{p}{n},\quad \frac{\gamma_p}{\alpha_p}=1+\frac{n^2x^2}{e^{n^2x^2}}\frac{1}{x}=1+\frac{p^2}{e^{p^2}}\frac{n}{p}.$$

Si l'on suppose p fixe et n croissant indéfiniment, on trouve

$$\lim\frac{\beta_p}{\alpha_p}=1,\quad \lim\frac{\gamma_p}{\alpha_p}=\infty.$$

Si l'on suppose x fixe et n croissant indéfiniment, puisque $\lim(n^2x^2:e^{n^2x^2})=0$, d'après un théorème connu (*), on a

$$\lim\frac{\beta_p}{\alpha_p}=1+x,\quad \lim\frac{\gamma_p}{\alpha_p}=1.$$

Dans la première hypothèse, le principe de substitution semble applicable aux sommes A_n et B_n, et l'on croirait, au premier abord, que l'on a $A=B$; dans la seconde, c'est à A_n et C_n qu'il parait applicable et l'on est tenté de conclure que $A=C$. Il n'en est rien cependant : la condition LIM $(\beta:\alpha)=1$ ou LIM $(\gamma:\alpha)=1$, ne doit donc être entendue, ni dans le premier, ni dans le second sens.

5. *Vrai sens de la condition d'existence du principe.* I. Si l'on se reporte à la démonstration donnée au n° 2, on verra que l'on y

---

(*) On a, si k est le plus grand entier contenu dans $t=n^2x^2$,

$$t<k+1,\quad e^t>(1+1)^t>(1+1)^k>1+k+\tfrac{1}{2}k(k-1)>\tfrac{1}{2}(k^2-1).$$

Donc

$$0<\frac{t}{e^t}<\frac{k+1}{\frac{1}{2}(k^2-1)}=\frac{2}{k-1}<\frac{2}{t-2},$$

et, par suite, pour $t=\infty$, $\lim\frac{t}{e^t}=0$.

suppose *explicitement* que tous les rapports $1+\varepsilon$ des infiniment petits substitués les uns aux autres tendent simultanément vers l'unité; ou, ce qui revient au même, qu'il en est ainsi du plus grand $1+\varepsilon_n$ et du plus petit $1+\varepsilon_m$.

Dans les exemples du n° précédent, cette condition n'est pas vérifiée : la plus grande valeur de $(\beta:\alpha)$ est égale à 2 et correspond à $p=n$; la plus grande valeur de $(\gamma:\alpha)$ est $1+ne^{-1}$ et correspond à $p=1$.

II. Il n'est pas aussi facile qu'on pourrait le croire, au premier abord, de voir si tous les rapports $1+\varepsilon$ tendent vers l'unité.

Quand n prend les valeurs successives de plus en plus grandes n_1, n_2, n_3, etc., le nombre de ces rapports croît en même temps. Par exemple, quand $n=n_1$, il y a n_1 rapports; quand $n=n_2$, il y en a n_2, dont n_1 peuvent être regardés comme étant les n_1 précédemment considérés qui ont varié, et dont (n_2-n_1) sont *nouveaux*. L'introduction continuelle de nouveaux rapports, en nombre n_2-n_1, puis n_3-n_2, etc., quand n prend les valeurs successives n_1, n_2, n_3, etc. nécessite une discussion spéciale dans chaque cas particulier, pour constater si réellement la plus grande et la plus petite des quantités $1+\varepsilon$ a pour limite l'unité. Souvent ces rapports dépendent non seulement de n, mais aussi d'autres variables(*), comme on l'a vu plus haut pour les sommes B_n, C_n.

III. *La condition* $\lim(1+\varepsilon_n)=\lim(1+\varepsilon_m)=1$ *est* SUFFISANTE, *mais elle n'est pas* NÉCESSAIRE. Pour le montrer, considérons la somme

$$D_n=\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n,\quad \delta_p=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

On a

$$D_n=1+\frac{H_n}{n},\quad H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n};$$

mais, si n est compris entre 2^k et 2^{k+1}, H_n est inférieur à $2+k$(**).

(*) Faute d'avoir fait cette remarque, DUHAMEL n'a pas exposé avec rigueur la question de la longueur des lignes courbes et de l'aire des surfaces courbes.

(**) On a, en effet,

$$H_n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}<1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{2^{k+1}}<1+1+\cdots+1\ (k+2\text{ fois}).$$

Or, $2^k = (1+1)^k = 1 + k + \frac{1}{2}k(k-1) + \text{etc.} > \frac{1}{2}k^2$. Donc

$$0 < \frac{H_n}{n} < \frac{2}{2^k} + \frac{k}{2^k} < \frac{2}{2^k} + \frac{2}{k}.$$

Pour n et k croissant indéfiniment, on a donc $lim\,(H_n : n) = 0$. Par suite, $\lim D_n = 1$.

Or, si l'on compare les termes des sommes A_n et D_n, on trouve

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} = 1 + \frac{1}{1}, \quad \frac{\delta_2}{\alpha_2} = 1 + \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{\delta_p}{\alpha_p} = 1 + \frac{1}{p}, \quad \ldots \quad \frac{\delta_n}{\alpha_n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Ces rapports ne tendent pas tous vers l'unité et cependant l'on a $\lim D_n = \lim A_n = 1$. Le principe de substitution subsiste donc dans des cas où la démonstration du n° 2 n'est pas applicable.

6. *Conclusion.* Il résulte de ce qui précède que l'on doit, pour ainsi dire, refaire la démonstration du principe de substitution dans les limites de somme d'infiniment petits, dans chaque genre d'application. Son rôle, *dans l'enseignement*, surtout dans l'enseignement élémentaire, est donc moins considérable qu'on ne le croirait d'abord; mais il n'en conserve pas moins son importance comme *principe d'invention* dans les recherches personnelles. Aussi doit-on louer DUHAMEL d'avoir si bien fait ressortir, dans ses *Éléments de Calcul infinitésimal*, l'usage que l'on peut en faire à ce point de vue. (P. M.)

---

*QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 37; t. V, p. 78; t. VI, p. 223.)

49. Soient : A la somme des diviseurs d'un nombre entier N, donnant des quotients impairs; B la somme des diviseurs donnant des quotients pairs; C la somme des diviseurs de N, impairs. On a

$$A = B + C. \qquad \text{(E. CATALAN).}$$

On calcule les valeurs de A, B, C, après avoir posé $N = 2^\lambda a^\alpha b^\beta \ldots$

50. Si $\frac{A}{B}$ est la fraction irréductible, équivalente à $\frac{C_{2n,\,2p}}{C_{n,\,p}}$, A et B sont impairs. (E. CATALAN.)

51. Plus généralement, soit $\frac{A}{B}$ la fraction irréductible, équivalente à

$\frac{C_{nq,pq}}{C_{n,p}}$; démontrer que, si q est un nombre premier, A et B sont premiers avec q. (J. N)

On remplace $C_{n,p}$ par $\frac{1.2.3...n}{1.2..p \times 1.2 .. (n-p)}$, $C_{nq\ pq}$ par la valeur analogue, et l'on cherche combien de fois q est facteur dans les produits $1.2.3 .. nq$, etc.

52. Vérifier l'identité

$$(n+1)^6+\left[\frac{(n+1)(n+4)}{2}\right]^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^3+[(n+1)(n+2)]^3+(n+1)^3.$$

(DE ROCQUIGNY.)

Il suffit de la vérifier pour $n=0, \pm 1$, après avoir supprimé le facteur $(n+1)^3$.

53. Tirer de l'identité précédente les théorèmes suivants :

I. Tout bicarré entier est la somme algébrique de quatre carrés.

II. La somme des n premiers cubes entiers est une somme algébrique de quatre carrés.

III. Le carré d'un nombre triangulaire, le carré du double de ce nombre sont, chacun, la somme algébrique de quatre carrés.

IV. Tout carré entier est la somme algébrique de quatre carrés.

V. Tout nombre impair est la somme algébrique de cinq carrés.

(DE ROCQUIGNY.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

12. THÉORÈMES I. *L'expression* $n(\sqrt[n]{a}-1)$ *va sans cesse en décroissant quand on donne à* n *toutes les valeurs entières successives et que* a *est supérieur à l'unité.* Il s'agit de démontrer que la différence

$$n(\sqrt[n]{a}-1)-(n+1)(\sqrt[n+1]{a}-1) \qquad (1)$$

est positive. Posons

$$u=\sqrt[n(n+1)]{a}.$$

La différence (1) est égale à

$$n(u^{n+1}-1)-(n+1)(u^n-1);$$

ou bien à

$$nu^n(u-1)-(u^n-1)=(u-1)[nu^n-u^{n-1}-u^{n-2}-\ldots-1]. \qquad (2)$$

Or, on a

$$1<u<u^2<u^3\ldots<u^{n-1}<u^n.$$

Donc les deux facteurs du second membre de la relation (2) sont positifs et le théorème est démontré (LEFRANÇOIS, professeur au lycée de Grenoble).

II. En général, si n et N sont deux nombres commensurables $\frac{m}{D}$, $\frac{M}{D}$, m, M, D étant entiers, et $M > m$, la différence

$$n(\sqrt[n]{a} - 1) - N(\sqrt[n]{a} - 1)$$

est encore positive. Posons, en effet, $A = a^D$, elle deviendra

$$\frac{1}{D}[m(\sqrt[m]{A} - 1) - M(\sqrt[n]{A} - 1)],$$

qui est positive, d'après le théorème I.

III. Le théorème subsiste également si n et N sont incommensurables; dans ce cas, la démonstration se fait en considérant n et N comme limites de nombres commensurables.

BIBLIOGRAPHIE.

Annuaire scientifique du Cercle des Normaliens, 1888. Aut. J. LOBEL, Gand. Un volume autographié de 166 pages, in-4° : fr. 2-00.

Les élèves de l'École normale des sciences de Gand ont fondé, il y a quelques années, un petit cercle scientifique dont les membres viennent successivement exposer à leurs condisciples le résultat de leurs études et de leurs recherches. Le volume que nous annonçons contient le résumé des principales communications faites au cercle des normaliens pendant les deux premières années de son existence.

Voici un aperçu sommaire des matières qui y sont traitées.

1. *Préface :* Personnel enseignant de l'École normale des Sciences; membres du cercle des normaliens; liste des professeurs de mathématiques et de sciences naturelles des athénées et collèges patronés de Belgique.

2. Questions posées aux examens d'entrée à l'École normale des sciences de Gand (1879-1886).

3. A GOB. *Théorie élémentaire de l'inversion* (32 pages). Excellent article, où l'auteur part des premières notions sur l'inversion pour s'élever peu à peu à des propriétés générales des courbes inverses, de leurs cercles osculateurs, de leurs enveloppes; il termine par l'étude des anallagmatiques, du limaçon de Pascal, de la lemniscate et de la strophoïde.

4. AD. MINEUR. *Recherches des tautochrones dans un cas spécial* (celui où le potentiel des forces qui sollicitent le point, exprimé au moyen de l'arc de la courbe, est nul à l'arrivée) (5 pages).

5. Cl. Thiry. *Démonstrations géométriques des théorèmes d'Apollonius* (2 pages).

6. E. Wasteels. *Méthode pour déterminer la tangente à une conique.* Si AA' est un diamètre, la tangente en M passe par le milieu de AT, T étant le point où la tangente en A rencontre A'M.

7. A. Demoulin. *Sur une méthode nouvelle de transformation des figures* (26 pages). Dans la *méthode d'inversion par ordonnées réciproques*, de la courbe $f(x, y) = 0$, on déduit $f(x, b^2y^{-1}) = 0$, qui a même sous-tangente en valeur absolue. On peut évidemment en déduire aussi $f(a^2x^{-1}, y) = 0$ (*inversion par abscisses réciproques*), ou même $f(a^2x^{-1}, b^2y^{-1}) = 0$, par deux transformations successives. Ainsi, par exemple,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1, \quad \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$$

sont des courbes correspondantes. On peut construire la tangente à la dernière aussi facilement qu'à la première parce que la deuxième, a même sous-tangente que la première (sur l'axe des x) et que la troisième, appelée *Kreuzcurve* (sur l'axe des y). L'article de M. Demoulin contient des applications ingénieuses de cette méthode de transformation, à la Kreuzcurve, à la lemniscate, à des polygones formés par des arcs d'hyperbole, etc. Comparez *Mathesis*, 1883, III, p. 206 (de Lisekenne), J., M. S., 1886, pp. 201, 281 (de Longchamps). M. de Longchamps appelle la transformation par coordonnées réciproques, *transformation réciproque cartésienne*.

8. Cl. Thiry. *Note sur l'escompte* (5 pages). Remarques sur la relation qui existe entre l'escompte en dedans et l'escompte en dehors. L'auteur regarde celui-ci comme illégitime, parce qu'il l'assimile arbitrairement à l'intérêt simple décompté. Pour lui, 100 francs payables dans deux ans, escomptés à 5 pour cent par an, ont pour valeur actuelle (100−2.5) francs. Evidemment, la vraie valeur actuelle, dans ce cas, est $100\,(0{,}95)^2$.

9. L. Mekuick. *Note sur le limaçon à foliole diamétrale* (7 pages). Tangente (trouvée par la méthode de Roberval), aire et rayon recteur maximum des courbes

$$\rho = a\cos\omega \pm \tfrac{1}{2}a\sin 2\omega, \quad \rho = a\cos\omega \pm a\cos^2\omega.$$

10. E. Wasteels. *Extension de la géométrie plane à certaines figures solides* (18 pages). 1° L'auteur appelle *figures microsphériques* les figures formées par des petits cercles de la sphère passant par un même point. En prenant ce point pour le pôle d'une transformation stéréographique, il montre que les propriétés non métriques des figures microsphériques sont les mêmes que les propriétés des figures planes. 2° Par la méthode des polaires réciproques, il transporte ces propriétés aux figures correspondantes sur l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes et le paraboloïde de révolution; puis, par inversion, à des figures situées sur une surface de révolution ayant un limaçon de Pascal pour méridien.

11. Cl. Thiry. *Démonstrations très élémentaires de quatre propriétés des symédianes* (4 pages). L'auteur part de cette définition : La symédiane d'un côté d'un triangle est le lieu des milieux des antiparallèles à ce côté.

12. A. Gob. *Note sur quelques propriétés segmentaires nouvelles des polygones harmoniques* (7 pages). Très bon article de géométrie récente. Voici le dernier théorème (peut-être nouveau) démontré par M. Gob : « *Dans un polygone harmonique de n côtés*, on a

$$\frac{n}{2p}=\frac{1}{AK.Aa}+\frac{1}{BK.Bb}+\cdots+\frac{1}{HK.Hh},$$

K étant le point de Lemoine, A, B, ... H les sommets, $a, b, \ldots, h$ les points de rencontre, avec le cercle circonscrit, des symédianes partant de A, B, ... H; p la puissance du point de Lemoine. »

12. H. Van Laer. *Notice sur la levure rose* (3 pages).

13. A. Mineur. *Théorèmes de Géométrie supérieure* (2 pages). Sur les figures homologiques.

14. E. Wasteels. *Nouvelle démonstration du Théorème d'Euler* (1 ½ page) : $x^{\varphi(N)}-1$ est divisible par N, si x est premier à N.

15. Cl. Thiry. *Note sur une formule relative aux miroirs et aux lentilles sphériques* (6 pages). La formule classique

$$\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\frac{2}{R}$$

est avantageusement remplacée par $rr'=\frac{1}{4}R^2$, r et r' étant les distances du milieu de R aux extrémités variables de f et f' de sorte que $f=r+\frac{1}{2}R$, $f'=r'+\frac{1}{2}R$.

15. V. Willem. *Note sur le procédé employé par les gastéropodes d'eau douce pour glisser à la surface d'un liquide* (8 pages).

E. Wasteels. *Application des projections stéréographiques ou de l'inversion à la résolution des triangles sphériques* (6 pages). Résolution géométrique au moyen des triangles tricirculaires qui sont les transformés des triangles sphériques.

17. A. Demoulin. *Distance d'un point à une droite ou à un plan* (2 ½ pages), en fonction des coordonnées du point et des coordonnées à l'origine de la droite ou du plan.

18. E. Wasteels. *Détermination de l'aire de la courbe décrite par un point d'une droite de longueur constante s'appuyant sur deux courbes données* (5 pages). [Au lieu *d'un point*, il faut lire *un segment*.] Application à l'ellipse et à la tractrice.

19. Cl. Thiry. *Division d'une droite en deux segments proportionnels aux puissances mêmes de deux droites données* (4 ½ pages). Solution de proche en proche. L'auteur annonce la prochaine publication d'une solution plus rapide.

20. *Questions proposées* (33 théorèmes ou problèmes sur des sujets plus ou moins apparentés à ceux qui sont traités dans le volume) (10 pages). Table des matières.

Comme on le voit, le recueil des Normaliens contient un grand nombre d'articles intéressants, et plusieurs renferment des recherches originales. Nous applaudissons donc de grand cœur à leur premier essai et nous le signalons à la bienveillante attention des professeurs et des élèves. (P. M. et J. N.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Composition de Mathématiques (Juin 1888).

On donne un quadrilatère plan OACB, et deux séries de paraboles : les unes tangentes en A à AC et ayant pour diamètre OA, les autres tangentes en B à BC et ayant pour diamètre OB. On demande :

1° de trouver le lieu du point de contact M d'une parabole de la première série avec une parabole de la seconde série ;

2° d'indiquer en laissant le triangle OAB invariable, dans quelle région du plan il faut placer le point C pour que le lieu soit une ellipse ou pour qu'il soit une hyperbole;

3° de démontrer, dans l'hypothèse où OACB est un parallélogramme, que la tangente commune en M aux deux paraboles pivote autour du point de concours K des médianes du triangle ABC ;

4° de trouver, dans la même hypothèse, le lieu du point d'intersection P de la tangente en M aux deux paraboles avec l'autre tangente commune DE que l'on peut mener à ces deux courbes.

N. B. On représentera OA par a, OB par b.

Solution analytique. 1° Axes de coordonnées, OAX et OBY; équations des droites AC et BC,

$$x = my + a, \quad y = nx + b ; \tag{1}$$

équations de deux paraboles qui se touchent :

$$y^2 = \mu(x - my - a), \quad x^2 = \nu(y - nx - b). \tag{2}$$

Les coordonnées (x, y) de M satisfont aux égalités (2) et à la suivante qui expriment que les tangentes en M aux deux courbes ont même coefficient angulaire :

$$(2y + \mu m)(2x + \nu n) = \mu\nu ; \tag{3}$$

d'où l'équation du lieu du point M, savoir :

$$(x - \tfrac{1}{2} my - a)(y - \tfrac{1}{2} nx - b) = \tfrac{1}{4} xy. \tag{4}$$

2° Ce lieu est une ellipse lorsque

$$m^2 n^2 - 10\, mn + 9 < 0,$$

ou que mn est compris entre 1 et 9. Si, des équations (1), on tire m et n en fonction des coordonnées de C (représentées par x, y), la condition précédente prend la forme

$$xy \gtrless 0, \quad ay + bx - ab \lessgtr 0, \quad 8xy + ay + bx - ab \gtrless 0.$$

Désignons par AA', BB' les prolongements de la droite AB dans les angles XOY', YOX', et par A''ADBB'', KLM les deux branches de l'hyperbole

$$8xy + ay + bx - ab = 0,$$

dont les asymptotes, parallèles à XX′ et YY′, se croisent en un point situé dans l'angle Y′OX′.

Le lieu de M est une ellipse lorsque C est intérieur à la branche d'hyperbole KLM ou tombe dans l'un des espaces ADB, A″AA′, B″BB′.

3° Dans l'hypothèse où OACB est un parallélogramme, on a $m=0$, $n=0$. Les points de rencontre de la droite

$$y=gx+h \tag{5}$$

avec une parabole de l'une ou l'autre série sont donnés, respectivement, par les équations

$$g^2x^2+(2gh-\mu)x+h^2+\mu a=0, \tag{6}$$

$$x^2-\nu gx-\nu(h-b)=0. \tag{7}$$

Pour que cette droite soit une tangente, on doit avoir, respectivement

$$4ag^2+4gh-\mu=0, \tag{8}$$

$$\nu g^2+4h-4b=0. \tag{9}$$

Elle sera une tangente commune, avec le même point de contact sur les deux courbes, si, outre les relations (8) et (9), on a l'égalité

$$\frac{\mu-2gh}{g^2}=\nu g, \tag{10}$$

qui exprime que les équations (6) et (7) ont la même racine. L'élimination de μ et ν entre les égalités (8), (9), (10) conduit à la condition

$$\tfrac{1}{2}b=\tfrac{1}{2}ag+h,$$

d'où l'on déduit que la droite B passe par le point $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b)$.

4° Si l'on élimine h entre (5) et (8), (5) et (9), on trouve

$$\nu g^2-4gx+4(y-b)=0,$$

$$4(x-a)g^2-4gy+\mu=0.$$

Dans ces égalités, considérons (x, y) comme les coordonnées du point P; alors les deux valeurs de g tirées de chacune d'elles doivent être égales entre elles, et l'une de ces valeurs doit être égale à $(y-\frac{1}{2}b):(x-\frac{1}{2}a)$. On a donc

$$\frac{\nu}{4(x-a)}=\frac{x}{y}=\frac{4(y-b)}{\mu},$$

$$\nu(y-\tfrac{1}{2}b)^2-4x(y-\tfrac{1}{2}b)(x-\tfrac{1}{2}a)+4(y-b)(x-\tfrac{1}{2}a)^2=0,$$

et, après élimination du paramètre ν,

$$x(x-a)(y-\tfrac{1}{2}b)^2-xy(y-\tfrac{1}{2}b)(x-\tfrac{1}{2}a)+y(y-b)(x-\tfrac{1}{2}a)^2=0.$$

Telle est l'équation du lieu du point P.

Solution géométrique des n^os 1 et 3. 1° Soient Q, Q′, R, R′ les points de rencontre des droites OA, AÇ, OB, BC avec la tangente commune menée au point M.

D'après un théorème connu, $Q'M=QQ'$, $R'M=RR'$; donc si l'on trace les droites AA_1, BB_1 parallèles à QR, les deux faisceaux A (A_1COM), B (B_1COM) sont harmoniques. Il résulte de là que les droites AA_1, AM, BB_1, BM se correspondent

dans des faisceaux projectifs; donc le point M engendre une conique passant par les centres A et B de ces faisceaux.

3° Si OACB est un parallélogramme et qu'une parallèle à OB menée par M rencontre OA en S, BC en T, on a BR′ = R′T, QA = AS. Donc lorsque la droite ST se déplace parallèlement à OB, les points Q et R′ décrivent deux ponctuelles projectives ayant un élément uni à l'intersection des supports OA, BC; par conséquent, la droite QR′ passe par un point fixe. Les médianes du triangle ABC issues de A et B sont les positions de la droite QR′ qui correspondent aux positions AC et OB de la droite ST, donc, etc.

Dans le cas général, la tangente menée en M joint les points homologues de deux ponctuelles projectives marquées sur la conique (M) et sur la droite de l'infini; l'enveloppe de cette droite est donc de la troisième classe. (J. N.)

Composition de Géométrie descriptive (Épure).

Représenter par ses projections le solide qui reste quand, d'une portion de cône de révolution, supposée remplie, on enlève ce qui se trouve à l'intérieur d'un cylindre donné, de révolution et ayant une génératrice commune avec le cône. (Suivent les données numériques fixant le cône et le cylindre).

Calcul trigonométrique.

On donne les côtés du triangle ABC

$$a = 12524{,}62 \quad b = 22639{,}27, \quad c = 18913{,}45.$$

Trouver les angles et la surface.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. G. DE LONGCHAMPS.

Solution de la question 603.

Nous avons dû, à regret, retarder la publication de cette intéressante lettre (datée du 11 février 1888), pour ne pas mettre un trop grand intervalle entre son insertion et celle des autres solutions de la question 603, qui nous sont parvenues en février et mars. Voici l'énoncé de cette question :

On considère les paraboles qui ont même corde normale NN′ (N *et* N′ *sont des points fixes*); *démontrer* 1° *que l'axe enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements*; 2° *que la directrice enveloppe une parabole* (Jerábek). (*La Rédaction.*)

.... La question 603 n'offre aucune difficulté. Si elle n'a pas provoqué encore de solution, c'est probablement que les équations unicursales de l'hypocycloïde à trois rebroussements sont peu connues.

La corde normale NN' = $2b$ étant prise pour axe des y, et la tangente en N pour axe des x, l'équation de la parabole est

$$(y - \lambda x)^2 - 2by = 0,$$

ou

$$(y - \lambda x - \mu)^2 - 2y(b - \mu) - 2\lambda\mu x - \mu^2 = 0.$$

On exprime alors (c'est le procédé classique) que les droites représentées par

$$y - \lambda x - \mu = 0, \quad 2y(b - \mu) + 2\lambda\mu x + \mu^2 = 0$$

sont rectangulaires, et l'on trouve, pour équation de l'axe de la parabole,

$$y - \lambda x - \frac{b}{1 + \lambda^2} = 0.$$

Différentions par rapport à λ et nous aurons

$$x = \frac{2b\lambda}{(1 + \lambda^2)^2},$$

puis,

$$y = \frac{b(3\lambda^2 + 1)}{(1 + \lambda^2)^2}.$$

Ces formules, après avoir changé λ en $(1 : t)$ sont identiques à celles que j'ai utilisées dans une petite note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements (J. M. S.; 1884, p. 169); elles permettent de représenter cette courbe, point par point.

Menons à la parabole une tangente parallèle à NN'; cette droite coupe Ns en un point A qui appartient à la directrice. On trouve ainsi, pour l'équation de cette droite,

$$\frac{b}{\lambda^2} + \frac{2x}{\lambda} + 2y = 0.$$

L'enveloppe de la directrice est donc une parabole ayant pour équation

$$x^2 - 2by = 0.$$

L'hypocycloïde à trois rebroussements se rencontre d'ailleurs dans un grand nombre de questions analogues à celles de M. Jerábek. Par exemple :

Des paraboles passent constamment par l'origine, tangentiellement à Ox, *et leurs directrices coupent l'axe* Oy *en un point fixe; leurs axes enveloppent une hypocycloïde à trois rebroussements.*

On suppose, bien entendu, que les axes Ox, Oy sont rectangulaires.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 34.

(Voir *Mathesis*, t. I, p. 62; t. VII, p. 56.)

1° *Il y a une infinité de polyèdres à faces triangulaires ne différant que par le nombre de leurs angles hexaèdres, mais il n'y en a pas deux qui diffèrent seulement par le nombre de leurs angles solides d'un autre ordre.*
2° *Il y a une infinité de polyèdres à faces quadrangulaires ne différant que par le nombre de leurs angles tétraèdres, mais il n'y en a pas deux qui diffèrent seulement par le nombre de leurs angles solides d'un autre ordre.*
3° *Il n'y a pas deux polyèdres à faces pentagonales, qui ne diffèrent que par le nombre de leurs angles solides d'un certain ordre.* (E. Cesàro.)

Solution par M. Droz. Soient F le nombre des faces, A celui des arêtes, S celui des sommets d'un polyèdre; on sait que

$$F + S = A + 2. \qquad (1)$$

Désignons aussi par S_3, S_4, S_5, ... les nombres des angles trièdres, tétraèdres, etc.

1° Si le polyèdre n'a que des faces triangulaires, on a les relations

$$F = \tfrac{1}{3}(3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \cdots) \qquad (2)$$
$$A = \tfrac{1}{2}(3S_3 + 4S_4 + 5S_5 \cdots) \qquad (3)$$
$$S = S_3 + S_4 + S_5 + \cdots \qquad (4)$$

Substituant ces valeurs de F, A, S dans la formule (1), on obtient

$$3S_3 + 2S_4 + S_5 - S_7 - 2S_8 \ldots = 12.$$

Cette égalité est indépendante du nombre des angles hexaèdres, et elle détermine une valeur unique de l'un des nombres S_3, S_4, S_5, S_7,... quand les valeurs des autres sont connues.

Le premier théorème de M. Cesàro est donc démontré.

2° Si toutes les faces du polyèdre sont quadrangulaires, la formule (2) est à remplacer par celle-ci

$$F = \tfrac{1}{4}(3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \ldots) \qquad (2')$$

(*) Nous avons oublié de mentionner antérieurement de bonnes solutions des questions 596 et 600, par M. Droz.

et les égalités (1), (2'), (3), (4) entraînent la suivante :

$$S_3 - S_5 - 2S_6 \ldots = 8,$$

d'où l'on conclut le deuxième théorème de M. Cesàro.

3° Supposons toutes les faces pentagonales. Alors

$$F = \tfrac{1}{5}(3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \ldots), \qquad (2'')$$

et

$$S_3 - 2S_4 - 5S_5 - 8S_6 \ldots = 20,$$

relation qui contient toutes les quantités S_3, S_4, S_5,...

Remarque. Il n'existe pas d'autres théorèmes analogues aux théorèmes 1° et 2° énoncés par M. Cesàro.

En effet, si toutes les faces du polyèdre ont n sommets, on a

$$F = \frac{1}{n}(3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \ldots). \qquad (2''')$$

Substituons les valeurs (2'''), (3) et (4) de F, A, S dans la formule (1); pour que S_p disparaisse du résultat, on doit avoir

$$p = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

Par conséquent, les seuls cas possibles correspondent aux valeurs

$$n = 3,\ p = 6; \quad n = 4,\ p = 4; \quad n = 6,\ p = 3;$$

les deux premiers ont été considérés par M. Cesàro, le troisième comprend les polyèdres polaires de ceux du premier cas.

Question 209.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 24.)

Trouver la podaire de la courbe dont l'équation est

$$y = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (1)$$

On prendra pour point fixe le sommet de la courbe. Indiquer les coordonnées des points de rebroussement et l'inclinaison des tangentes en ces points. (H. Brocard.)

Solution par M. Brocard(*). La courbe (1), que nous désignerons par

(*) La figure ne représente qu'une moitié de la courbe donnée et de sa podaire.

P, est symétrique par rapport à OY et rencontre cet axe au point A (0, 1), qui est un sommet de P. L'axe OX est une asymptote. Deux points d'inflexion B, B' sont donnés par l'équation $y'' = 0$; leurs coordonnées sont $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$; les tangentes en ces points ont pour coefficient angulaire $\mp\frac{3}{8}\sqrt{3}$.

La tangente au point (x, y) de P et la perpendiculaire abaissée de A ont respectivement pour équation

$$Y - y = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}(X - x), \tag{2}$$

$$Y - 1 = \frac{(1+x^2)^2}{2x}X. \tag{3}$$

Remplaçant y par sa valeur (1), on obtient

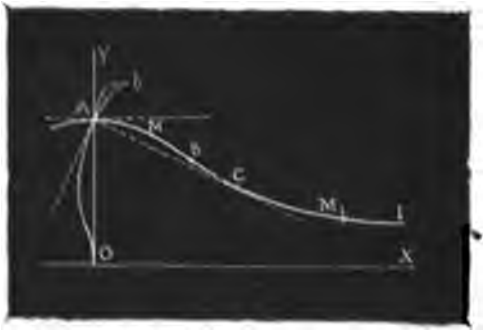
$$Yx^4 + (2Y - 3)x^2 + 2Xx + Y - 1 = 0, \tag{4}$$

$$Xx^4 + 2Xx^2 - 2(Y - 1)x + X = 0. \tag{5}$$

L'équation de la podaire P' de P résulte de l'élimination de x entre les égalités (4) et (5). On peut d'abord éliminer tour à tour x^4 et x, ce qui donne

$$3Xx^2 - 2(X^2 + Y^2 - Y)x + X = 0, \tag{6}$$

$$(X^2 + Y^2 - Y)x^4 + (2X^2 + 2Y^2 - 5Y + 3)x^2 + X^2 + (Y - 1)^2 = 0.$$



Si dans la dernière équation on remplace x^4 par le carré de

$$\frac{2(X^2 + Y^2 - Y)x + X}{3X},$$

on est conduit à une nouvelle équation du second degré que l'on joindra à (6).

La connaissance de la forme de P permet d'étudier les particularités de P'. Désignons par I, I' des points très éloignés sur les branches AB, AB' de P'. A tout point M de l'arc AB, correspond sur l'arc BI un point M_1 tel que les tangentes en M et M_1 sont parallèles; soient m, m_1 les projections de A sur ces tangentes. Les points m, m_1 appartiennent à la podaire, et les normales à P' en m, m_1 passent respectivement par

les milieux des droites AM, AM_1. Lorsque M et M_1 se réunissent en B, m et m_1 se confondent en un seul point b, et les deux tangentes m et m_1 se confondent également, mais en une droite différente de Ab. Donc b est un point de rebroussement de P'. Les coordonnées de b se déduisent des équations (2) et (3), dans lesquelles on fait $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{3}{4}$; on trouve : $x = \frac{3\sqrt{3}}{91}$, $y = \frac{99}{91}$. De ces valeurs, et des coordonnées du milieu de la droite AB, on conclut le coefficient angulaire de la tangente en b à P'; on obtient $\frac{292\sqrt{3}}{465} = 1{,}0876$, de manière que cette tangente fait avec OX un angle peu différent de 45°.

Lorsque M s'approche de A, la droite Am tend à se confondre avec AY. Donc deux branches de P', symétriques par rapport à AY, se réunissent en A et y ont un point de rebroussement avec une tangente verticale.

Du point A, on peut mener à l'arc BI une tangente. Les coordonnées du point de contact C de cette tangente se déduisent de l'équation (4), où l'on fait $Y = 1$, $X = 0$; on trouve $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$. Lorsque M_1 s'approche de C, m_1 se rapproche de A, et la droite Am_1 a pour limite la tangente à l'arc Ab de P' qui correspond à l'arc BC de P. Cette nouvelle tangente en A est donc perpendiculaire à la droite AC. Donc en A se trouvent superposés un point de rebroussement et un point double de P'.

Lorsque M_1 s'éloigne sur l'arc BI, m_1 s'approche de l'origine O et la normale en m_1 tend vers OX. Donc O est un point de rebroussement de P', avec une tangente verticale.

Note. L'aire limitée par la courbe (1), l'axe OY et une ordonnée est exprimée par arc tg x.

Les mémoires de Kramp, Bérard, Gergonne cités dans *Mathesis*, t. V, p. 30-31, renferment plusieurs essais de quadrature approximative de cette courbe, en vue de résoudre le problème de la détermination d'un arc dont la tangente est donnée (Kramp, VI, 289-290 et 293-294; Gergonne, VI, 305-307; Bérard, VII, 114-115; Kramp, VII, 246-252);

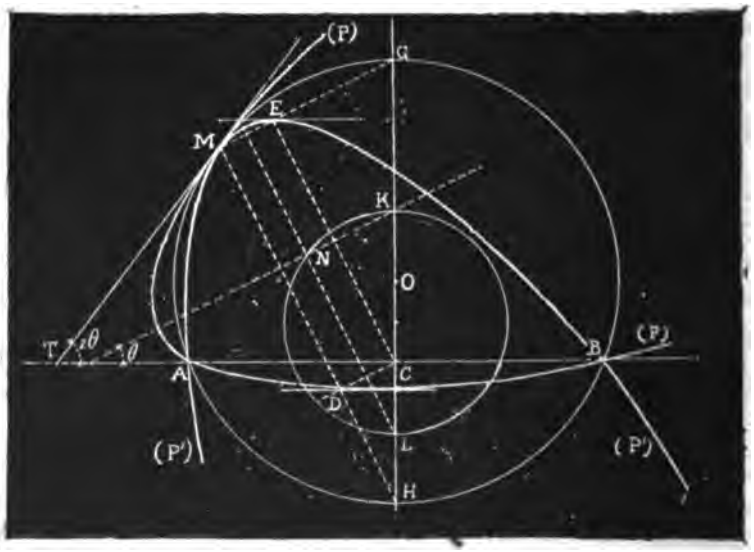
M. Fr. Falisse a trouvé l'équation de la podaire sous forme d'un déterminant du cinquième ordre.

Question 420.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 94).

On considère sur une circonférence O, *deux points fixes* A, B *et un point mobile* M. *Démontrer qu'il y a deux paraboles passant par* A, B *et tangentes à la circonférence au point* M. *Trouver le point de rencontre de leurs axes et le lieu que décrit ce point, quand* M *parcourt la circonférence.* (Barbarin.)

Solution géométrique, par M. Brocard. On sait que les sécantes communes à une conique et à une circonférence sont anti-parallèles par rapport à un axe de la conique. Par conséquent, si GH est le diamètre du cercle O perpendiculaire à AB, l'axe d'une parabole passant par A, B et



touchant la circonférence O en M doit être parallèle à la bissectrice de l'angle AMB ou de son adjacent supplémentaire, c'est-à-dire que MG ou MH est un diamètre de la parabole. Donc il existe deux paraboles (P), (P'), qui répondent à la question; leurs axes sont rectangulaires(*).

(*) Réciproquement, lorsque deux paraboles ont leurs axes rectangulaires et se touchent en un point M, on peut construire une circonférence qui touche ces courbes en M et passe par leurs deux autres points d'intersection A, B. (H. B.)

Soient D, E les points de contact des tangentes de (P), (P') parallèles à AB; les diamètres correspondants passent par le milieu C de AB. Les tangentes menées en M et E à (P') étant anti-parallèles par rapport à l'axe, cet axe est équidistant de EC et MH; donc il passe au milieu L de CH. De même, l'axe de (P) est la parallèle à MG menée par le milieu K de CG. Il résulte de là que l'intersection N des axes des deux paraboles parcourt la circonférence décrite sur KL comme diamètre, lorsque M se déplace sur la circonférence O.

On peut observer que la figure MECD est un rectangle ayant pour centre le point de rencontre des axes des paraboles, ou que N est le milieu de CM. Les points D et E ont pour lieux géométriques les circonférences décrites sur CH et CG comme diamètre.

Lorsque le point M arrivera en A, les deux paraboles auront même cercle osculateur O en A. Si M se place en G, la parabole (P) est remplacée par un système de deux droites, la droite AB et la tangente en G à la circonférence O.

Solution analytique, par M. Boubals. Prenons pour axe Ox le diamètre OH perpendiculaire à AB, pour axe Oy le diamètre parallèle à AB. L'équation générale des coniques passant par A, B et tangentes au cercle au point $(R\cos 2\theta, R\sin 2\theta)$ est

$$\lambda(x^2+y^2-R^2)+(x-a)(x\cos 2\theta+y\sin 2\theta-R)=0.$$

Pour avoir une parabole, on doit poser $\sin^2 2\theta-4\lambda(\lambda+\cos 2\theta)=0$, d'où deux valeurs $\lambda'=\sin^2\theta$, $\lambda''=-\cos^2\theta$. Donc si φ est donné, deux paraboles satisfont aux conditions de la question. Les équations de leurs axes sont(*), respectivement

$$2y\sin\theta+(2x-a-R)\cos\theta=0, \quad 2y\cos\theta-(2x-a+R)\sin\theta=0.$$

On voit immédiatement que ces droites sont rectangulaires et passent par deux points fixes L, K, qui sont les milieux de CH et CG. Si l'on élimine θ, on obtient l'équation du lieu sur lequel se coupent les deux axes; on trouve

$$y^2+(x-\tfrac{1}{2}a)^2=\tfrac{1}{4}R^2,$$

(*) L'équation de l'axe de la parabole

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+\cdots=f(x,y)=0 \quad \text{est} \quad f'_x+\frac{2A}{B}f'_y=0.$$

équation d'une circonférence qui a pour centre le milieu de LK et pour rayon $\frac{1}{2}$ R.

MM. Brocard, Pisani, Paul Bastin et Verniory ont donné, de la même question, des solutions analytiques peu différentes de celle de M. Boubals. M. Déprez résout la question géométriquement, et la généralise en considérant les deux paraboles qui passent par deux points fixes A, B de la circonférence O et par les extrémités M, M' d'une corde variable, de longueur donnée; le point de concours des axes est au milieu de la droite qui joint les milieux des cordes AB et MM' et décrit, par conséquent une circonférence.

Remarques. 1° Le paramètre de la parabole (P) est égal au double du segment de l'axe KN compris entre l'ordonnée MD et la normale MO. La normale MO et le rayon OG étant anti-parallèles par rapport à MG, la sous-normale est encore égale à la projection de GK sur MG; donc le paramètre $2p = EG$.

2° On peut se proposer d'autres lieux ou des enveloppes se rapportant aux paraboles (P), (P'); par exemple, les lieux des foyers ou des sommets, ceux des pôles de la corde AB, l'enveloppe des directrices, etc. (H. B.)

×Question 493.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 288.)

L'équation

$$x^8 - 16x^7 - 60x^6 + 16x^5 + 134x^4 + 16x^3 - 60x^2 - 16x + 1 = 0,$$

a pour racines

tg 3°, tg 21°, tg 33°, tg 39°, et cot 3°, cot 21°, cot 33°, cot 39°;

et il n'y a pas d'équation plus simple, à coefficients entiers, admettant une de ces racines. (E. Gelin.)

La solution de cette question (empruntée à la N. C. M., n° 614) résulte des valeurs données par M. Gelin, pour les lignes trigonométriques citées, dans le supplément de la livraison précédente de *Mathesis*. Ces valeurs ne diffèrent que par le signe des radicaux $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$. En posant $x = \cot 3°$, par exemple, $u^2 = 3$, $v^2 = 5$), on a

$$4x = (u + v)(u - 1)[\sqrt{10} + 2v + v + 1]$$

d'où l'on tire l'équation donnée par élimination de u et v.

×Question 557.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 56.)

Soit M *un point quelconque du plan du triangle* ABC. *Désignons par* P_{as} *la puissance de* A *par rapport au cercle qui a pour diamètre* BM. *On demande :* 1° *de trouver deux points* M, M' *satisfaisant respectivement aux égalités*

$$P_{ab} = P_{bc} = P_{ca}, \quad P_{ba} = P_{ab} = P_{ac}, \tag{1}$$

et de démontrer qu'ils sont symétriques par rapport au centre O *du cercle* ABC;

2° *De prouver que le point* M *déterminé par les conditions*

$$P_{ab} + P_{ac} = P_{bc} + P_{ac} = P_{ca} + P_{ba} \tag{2}$$

est symétrique du centre de gravité G *par rapport à* O *et en ligne droite avec le point de Steiner et le réciproque de l'orthocentre.* (E. Lemoine.)

De bonnes solutions de cette question nous ont été adressées par MM. Verniory, Déprez et Choisis. La solution suivante, en grande partie conforme à une note présentée par M. E. Lemoine au Congrès de Toulouse (1887) est très élégante et a l'avantage de faire ressortir de nouveaux procédés s'adaptant parfaitement à une foule de questions de la géométrie récente.

Soient M_a, M_b, M_c les projections de M sur BC, CA, AB. Posons

$$CM_a = \xi, \quad AM_b = \eta, \quad BM_c = \sigma,$$
$$BM_a = \xi', \quad CM_b = \eta', \quad AM_c = \sigma'.$$

En C, A, B, menons des perpendiculaires respectivement sur a, b, c. Ces lignes forment le triangle $A_1B_1C_1$, *orthogonalement circonscrit* à ABC et ayant pour centre de similitude par rapport au triangle ABC le point direct de Brocard ω; le rapport des côtés homologues ($BC : B_1C_1$) est tang V, V étant l'angle de Brocard du triangle ABC (N. C. M., 1877, III, p. 187).

La condition pour que les perpendiculaires élevées en M_a, M_b, M_c concourent en un même point, sur a, b, c s'exprime par l'égalité

$$\xi^2 + \eta^2 + \sigma^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \sigma'^2,$$

à laquelle on peut donner la forme(*)

$$a\xi + b\eta + c\sigma = a\xi' + b\eta' + c\sigma' = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2). \qquad (3)$$

Les quantités ξ, η, σ sont évidemment les coordonnées normales du point M par rapport au triangle de référence $A_1B_1C_1$. De même ξ', η', σ' sont ses coordonnées par rapport au triangle $A_2B_2C_2$ qui est formé par les perpendiculaires élevées en C, A, B sur b, c, a. Les deux triangles orthogonalement circonscrits $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sont symétriques par rapport au point O (loc. cit., p. 188).

1° Cela posé, comme la circonférence décrite sur BM comme diamètre passe par M_a et M_b, on voit que

$$P_{ab} = c\sigma', \quad P_{cb} = a\xi, \ldots$$

Par conséquent, les égalités (1) prennent la forme

$$a\xi' = b\eta' = c\sigma' = \tfrac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2),$$
$$a\xi = b\eta = c\sigma = \tfrac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2).$$

D'où l'on conclut aisément que les ***points cherchés*** M, M'(**) ***sont les centres de gravité des triangles*** $A_2B_2C_2$, $A_1B_1C_1$(***). Ils sont, évidemment, symétriques par rapport à O.

Le lieu des points M, tels que $P_{ab} = P_{bc}$, est la médiane du triangle $A_2B_2C_2$ issue de B_2(****).

2° Le lieu des points M tels, que

$$P_{bc} + P_{ba} = P_{ca} + P_{cb},$$

a pour équation

$$a\xi' + c\sigma = b\eta' + a\xi$$

(*) On remplace ξ', η', σ' par $a - \xi$, $b - \eta$, $c - \sigma$. Si a_1, b_1, c_1, S_1 sont les côtés et l'aire du triangle $A_1B_1C_1$, on a $a_1\xi + b_1\eta + c_1\sigma = 2S_1$. Comparant cette égalité à la relation (3), on conclut que

$$\frac{a}{a_1} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_1};$$

combinant ce résultat avec la proportion $a\xi' : a^2 = S_1 : S$, on obtient

$$\frac{a_1}{a} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \cot V, \quad \sqrt{SS_1} = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

(**) Leurs coordonnées (ξ', η', σ'), ... sont inversement proportionnelles aux côtés de $A_2B_2C_2$, $A_1B_1C_1$.

(***) Ce résultat a été trouvé également par M. Verniory.

(****) Remarque due à M. Déprez.

ou

$$a(a-\xi)+c\sigma=b(b-\eta)+a\xi;$$

d'où, en tenant compte de (3)

$$\xi=\frac{3a^2+c^2-b^2}{ba}=\frac{a+c\cos B}{3}.$$

Ce lieu est donc une perpendiculaire à BC. La distance de B à la projection de G sur BC étant égale à cette valeur de ξ, on voit aisément que le point M satisfaisant aux conditions (2) est le symétrique de G par rapport à O ou celui de H par rapport à G.

Les coordonnées normales de M par rapport au triangle ABC sont donc

$$2\cos A-\cos B\cos C,\quad 2\cos B-\cos C\cos A,\quad 2\cos C-\cos A\cos B.$$

Celles du point R de Steiner et du réciproque H′ de l'orthocentre sont respectivement

$$\frac{1}{\sin^2 A\sin(B-C)},\quad\cdots;\quad\frac{\cos A}{\sin^2 A},\quad\cdots;$$

on en déduit l'équation de la droite RH′ (normale à l'ellipse de Steiner)

$$\Sigma x\sin^3 A\sin(B-C)[\cos A-2\cos B\cos C]=0.$$

Celle-ci est vérifiée par les coordonnées de M.

QUESTIONS D'EXAMEN.

371. Si dans un triangle ABC, on a

$$b=c\cos(30^\circ+\tfrac{1}{2}A)\cos(30^\circ-\tfrac{1}{2}A),$$

on a aussi

$$A=2C,\quad a^2=c(b+c)$$

372. Résoudre le système.

$$x^2-2xy+2x-1=0,\quad y^2-2xy+2y-1=0.$$

373. Deux droites d, d' étant données par leurs projections, trouver une troisième droite d'' s'appuyant sur d, parallèle à d' et telle que le segment compris entre les plans de projection ait une longueur donnée.

374. Construire un triangle ABC connaissant la base BC, le rapport m des côtés AB, AC, et le rapport n des bissectrices de l'angle A limitées à la base. — Résoudre le même triangle par la trigonométrie. — Quelle relation doit-il exister entre m et n pour que le triangle cherché soit rectangle en A ?

QUESTIONS PROPOSÉES.

252. (Voir *Mathesis*, t. III, p. 143). I. Si q, r, s sont des entiers plus grands que 2 et p un entier quelconque, démontrer que les nombres de Bernoulli déterminés par la relation symbolique

$$(B+1)^q - B^q = 0$$

vérifient la relation

$$B^p(B+1)^q(B+2)(B+3)^s = B^s(B-1)^r(B-2)^q(B-3)^p.$$

II. Démontrer, sans se servir des séries, la relation symbolique

$$(2B+1)^p + 2^p B_p - 2B_p = 0. \qquad \text{(Éd. Lucas.)}$$

267. (*Mathesis*, t. III, pp. 175 et 192). On a

$$1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^5}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots =$$
$$1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^4}{[(1-q)(1-q^2)]^2}+\frac{q^9}{[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)]^2}+\cdots.$$

(E. Catalan.)

×**619.** ABC étant un triangle donné, soit D le point de contact, avec BC, du cercle inscrit, I. On projette les sommets B, C en E, F sur la bissectrice AO; puis l'on construit les parallélogrammes DEBG, DFCH. Cela posé : 1° Les points B, G, C, H appartiennent à une circonférence; 2° le centre de cette circonférence et le centre I du cercle inscrit, sont également distants du côté BC. (E. Catalan.)

620. On considère tous les triangles qui ont un sommet fixe A, et les deux autres sommets B, C sur une droite donnée; la longueur BC est également donnée. Trouver les lieux géométriques du centre du cercle circonscrit et du centre du cercle des neuf points, ainsi que les enveloppes des hauteurs issues de B et C. (Déprez.)

621. Intégrer l'équation aux dérivées partielles.

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy} = z\frac{d^2z}{dxdy}. \qquad \text{(V. Jamet.)}$$

Rectification. 618. Dans les égalités de la question 618 (page 152), il faut échanger les lettres B′ et C′.

SUR LES TRANSFORMATIONS QUADRATIQUES INVOLUTIVES;

par M. J. Neuberg.

La question 504, résolue dans la présente livraison de *Mathesis*, se rattache intimement aux transformations quadratiques. Nous croyons utile d'établir ce rapprochement et de compléter, par là, les articles publiés récemment par MM. de Longchamps(*), Mansion et Servais(**). Le lecteur est prié de se reporter à la figure qui accompagne la question 504 et que nous reproduisons ci-après.

1. Considérons deux faisceaux involutifs (B), (C) ayant leurs centres aux points B, C. Soit D_1 un point quelconque du plan, et soit D_2 l'intersection des rayons conjugués avec les droites BD_1, CD_1 dans les involutions (B), (C). Les points D_1, D_2 se correspondent dans une transformation involutive : *En général, à tout point* D_1 *correspond un seul point* D_2, *et la construction qui conduit de* D_1 *à* D_2 *nous ramène de* D_2 *à* D_1.

2. Soient BA, CA les rayons conjugués avec la droite BC considérée comme rayon de l'un ou l'autre faisceau (B), (C).

Lorsque D_1 coïncide avec B, le rayon BD_1 est indéterminé, et le rayon CD_1 a pour conjugué CA; donc le point D_2 est arbitraire sur la droite CA. De même, lorsque D_1 est en C, son correspondant D_2 est un point quelconque de BA. Enfin, si nous plaçons D_1 en A, BD_2 et CD_2 se confondent avec BC.

Donc *les sommets du triangle* ABC *ont pour correspondant un point quelconque du côté opposé.* A, B, C sont dits les *points principaux* de la transformation.

3. Les droites AD_1, AD_2 sont également des rayons conjugués d'un faisceau involutif (A).

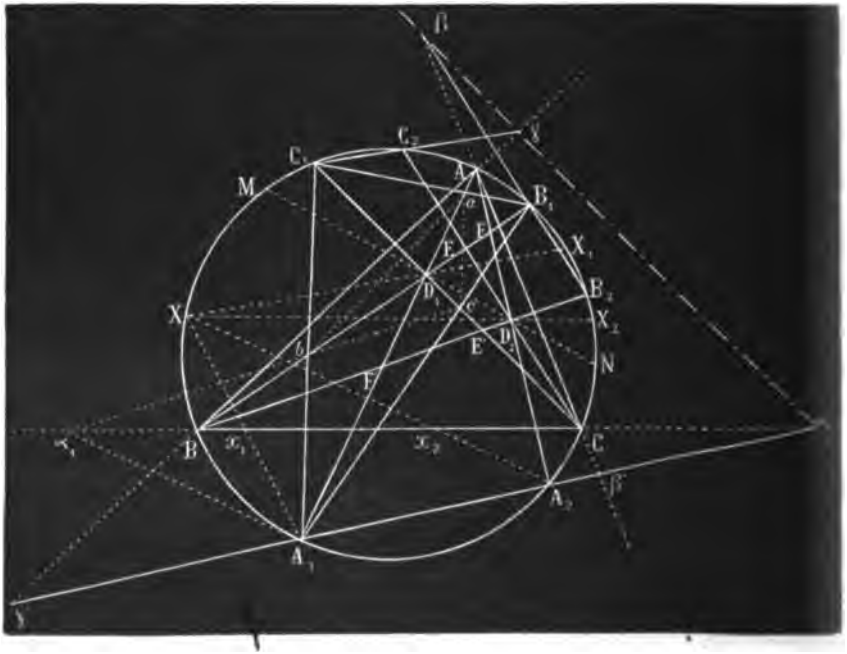
En effet, si nous déplaçons D_1 sur une droite fixe BB_1, les points D_1, D_2 marquent sur les rayons conjugués BB_1, BB_2 de l'involution (B) deux

---

(*) *Généralités sur la Géométrie du triangle*, J. M. E., 1886, p. 109.

(**) *Mathesis*, 1887, pp. 110, 129, 187. On peut aussi consulter les notes de M. Mansion dans la *Nouvelle Correspondance*, t. I et II et dans les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, ainsi que la *Théorie der Kegelschnitte*, par Steiner-Schröter, p. 330.

ponctuelles projectives; car l'involution (C) des couples CD_1, CD_2 peut se décomposer en deux faisceaux projectifs. Donc les droites AD_1, AD_2 se correspondent dans deux faisceaux projectifs φ_1, φ_2. Mais si F et F' sont les points de rencontre de AD_2 avec BB_1, et de AD_1 avec BB_2, les droites CF et CF', CD_1 et CD_2, CA et CB qui aboutissent aux couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet sont en involution; donc CF et CF' sont conjugués dans l'involution (C), et les rayons homologues AD_1, AD_2 des faisceaux projectifs φ_1, φ_2 sont permutables. Par conséquent, φ_1 et φ_2 constituent une involution (A)(*).



Celle-ci est indépendante du couple BB_1, BB_2 que nous avions supposé fixe. Car, pour définir la transformation, il suffit de se donner les points

(*) On peut même dire plus simplement que les droites AC et AB étant des rayons homologues permutables des faisceaux projectifs φ_1 et φ_2, ceux-ci sont en involution; en effet, lorsqu'un point D_1 mobile sur un rayon BB' arrive sur le côté AC ou en B, le rayon CD_2 coïncide avec CB ou CA, et par suite au rayon AC du faisceau φ_1 correspond le rayon AB du faisceau φ_2, et vice-versa.

principaux A, B, C et deux points correspondants D_1, D_2, et les trois involutions (A), (B), (C) seront déterminées chacune par deux couples de rayons conjugués, savoir :

BC et BA, BD_1 et BD_2 ; CA et CB, CD_1 et CD_2 ; AB et AC, AD_1 et AD_2.

On obtient tous les couples de l'involution (A) en combinant le couple BD_1, BD_2 de (B) avec un couple variable de (C); ou le couple CD_1, CD_2 avec un couple variable de (B); donc un couple quelconque de (B) associé à un couple quelconque de (C) détermine quatre points situés sur deux couples de rayons conjugués de (A).

4. La construction des points correspondants de notre transformation [illegible] aisément au moyen d'une conique fixe Σ, circonscrite au triangle [illegible]. En effet, si deux rayons conjugués quelconques AD_1, AD_2 de (A) [illegible]rent Σ en A_1, A_2, la corde A_1A_2 passe par un point fixe α de la [illegible] BC, laquelle est une position particulière de A_1A_2. Nous dirons [illegible] le *pôle de l'involution* (A). Soient de même β et γ les pôles des [illegible]tions (B) et (C).

[illegible]pôles peuvent être obtenus au moyen d'un premier couple de points [illegible]ndants, supposé connu. Pour déterminer ensuite l'homologue d'un [illegible]nné D_1, nous menons les cordes AD_1A_1, BD_1B_1, CDC_1, et nous [illegible]s les points d'intersection A_2, B_2, C_2 de Σ avec les droites αA_1, [illegible] ; les droites AA_2, BB_2, CC_2 concourront au point demandé D_2. [illegible] même que deux des involutions (A), (B), (C) entraînent la [illegible], deux des pôles α, β, γ déterminent le troisième : *ces points [illegible]r une droite σ, qui est, dans la transformation considérée, la ligne [illegible]ndant à la conique Σ.*

[illegible]fet, lorsqu'un point M_1 décrit la courbe Σ, les droites BM_1, CM_1 [illegible]rent des faisceaux projectifs; donc leurs conjuguées BM_2, CM_2 [illegible] les involutions (B), (C), engendrent également deux faisceaux projectifs; ceux-ci sont même perspectifs à cause du rayon uni BC, qui correspond à M_1 confondu avec A. Il résulte de là que M_2 décrit une droite σ. Si l'on cherche l'homologue de M_1 au moyen des pôles α, β, γ, on trouve que le point B de Σ a pour homologue le pôle β, et que la droite $B\beta$ a pour conjuguée, dans l'involution (B), la tangente en B à Σ; donc σ renferme les pôles α, β, γ.

5. Les *involutions associées* (A), (B), (C) jouissent de propriétés nombreuses, parmi lesquelles nous faisons ressortir les suivantes.

Trois couples quelconques de rayons conjugués AA_1 et AA_2, BB_1 et BB_2, CC_1 et CC_2 *touchent une même conique.* En effet, il existe une conique tangente aux cinq premières droites, et les tangentes issues de C sont en involution avec les couples de droites joignant C aux sommets opposés du quadrilatère complet circonscrit que forment les tangentes AA_1, AA_2, BB_1, BB_2. Or ces derniers couples font partie de l'involution (C); donc CC_2 est la seconde tangente menée de C à la conique. Ce théorème peut encore être formulé ainsi : *Si trois cordes menées arbitrairement par les pôles* α, β, γ *rencontrent* Σ *aux couples de points* A_1 et A_2, B_1, et B_2, C_1 et C_2, *les droites* AA_1 et AA_2, BB_1 et BB_2, CC_1 et CC_2 *enveloppent une même conique.*

Les involutions (A), (B), (C) marquent sur BC, CA, AB trois ponctuelles involutives (a), (b), (c). *Trois couples quelconques de ces ponctuelles* (un sur chaque support) *appartiennent à une même conique*(*). En particulier, *si trois points de* BC, CA, AB *sont en ligne droite, leurs conjugués appartiennent à une seconde droite.* De là résulte une transformation involutive dans laquelle à une droite correspond une droite(**).

7. Cherchons le caractère analytique de trois involutions associées. ABC étant le triangle de référence, soient

$$\begin{cases} y = \lambda_1 z, \\ y = \lambda_2 z; \end{cases} \quad \begin{cases} z = \mu_1 x, \\ z = \mu_2 x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \nu_1 y, \\ x = \nu_2 y; \end{cases}$$

les équations de trois couples de rayons conjugués. Les paramètres λ_1, λ_2 du premier couple doivent satisfaire à une équation du premier degré, symétrique en λ_1 et λ_2, ou de la forme

$$m\lambda_1\lambda_2 + n(\lambda_1 + \lambda_2) + p = 0.$$

Cette relation étant vérifiée par les paramètres $\lambda_1 = \infty$, $\lambda_2 = 0$ des droites AB, AC, on a $n = 0$. Donc les trois involutions sont caractérisées par des égalités de la forme

$$\lambda_1\lambda_2 = L, \quad \mu_1\mu_2 = M, \quad \nu_1\nu_2 = N, \tag{1}$$

L, M, N étant des constantes. Par hypothèse, il existe un premier triple

---

(*) L'équation d'une telle conique, rapportée au triangle de référence ABC, est de la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy = 0,$$

les coefficients A, B, C étant constants et les autres variables.

(**) Les transformations par transversales réciproques ou inverses rentrent dans ce cas.

de rayons AD_1, BD_1, CD_1 concourant en un même point D_1, tel que les rayons conjugués concourent en un second point D_2; pour les paramètres de ces trois couples, on a $\lambda_1\mu_1\nu_1 = 1$, $\lambda_2\mu_2\nu_2 = 1$, d'où $LMN = 1$. On voit donc qu'à trois rayons AM_1, BM_1, CM_1 menés à un même point M_1 correspondent toujours trois rayons concourant en un second point M_2(*).

Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées de ces points M_1, M_2; les égalités (1) seront équivalentes aux suivantes

$$\frac{x_1x_2}{\lambda} = \frac{y_1y_2}{\mu} = \frac{z_1z_2}{\nu}, \qquad (2)$$

$$x_2 : y_2 : z_2 = \frac{\lambda}{x_1} : \frac{\mu}{y_1} : \frac{\nu}{z_1},$$

ou mieux

$$\rho x_2 = \lambda y_1 z_1, \quad \rho y_2 = \mu z_1 x_1, \quad \rho z_2 = \nu x_1 y_1,$$

λ, μ, ν étant des constantes, ρ un facteur de proportionnalité.

8. Pour définir les involutions associées, il suffit de connaître deux points correspondants; nous choisissons le *point unité* (dont les coordonnées sont égales entre elles) et le point qui a pour coordonnées λ, μ, ν (*point directeur*). Nous adoptons aussi pour conique auxiliaire Σ la circonférence ABC. Joignons A, B, C au point unité M et au point directeur N; soient A_m, B_m, C_m, A_n, B_n, C_n les secondes rencontres des droites ainsi menées avec la circonférence ABC. Les droites A_mA_n, B_mB_n, C_mC_n coupent BC, CA, AB aux pôles α, β, γ des involutions (A), (B), (C). Pour obtenir le point Q qui correspond à un point donné P, on mène les cordes APA_p, BPB_p; les droites $A_p\alpha$, $B_p\beta$ rencontrent la circonférence ABC en des points A_q, B_q qui étant joints à A et B déterminent le point cherché Q.

Lorque les points α, β, γ sont extérieurs à la circonférence ABC, les droites joignant A, B, C aux points de contact des tangentes issues de α, β, γ sont les rayons doubles des involutions (A), (B), (C); elles se coupent, trois à trois, en quatre points *associés* I, I_a, I_b, I_c, qui sont leurs propres homologues dans la transformation; ces points sont les *points doubles* de la transformation. Celle-ci peut être définie par le

(*) Si l'on avait $LMN = -1$, les rayons conjugués avec ceux qui aboutissent à un même point M rencontreraient les côtés opposés de ABC en trois points situés sur une même droite m.

triangle des points principaux et un point double. Les coordonnées de de I, I_a, I_b, I_c sont $(\pm\sqrt{\lambda}, \pm\sqrt{\mu}, \pm\sqrt{\nu})$.

Les tangentes en A_m, B_m, C_m rencontrent BC, CA, AB en des points α', β', γ' qui sont les pôles des involutions (A), (B), (C) dans la transformation définie par les formules

$$x_1x_2 = y_1y_2 = z_1z_2. \tag{3}$$

Le point unité est devenu un point double.

De même, les tangentes en A_n, B_n, C_n rencontrent BC, CA, AB aux pôles α'', β'', γ'' des involutions qui correspondent à la transformation

$$\frac{x_1x_2}{\lambda^2} = \frac{y_1y_2}{\mu^2} = \frac{z_1z_2}{\nu^2}. \tag{4}$$

Le point N est devenu un point double. Le point directeur de la nouvelle transformation a pour coordonnées λ^2, μ^2, ν^2; pour le construire, on mène les droites $A_m\alpha''$, $B_m\beta''$, qui rencontrent la circonférence ABC en deux points que l'on joint à A, B. On voit aisément comment on passe aux points $(\lambda^{2n}, \mu^{2n}, \nu^{2n})$.

Appliquons la transformation (3) à un point quelconque X (x, y, z) et la transformation (2) au point obtenu Y; le point résultant X_1 a pour coordonnées λx, μy, νz. Opérant de même sur X_1, nous aurons un point X_2 $(\lambda^2 x, \mu^2 y, \nu^2 z)$. On voit que la construction du point X_r $(\lambda^r x, \mu^r y, \nu^r z)$ revient à inscrire dans la circonférence ABC deux lignes brisées : l'une a pour premier sommet le point de rencontre A_r de Σ avec la droite AX et ses côtés passent alternativement par α' et α; la seconde part de B_r et ses côtés passent alternativement par β' et β. Si l'on intervertit α' et α, β' et β, on obtient les points $(\lambda^{-r}x, \mu^{-r}y, \nu^{-r}z)$.

En particulier, on peut ainsi construire les *potentiels* successifs du point (λ, μ, ν), c'est-à-dire les points $(\lambda^2, \mu^2, \nu^2)$, $(\lambda^3, \mu^3, \nu^3)$, etc.

9. Adoptons pour (x, y, z) les coordonnées barycentriques. Les formules (3) définissent les points réciproques(*). Les points doubles sont le centre de gravité G et ses associés, sommets du triangle anticomplémentaire de ABC. La ligne des pôles des involutions (A), (B), (C) se confond avec la droite de Longchamps (équation : $a^2x + b^2y + c^2z = 0$; a, b, c étant les côtés du triangle ABC).

(*) J. M. E., 1886, p. 109. Nous avions proposé dans le tôme I de *Mathésis* la dénomination de points isotomiques.

Les points réciproques d'ordre p, sont, d'après M. de Longchamps, définis par les formules

$$\frac{x_1x_2}{a^p} = \frac{y_1y_2}{b^p} = \frac{z_1z_2}{c^p}.$$

Le point directeur est le p^e potentiel (a^p, b^p, c^p).

Soient A_g, B_g, C_g les points de rencontre de la circonférence ABC avec les médianes de ABC, et A_i, B_i, C_i les intersections de cette courbe avec les bissectrices intérieures. Les tangentes en A_g, B_g, C_g rencontrent les côtés du triangle ABC en trois points α_0, β_0, γ_0 situés sur la droite de Longchamps; les cordes A_gA_i, B_gB_i, C_gC_i rencontrent ces côtés en trois points α_1, β_1, γ_1. Nous avons ainsi les pôles des transformations par points réciproques des ordres 0 et 1. Partant du point A_i, inscrivons à la circonférence ABC une ligne brisée de $2(p-1)$ côtés, ces côtés passant alternativement par les points α_0 et α_1; opérant de même sur B_i, C_i, nous aurons les points où la circonférence ABC est rencontrée par les droites joignant A, B, C au p^e potentiel.

Nous abandonnons au lecteur le soin de trouver les pôles des sommets de même rang de ces trois lignes brisées continuées indéfiniment, et d'étudier les simplifications que comportent les constructions, si l'on veut parvenir rapidement au point (a^p, b^p, c^p).

MOMENTS D'INERTIE DU TRIANGLE ET DU TÉTRAÈDRE;

par M. Ernest Cesáro.

1. Nous nous proposons de chercher le moment d'inertie d'un triangle, par rapport à un point quelconque de son plan. Nous supposerons d'abord que ce point soit la projection H du sommet A, sur le côté opposé. En employant les notations habituelles, et en décomposant le triangle en éléments rectangulaires, de hauteur hdx, parallèles à BC, on trouve immédiatement que le moment d'inertie du triangle, par rapport à BC, est

$$I' = ah^2\int_0^1 x(1-x)^2\,dx = \frac{sh^2}{6}.$$

Par conséquent, le moment d'inertie par rapport à la hauteur AH est

$$I'' = \frac{h}{12}(a_1^2 + a_2^2) = \frac{s}{6}(a^2 - 3a_1a_2),$$

où a_1 et a_2 représentent les segments BH, HC. Il en résulte que le moment d'inertie, par rapport au point H, est

$$I_1 = I' + I'' = \frac{s}{6}(a^2 + h^2 - 3a_1a_2).$$

2. D'après une propriété connue, le moment d'inertie I_0, relatif au *centre de gravité* du triangle, est $I_1 - sd^2$, où d représente la distance de H au centre de gravité. Or, on voit facilement que

$$d^2 = \frac{1}{9}[h^2 + (a_1 - a_2)^2] = \frac{1}{9}(a^2 + h^2 - 4a_1a_2).$$

Par suite :

$$I_0 = \frac{s}{18}(a^2 + h^2 - a_1a_2) = \frac{s}{36}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Ainsi : « *le moment d'inertie d'un triangle, par rapport à son centre de gravité, est égal à la* 36^{ième} *partie de l'aire, multipliée par la somme des carrés des côtés.* »

3. Enfin, pour un *point quelconque*, dont la distance au centre de gravité est δ, on a :

$$I = s\left\{\frac{1}{36}(a^2 + b^2 + c^2) + \delta^2\right\}.$$

Soient x, y, z, les distances du point considéré aux milieux des côtés du triangle. Ces milieux forment un second triangle, admettant même centre de gravité que le premier. On a donc, en vertu d'un théorème connu, et en appelant l, m, n les médianes du premier triangle,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3\delta^2 + \frac{1}{9}(l^2 + m^2 + n^2) = 3\delta^2 + \frac{1}{12}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Conséquemment :

$$I = \frac{s}{3}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Ainsi : « *le moment d'inertie d'un triangle, par rapport à un point quelconque de son plan, est égal au produit de l'aire par la moyenne arithmétique des carrés des distances du point considéré aux milieux des côtés* (*). »

4. Prenons un tétraèdre $AA_1A_2A_3$. Pour la régularité des notations, désignons par a_i le côté AA_i, et par b_i le côté opposé. Soient m et h la

(*) Voir, dans la *Nouvelle Correspondance Mathématique*, 1879, t. V., p. 29, la *Question* 446, posée par M. Joseph Cesáro, résolue par M. Jamet.

médiane et la hauteur, issues de A. Le moment d'inertie du tétraèdre, par rapport à la base $A_1A_2A_3$, est

$$I' = sh^2 \int_0^1 x^2 (1-x)^2 \, dx = \frac{Vh^2}{10},$$

s étant l'aire de $A_1A_2A_3$, et V le volume du tétraèdre. De même, le moment d'inertie, par rapport à la hauteur, est, en vertu du résultat obtenu dans le dernier paragraphe,

$$I'' = \frac{sh}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\int_0^1 x^4 \, dx = \frac{V}{5}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$

où α, β, γ représentent les distances du point H, projection de A sur $A_1A_2A_3$, aux milieux des côtés de $A_1A_2A_3$. Par conséquent, le moment d'inertie, relatif au point H, est

$$I_1 = I' + I'' = \frac{V}{10}\left\{h^2 + 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right\}.$$

Or, on sait que, d étant la distance de H au centre de gravité de $A_1A_2A_3$, on a

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 3d^2 + \frac{1}{9}(\lambda^2+\mu^2+\nu^2) = 3d^2 + \frac{1}{12}(b_1^2+b_2^2+b_3^2),$$

où λ, μ, ν représentent les médianes de $A_1A_2A_3$. Par suite :

$$I_1 = \frac{V}{10}\left\{6m^2 - 5h^2 + \frac{1}{6}(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\right\}.$$

5. Pour avoir le moment d'inertie du tétraèdre, par rapport à son centre de gravité G, il faut, avant tout, que nous calculions la distance $HG = \delta$. Or, la figure donne immédiatement

$$\delta^2 = \frac{1}{16}(h^2 + 9d^2) = \frac{1}{16}(9m^2 - 8h^2),$$

et, par suite :

$$I_0 = I_1 - V\delta^2 = \frac{V}{80}\left\{3m^2 + \frac{4}{3}(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\right\}.$$

Il est facile de transformer le second membre, en utilisant le théorème que voici : « *dans tout tétraèdre, le triple carré d'une médiane est égal à la somme des carrés des côtés adjacents, diminuée du tiers de la somme des carrés des autres côtés* ». D'après cela, on obtient

$$I_0 = \frac{V}{80}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

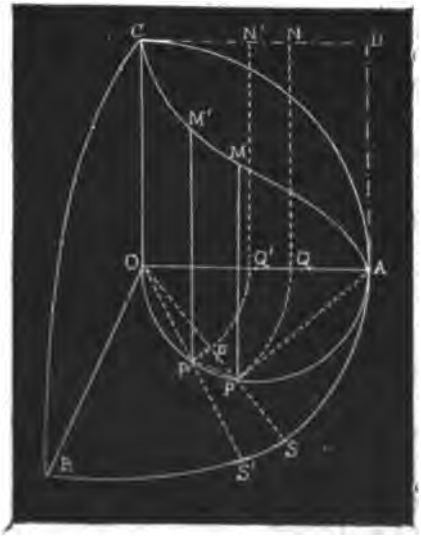
En d'autres termes : « *Le moment d'inertie d'un tétraèdre, par rapport à son centre de gravité, est égal à la* $80^{ième}$ *partie du volume, multiplié par la somme des carrés des côtés.* »

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE ET GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE VIVIANI;

par M. E. WASTEELS, élève à l'École normale des sciences.

Depuis l'invention du calcul infinitésimal, il y a deux siècles, les questions de quadrature se résolvent le plus souvent d'une manière purement mécanique, qui n'exige pour ainsi dire aucun esprit d'invention. Les solutions directes, intuitives de la géométrie, au contraire, demandent plus d'efforts; mais elles ont l'avantage de faire saisir la vraie raison des propriétés des figures, de rattacher à une même origine des questions semblables et de faire découvrir d'une manière naturelle, des généralisations inattendues de théorèmes connus.

L'article de M. E. Wasteels sur la *fenêtre de Viviani* est un excellent exemple de la fécondité des méthodes directes de la géométrie et à ce titre nous le signalons à l'attention de nos lecteurs. (P. M.)



1. Posons

$\Delta s = \text{arc } PP'$, $u = CMAPO$,

On a

$$u = \lim S_{MM'P'P} = \lim S_{\Delta s.PM} = \lim S_{\Delta s.PA}.$$

Construisons le carré OADC; menons les droites OP', OP, AP, et traçons les arcs de cercle PQ, P'Q' de centre O; enfin, élevons sur OA les perpendiculaires QN et Q'N', et joignons PP', et P'p, en désignant par p l'intersection de OP avec l'arc de cercle P'Q'. On aura

$$\lim \frac{\Delta s.PA}{NN'Q'Q} = 1.$$

En effet, on a, dans le triangle PP'p, à la limite,

$$\lim \frac{QQ'}{PP'} = \lim \frac{Pp}{PP'} = \cos \lim pPP' = \cos BOP = \cos OAP = \frac{AP}{AO}.$$

Par suite,

$$\lim \frac{QQ'}{\Delta s} = \lim \frac{QQ'}{PP'} \cdot \frac{PP'}{\Delta s} = \lim \frac{QQ'}{PP'} = \frac{AP}{AO}, \quad \lim \frac{QQ' \times OA}{\Delta s \times PA} = 1,$$

et enfin,

$$s = \lim S\Delta s . PA = \lim SQQ' . QN = \lim SNN'Q'Q = ADCO = R^2.$$

Généralisation. Il est aisé de voir que si l'on remplace la sphère par un ellipsoïde de révolution autour de OC, on aura encore $s = OADC$, la figure OADC étant un rectangle.

II. On sait que *si une figure tracée sur une sphère est projetée sur le cylindre circonscrit, au moyen de perpendiculaires abaissées sur l'axe du cylindre, l'aire de la figure tracée sur la sphère est égale à celle de sa projection.* Cette propriété se démontre aisément en partageant la figure en portions de zones dont les hauteurs décroissent indéfiniment.

Cela étant, considérons le cylindre circonscrit le long du cercle ASB, et projetons sur ce cylindre la figure sphérique AMCBSA ; l'aire de cette figure est égale à celle de sa projection. Désignons par AM_1C_1BSA, cette projection qui est en même temps la projection de la surface du cylindre AMCOPA. Or

$$\text{aire AMCOPA} = \lim S \text{ aire PMM'P'}.$$

Considérons la projection de PMM'P' sur le cylindre; en désignant cette projection par $P_1M_1M'_1P'_1$, on peut écrire, puisque $PM = P_1M_1$, et arc PP' = arc SS',

$$\lim \frac{PMM'P'}{P_1M_1M'_1P'_1} = \lim \frac{\text{arc } PP' \times PM}{\text{arc } SS' \times P_1M_1} = \lim \frac{\text{arc } PP'}{\text{arc } SS'} = 1.$$

Par suite,

$$\text{aire AMCOP} = \lim SP_1M_1M'_1P'_1 = \text{aire } AM_1C_1BS = \text{aire AMCBS}.$$

Remarque. La démonstration qui précède montre que si l'on projette, par des droites rencontrant OC à angle droit, une figure quelconque de la sphère sur le cylindre de base OAP, l'aire de la projection est égale à celle de la figure projetée.

Généralisation. Si, au lieu de prendre un cylindre dont le diamètre de

la base est OA, on prend un cylindre dont le diamètre de la base est quelconque, par exemple $\frac{R}{n}$, on trouverait de même, en désignant par $\mathfrak{A}_i$ l'aire du cylindre intérieur et par $\mathfrak{A}_e$ l'aire de la portion de la sphère qui reste,

$$\mathfrak{A}_e = n\mathfrak{A}_i,$$

car, d'après la démonstration précédente, le rapport $(\mathfrak{A}_e : \mathfrak{A}_i)$ est égal au rapport de l'arc ASB à la moitié de la circonférence de la base du cylindre intérieur.

On peut encore dire : si l'on perce une sphère par deux cylindres de même base et tangents le long d'un diamètre de la sphère, l'aire de la surface qui reste de la sphère sera à la somme des aires des surfaces cylindriques intérieures dans le rapport (AA′ : *aa*′) du diamètre de la sphère au double diamètre du cylindre.

Autre conséquence. Si l'on projette une figure quelconque tracée sur la sphère sur un de ces cylindres, la projection étant faite suivant des droites rencontrant le diamètre projeté en O à angle droit le rapport de l'aire d'une figure à celle de sa projection sera encore égal à n.

NOTES. Voici quelques propriétés de la courbe de Viviani, peut-être nouvelles, au moins en partie.

I. On a évidemment PM = PA = R sin AOS. Donc, si l'on développe sur un plan le cylindre APOC, la transformée de la courbe CMA est la sinusoïde relative au cercle de rayon R; par suite, elle a une aire égale à R^2, d'après un théorème connu (Communiquée par M. J. MISTER).

II. La ligne CMA se projette sur le cylindre ASB suivant une ellipse située dans le plan bissecteur de l'angle des plans BOA, COA; ce qui est d'accord avec la remarque précédente. En effet, CMA et sa projection ont même transformée plane et l'on sait que la transformée d'une ellipse tracée sur un cylindre de révolution est une sinusoïde. La longueur de la ligne CMA est, d'après cela, égale à celle d'un quadrant de l'ellipse ayant pour axes 2R, $2R\sqrt{2}$.

III. Considérons le conoïde formé par les horizontales projetant la courbe de Viviani sur le cylindre circonscrit à la sphère. 1° La partie du petit cylindre OPA (ayant R pour diamètre et pour hauteur) située au dessous de ce conoïde à un volume égal à $\frac{1}{4} R^3$. 2° La partie du quart du cylindre ASB (circonscrit à la sphère et ayant R pour rayon et pour hauteur) située au dessous du conoïde a un volume égal à $\frac{1}{4} R^3$ (J. MISTER).

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE (*).

par M. Cl. Thiry, étudiant à la faculté des sciences de Gand.

1. D'un point quelconque du petit axe d'une ellipse de centre O, on mène une tangente et une perpendiculaire au diamètre passant par le point de contact; ces droites rencontrant le grand axe en T et P, démontrer que

$$OT : OP = a^2 : b^2.$$

2. Soient M, M′ les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse. La tangente en M rencontre le grand axe en T, et la perpendiculaire abaissée de T sur OM rencontre le petit axe en H; la tangente en M′ coupant le petit axe en T′, et la perpendiculaire abaissée de T′ sur OM′ coupant le grand axe en H′, on a la relation

$$OH : OH' = a^2 : b^2.$$

La droite TT′ est parallèle à l'un des diamètres OM, OM′.

Faire usage des formules de Chasles $\frac{x'}{a} = \pm\frac{y''}{b}$, $\frac{x''}{a} = \mp\frac{y'}{b}$, qui relient les coordonnées (x', y'), (x'', y'') de M et M′.

3. On joint un point quelconque M d'une ellipse aux extrémités A, A′ du grand axe. Soient D, E les points où le droite AM et la perpendiculaire abaissée de A sur A′M rencontrent la tangente menée par A′. Démontrer que le rapport A′D : A′E est constant. Déduire de cette propriété un moyen de construire une ellipse dont on donne les axes.

La démonstration se fait aisément, si l'on observe que les coefficients angulaires de AM et A′M vérifient la relation $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$.

4. On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, et deux points fixes P, A sur Ox. M étant un point mobile sur Oy, on demande le lieu du point de rencontre de la droite AM avec la perpendiculaire abaissée de O sur la droite PM.

Ce lieu est une conique dont un axe coïncide avec OA et dont le paramètre

---

(*) Ces questions sont des exercices utiles, assez faciles et cependant éminemment propres à initier les commençants au mécanisme de la géométrie analytique. Quelques-uns des lieux géométriques se traitent facilement par la géométrie projective.

égale OP. On obtient une parabole, si l'on remplace MA par une parallèle à Ox, menée par M. — On peut généraliser la question en faisant mouvoir M sur une droite quelconque.

5. Soient A, A′ les sommets d'une ellipse, δ une droite fixe perpendiculaire à AA′, M un point quelconque de la courbe. La droite AM coupant δ en D, démontrer que la perpendiculaire abaissée de D sur A′M passe par un point fixe. — Étendre le théorème à la parabole.

6. Soient A, A′ les sommets d'une ellipse, M un point quelconque de la courbe. La tangente en M et la corde A′M rencontrant la tangente menée par A aux points T, D, démontrer 1° que T est le milieu de AD; 2° que la perpendiculaire abaissée de T sur AM rencontre AA′ en un point fixe P. — Déduire de là une construction de l'ellipse par points et tangentes(*).

7. Une sécante menée par le sommet A d'une ellipse rencontre la courbe en C, le petit axe en D. La parallèle menée par D à l'axe OA rencontre le diamètre OC en un point M. Démontrer que M décrit une parabole de même paramètre que l'ellipse, lorsque AC tourne autour de A.

8. Par le sommet A d'une ellipse, on mène la corde AC; par C, on mène une parallèle au grand axe, rencontrant en M la perpendiculaire abaissée du centre sur AC.

Le lieu de M est une ellipse semblable à la première.

9. Soient M, M′ les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse, m et m' les symétriques de M′ par rapport aux axes de la courbe. Démontrer que les droites Mm, Mm' sont parallèles aux diamètres conjugués égaux. — Déduire de là un moyen de construire le conjugué d'un diamètre donné, l'ellipse étant donnée par ses axes.

Faire usage des formules indiquées au n° 2 ou projeter l'ellipse suivant une circonférence.

10. On donne une droite Ox, un point O sur cette droite et deux points extérieurs A (a, b), B (a', b'). Après avoir joint A et B à un point quelconque C de Ox, on mène OM parallèle à AC et rencontrant BC en M. Le lieu de M est une conique. Discussion.

Équation du lieu : $(a - a')y^2 + (b' - b)xy - ab'y - bb'x = 0$.

(*) Il y a un lien étroit entre les n^os^ 3, 4, 5 et 6.

11. Même question, OM étant perpendiculaire à AC.

Équation du lieu : $b'x^2 + (a - a')y^2 + (b' - b)xy - ab'y - bb'x = 0$.

12. On donne deux droites OX, OY et un point A sur OX. Par un point quelconque B de OY, on mène une parallèle à OX; soit M le point où cette parallèle coupe la perpendiculaire abaissée de O sur AB. Trouver le lieu de M.

Équation du lieu : $y^2 + xy\cos\theta - ax - ay\cos\theta = 0$. — Chercher les asymptotes. Ce problème se ramène facilement à la question 535 proposée dans *Mathesis*.

13. Soient AB un diamètre, Ay une tangente d'une circonférence O. Une sécante quelconque menée par B rencontre la courbe en C, Ay en D. Lieu du point de rencontre de la droite AC avec la droite joignant B au milieu de AD.

Équation du lieu : $x^2 + 2y^2 - 2Rx = 0$.

14. Un cercle variable touche une droite fixe OX au point fixe A, et rencontre une droite donnée OY aux points B et C. Lieu du point de rencontre de la droite AC avec une parallèle à OX menée par B.

Parabole : $y^2 = a^2 - ax$.

15. Dans toute conique à centre, le produit des perpendiculaires abaissées des foyers F, F′ sur les rayons vecteurs d'un point M de la courbe, est au carré de la projection de FF′ sur la tangente, comme le carré du petit axe est au carré du grand axe.

---

16. Soit D la projection d'un point M d'une ellipse sur la directrice DD′; joignons D au foyer F correspondant à cette directrice et soit N le point de rencontre de DF avec le petit axe. Démontrer que MN est la normale. — De là un moyen de mener une normale en un point donné M de l'ellipse ou par un point donné N du petit axe. — La tangente en M rencontre DD′ en un point H. Démontrer que les points M, D, H, F sont sur une circonférence tangente à NM, et conclure de là que $MN^2 = NF.ND$ (E. Catalan). — MN rencontrant le grand axe en I, conclure, des triangles semblables MIF, DFM, la relation $\overline{MF}^2 = MD.IF$.

QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE.

(Voir *Mathesis*, p. 157).

54. Si a et b sont premiers entre eux,

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b-1)}{1.2.3\ldots a \times 1.2.3\ldots b} = \textit{entier}. \qquad \text{(E. Catalan.)}$$

On a

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b-1)(a+b)}{1.2.3\ldots a \times 1.2.3\ldots b} = \textit{entier} = \frac{\mathrm{N}(a+b)}{b},$$

N désignant le nombre combinatoire

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b-1)}{1.2.3\ldots a \times 1.2.3\ldots(b-1)}.$$

b étant premier avec $a+b$, $\frac{\mathrm{N}}{b}$ est un nombre entier.

55. Si $a+b$ est un nombre premier,

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b-1)}{1.2.3\ldots a \times 1.2.\ldots b} = \textit{entier}.$$

Même démonstration que la précédente.

56. Si p est un nombre premier,

$$C_{p-1,q} = \mathscr{M}.\ p + (-1)^q. \qquad \text{(E. Catalan.)}$$

Autrement dit, si $a+b+1$ est un nombre premier,

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b)}{1.2.3\ldots a \times 1.2.3\ldots b} = \mathscr{M}.\ (a+b+1) + (-1)^a. \qquad \text{(A)}$$

En effet,

$$C_{p-1,q} = \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-q)}{1.2\ldots q} = \frac{p^q - S_1 p^{q-1} + S_2 p^{q-2} - \ldots + (-1)^{q-1} S_{q-1} p}{1.2.3\ldots q} \pm 1.$$

Donc : 1° la dernière fraction se réduit à un nombre entier divisible par p; 2° $C_{p-1,q} = \mathscr{M}\, p \pm 1$. De même, $C_{a+b,b} = \mathscr{M}\, a+1$, si a est premier et $> b$.

57. Si $a+b+1$ est un nombre premier,

$$1.2.3\ldots a \times 1.2.3\ldots b + (-1)^a = \mathscr{M}\,(a+b+1).$$

(*Journal de Vuibert*, 15 *juin* 1888.)

En effet, d'après le théorème de Wilson,

$$1.2.3\ldots(a+b) = \mathscr{M}\,(a+b+1) - 1.$$

Combinons cette égalité avec (A), etc.

58. Si la somme ou la différence de deux nombres est un carré, le double de la somme ou de la différence de leurs cubes est une somme de trois carrés. (DE ROCQUIGNY.)

A déduire de

$$2(a^3 \pm b^3) = (a \pm b)[a^2 + b^2 + (a \mp b)^2].$$

59. Le nombre $\frac{1}{5}[(n+1)^5 - n^5 - 1]$ est le double d'un triangulaire et aussi la somme de deux triangulaires. (DE ROCQUIGNY.)

Il est égal à

$$(n^2+n)(n^2+n+1) = \tfrac{1}{2}n^2(n^2-1) + \tfrac{1}{2}(n+1)^2[(n+1)^2-1].$$

60. Le nombre $\frac{1}{7}[(n+1)^7 - n^7 - 1]$ est le produit d'un triangulaire par une somme de trois bicarrés. (DE ROCQUIGNY.)

Il peut prendre la forme

$$\tfrac{1}{2}n(n+1)[(n+1)^4 + n^4 + 1].$$

61. Mettre $a^2 + b^2 + 2c^2$ sous la forme d'une somme de quatre triangulaires. (DE ROCQUIGNY.)

$$\tfrac{1}{2}(a-c)(a-c-1) + \tfrac{1}{2}(a+c)(a+c+1) + \tfrac{1}{2}(b-c)(b-c+1) + \tfrac{1}{2}(b+c)(b+c-1).$$

62. Dans les couples de suites de nombres :

$$A\begin{cases} 1, & 2, & 3, & \ldots, & n-1, \\ n-1, & n-2, & n-3, & \ldots, & 1; \end{cases}$$

$$B\begin{cases} 1, & 2, & \ldots, & n, \\ 2n-1, & 2n-3, & \ldots, & 1; \end{cases}$$

$$C\begin{cases} 1^2, & 2^2, & 3^2, & \ldots, & (n-2)^2, & (n-1)^2, \\ (n-1)^2, & (n-2)^2, & (n-3)^2, & \ldots, & 2^2, & 1^2; \end{cases}$$

$$D\begin{cases} 1^2, & 3^2, & \ldots, & (2n-3)^2, & (2n-1)^2, \\ (2n-1)^2, & (2n-3)^2, & \ldots, & 3^2, & 1^2; \end{cases}$$

$$E\begin{cases} 1^2, & 2^2, & \ldots. & (n-1)^2, & n^2, \\ (2n-1)^2, & (2n-3)^2, & \ldots, & 3^2, & 1^2; \end{cases}$$

$$F\begin{cases} 1, & 3, & \ldots, & 2n-3, & 2n-1, \\ 2n-1, & 2n-3, & \ldots, & 3, & 1; \end{cases}$$

$$G\begin{cases} 1, & 5, & \ldots, & 4n-7, & 4n-3, \\ 4n-1, & 4n-5, & \ldots, & 7, & 3; \end{cases}$$

on fait la somme des produits des nombres superposés. Démontrer que

les sommes relatives à A, B, C, D, E ont pour valeurs $\frac{1}{6}n(n^2-1)$, $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $\frac{1}{30}n(n^4-1)$, $\frac{1}{15}n(8n^4+7)$, $\frac{1}{30}n(n+1)[(n+1)^4-n^4]$, que la différence des sommes relatives à F et G égale $2n^2$. (DE ROCQUIGNY.)

63. La somme des n premiers carrés impairs est égale à la somme des $2n-1$ premiers triangulaires.

Dans une pile à base triangulaire, on peut juxtaposer deux tranches consécutives de manière à former un carré. (DE ROCQUIGNY.)

64. Le nombre des boulets qui se trouvent à la surface *totale* d'une pile triangulaire est la somme de deux carrés. (DE ROCQUIGNY.)

65. Le nombre des boulets qui se trouvent à la surface *totale* d'une pile à base carrée est la somme de trois carrés. (DE ROCQUIGNY.)

66. Trouver le nombre des boulets qui se trouvent à la surface *visible* d'une pile à base triangulaire ou carrée. (DE ROCQUIGNY.)

67. Posons

$$t_n=\frac{n(n+1)}{2},\quad T_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},\quad Q_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

T_n et Q_n sont les nombres des boulets contenus dans une pile à base triangulaire ou carrée, de n tranches. Démontrer que

$$6(Q_1+Q_2+Q_3+\cdots+Q_n)=t_n^2+2n=2t_n\,t_{n+1}=3(n+1)\,T_n,$$
$$24(T_1+T_2+\cdots T_n)=n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=4t_n\,t_{n+2}=(n^2+3n+1)^2-1;$$
$$T_n=Q_n-Q_{n-1}+Q_{n-2}-Q_{n-3}+\cdots\pm Q_1.$$

(DE ROCQUIGNY.)

68. Soient $u_1, u_2, u_3,\ldots$ des nombres en progression arithmétique. Démontrer les propositions suivantes :

1° $u_1^4+u_2^4+2u_3^4+u_4^4+u_5^4$ est une somme de trois carrés ;

2° $u_1^2+2u_2^2+3u_3^2+4u_4^2$ est une somme de deux carrés ;

3° $u_1^2+3u_2^2+5u_3^2+7u_4^2+9u_5^2$ est une somme de trois carrés ;

4° $u_1^3+u_2^3+\cdots+u_8^3$ est divisible par u_1+u_8 ; le quotient est une somme de cinq carrés ;

5° $u_1^4+u_2^4+u_3^4+u_4^4+u_5^4$, $u_1^6+u_2^6+u_3^6+u_4^6+u_5^6$ peuvent se mettre sous la forme d'une somme de quatre carrés ;

6° $u_1^5+u_2^5+u_3^5$ est la somme de quatre carrés, si u_2 est un carré ou la somme de deux carrés, ou la somme de quatre carrés ;

7° $u_1^3+u_2^3+u_3^3+u_4^3+u_5^3$ est le produit de u_1+u_3 par une somme de trois ou quatre carrés. (DE ROCQUIGNY.)

69. Mettre (notations de l'exercice précédent) les quantités

$$u_1u_2 + u_3u_4, \quad u_1u_2 + u_3u_4 + u_5u_6 + u_7u_8,$$

respectivement, sous la forme d'une somme de trois ou de quatre carrés.

(DE ROCQUIGNY.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 3.

(Voir *Mathesis*, t. I, p. 12).

Démontrer et généraliser le théorème suivant : Les produits

$$\alpha\alpha,\ \alpha\beta,\ \alpha\gamma,\ \beta\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\gamma$$

des racines α, β, γ ***de l'équation***

$$a + bz + cz^2 + dz^3 = 0$$

sont les racines de l'équation en u :

$$\begin{vmatrix} u^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & u^2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d & 0 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (m)$$

Débarrasser cette équation des racines $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$. (FARKAS.)

Solution par M. L. VAN DEN BROECK(*). Supposons $d = 1$; l'équation en u sera de la forme

$$(1) \qquad u^6 + A_1u^5 + A_2u^4 + A_3u^3 + A_4u^2 + A_5u + A_6 = 0.$$

(*) P. L. Van den Broeck, né à Opwyck (Brabant), le 3 mai 1829, est mort le 7 avril 1887. Il faisait partie, depuis le 20 juin 1846, sous le nom de Frère Marcy, de l'Institut des Frères des Écoles chrétiennes. Il a publié divers ouvrages de mathématiques élémentaires, parmi lesquels il faut citer surtout ses *Exercices de Géométrie* (Tournay, Casterman, 3me édition, 1884), l'un des meilleurs livres de ce genre que l'on puisse mettre entre les mains des élèves. (Voir *Mathesis*, 1885, t. V, p. 34.)

Désignons par S_n la somme des puissances de degré n des racines α^2, $\alpha\beta$, ... Nous aurons les relations :

$$(2)\qquad \begin{cases} S_1 + A_1 = 0, \\ S_2 + A_1 S_1 + 2A_2 = 0, \\ S_3 + A_1 S_2 + A_2 S_1 + 3A_3 = 0, \\ S_4 + A_1 S_3 + A_2 S_2 + A_3 S_1 + 4A_4 = 0 ; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

et en observant que S_n est la somme de deux fonctions symétriques de α, β, ...

$$(3)\qquad S_n = \Sigma\alpha^{2n} + \Sigma\alpha^n\beta^n = \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha^{2n} + \tfrac{1}{2}(\Sigma\alpha^n)^2.$$

Ainsi, après avoir calculé les sommes $\Sigma\alpha^m$ pour $m = 1, 2, 3 \ldots 12$, par les formules

$$\begin{aligned} &\Sigma\alpha + c = 0, \\ &\Sigma\alpha^2 + c\Sigma\alpha + 2b = 0, \\ &\Sigma\alpha^3 + c\Sigma\alpha^2 + b\Sigma\alpha + 3a = 0, \\ &\Sigma\alpha^4 + c\Sigma\alpha^3 + b\Sigma\alpha^2 + a\Sigma\alpha = 0; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

on obtiendra S_1, S_2, S_3 .... au moyen de la formule (3), et ensuite les coefficients A_1, A_2, A_3 ... par les relations (2). On trouve

$$\begin{aligned} A_1 &= -c^2 + b, \\ A_2 &= bc^2 - ac - b^2, \\ A_3 &= -ac^2 + 4abc - b^3 - 2a^2, \\ A_4 &= -a^2c^2 + ab^2c - a^2b; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

On obtient les coefficients A_5 et A_6 plus simplement. On a, en effet,

$$\begin{aligned} -A_5 &= -a^2\Sigma\alpha + a^2\Sigma\alpha^2\beta^2 = a^2b^2 - a^2c, \\ A_6 &= \alpha^4\beta^4\gamma^4 = a^4. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer a, b, c par les rapports $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$, et à substituer ensuite les valeurs de A_1, A_2 ... dans l'équation (1). En développant le déterminant de la question proposée, on trouve la même relation.

Pour débarrasser l'équation en n des racines α^2, β^2, γ^2, il suffit de supprimer de (3) le terme $\Sigma\alpha^{2n}$, ce qui donne

$$S_n = \Sigma\alpha^n\beta^n = \tfrac{1}{2}(\Sigma\alpha^n)^n - \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha^{2n}.$$

Mais, l'équation en u étant alors de la forme $u^3 + A_1u^2 + A_2u + A_3 = 0$, on a plus simplement, en supposant $d = 1$,

$$-A_1 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b,$$
$$A_2 = -a(\alpha + \beta + \gamma) = ac,$$
$$-A_3 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 = u^2.$$

Donc, en remplaçant a, b, c par $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$.

$$d^2u^3 - bdu^2 + acu - a^2 = 0 \qquad (u)$$

ou, sous une autre forme,

$$\begin{vmatrix} u^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & u & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ a & b & c & d & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. Voici les valeurs des fonctions symétriques dont il a été question plus haut.

$$\Sigma\alpha = -c,$$
$$\Sigma\alpha^2 = c^2 - 2b,$$
$$\Sigma\alpha^3 = -(c^2 - 3b)c - 3a,$$
$$\Sigma\alpha^4 = (c^2 - 4b)c^2 + 2b^2 + 4ac,$$
$$\Sigma\alpha^5 = -(c^2 - 5b)c^3 - 5b^2 - 5ac^2 + 5ab,$$
$$\Sigma\alpha^6 = (c^2 - 6b)c^4 + 9b^2c^2 + 6ac^3 - 12abc - 2b^3 + 3a^2,$$
$$\Sigma\alpha^7 = -(c^2 - 7b)c^5 - 14b^2c^3 - 7ac^4 - 21abc^2 + 7b^2c - 7a^2c - 7ab^2,$$
$$\Sigma\alpha^8 = (c^2 - 8b)c^6 + 20b^2c^4 + 8ac^5 - 32abc^3 - 16b^3c^2 + 12a^2c^2 + 24ab^2c + 2b^4 - 8a^2b.$$

$$S_1 = c^2 - b,$$
$$S_2 = (c^2 - 4b)c^2 + 3b^2 + 2ac,$$
$$S_3 = (c^2 - 6b)c^4 + 9b^2c^2 + 6ac^3 - 15abc - b^3 + 6a^2,$$
$$S_4 = (c^2 - 8b)c^6 + 20b^2c^4 + 8ac^5 - 32abc^3 - 16b^3c^2 + 14a^2c^2 + 20ab^2c + 3b^4 - 4a^2b.$$

Note. La solution précédente n'est évidemment qu'une vérification, intéressante comme exercice sur les fonctions symétriques, mais qui n'est susceptible d'aucune généralisation. Voici un moyen plus simple d'établir le théorème de M. Farkas, quand on se borne au troisième degré.

1° On a évidemment

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{a}{d}, \quad \gamma = -\frac{a}{d\alpha\beta} = -\frac{a}{du}$$

puisque l'une des valeurs de u est $\alpha\beta$. Substituant cette valeur de γ dans la relation $a+b\gamma+c\gamma^2+d\gamma^3=0$, il vient

$$a-\frac{ab}{du}+\frac{a^2c}{d^2u^2}-\frac{a^3d}{a^3u^3}=0,$$

identique à l'équation (n).

2° Si l'on désigne par u les quantités α^2, β^2, γ^2, l'équation donnée aura pour racine $\sqrt{u}$; donc l'équation qui a pour racines α^2, β^2, γ^2 est

$$a+b\sqrt{u}+cu+du\sqrt{u}=0$$

ou

$$a^2u^3+u^2(2bd-c^2)+u(b^2-2ac)-a^2=0. \qquad (p)$$

3° L'équation (m) de M. Farkas est le produit des équations (n) et (p). (J. N.)

Autre solution. Posons, dans l'équation à vérifier, $u=v^2$, puis multiplions les lignes et les colonnes à partir de la première, respectivement par v^{-5}, v^{-3}, v^{-1}, 1, v, v^2, v^3. Elle deviendra

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & & & -1 & \\ & 1 & & & & -1 & & \\ & & 1 & & -1 & & & \\ & & & a & bv & cv^2 & dv^3 & \\ & & a & bv & cv^2 & dv^3 & & \\ & a & bv & cv^2 & dv^3 & & & \\ a & bv & cv^2 & dv^3 & & & & \end{vmatrix} = 0.$$

Soient encore

$$a+bv+cv^2+dv^3=S, \quad a-bv+cv^2-dv^3=S',$$

Ajoutons les six premières colonnes à la dernière; puis, dans le nouveau déterminant, ajoutons à la sixième colonne multipliée par 2, deux fois la seconde, deux fois la quatrième et retranchons-en la septième. L'équation en v peut alors s'écrire

$$0=\begin{vmatrix} 1 & & & & & 0 & 0 \\ & 1 & & & & 0 & 0 \\ & & 1 & & -1 & 0 & 0 \\ & & & a & bv & S' & S \\ & & a & bv & cv^2 & -S' & S \\ & a & bv & cv^2 & dv^3 & S' & S \\ a & bv & cv^2 & dv^3 & & -S' & S \end{vmatrix} = SS' \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & a & bv & 1 & 1 \\ a & bv & cv^2 & -1 & 1 \\ bv & cv^2 & dv^3 & 1 & 1 \\ cv^2 & dv^3 & & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

et elle se décompose en deux équations plus simples.

La première, $SS' = 0$, c'est-à-dire

$$(a + b\sqrt{u} + cu + du\sqrt{u})(a - b\sqrt{u} + cu - du\sqrt{u}) = 0,$$

est évidemment vérifiée par $\sqrt{u} = \pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma$, ou encore par $u = \alpha^2, \beta^2, \gamma^2$. C'est l'équation (p).

Le premier membre de l'autre, au facteur constant 2 près, peut se mettre successivement sous les formes suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & bv & 1 & 0 \\ a & bv & cv^2 & 0 & 1 \\ b & cv^2 & dv^3 & 1 & 0 \\ cv^2 & dv^3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & bv & 1 \\ a - cv^2 & bv - dv^3 & cv^2 & 0 \\ bv & cv^2 & dv^3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -bv & a - cv^2 & bv - dv^3 \\ a - cv^2 & bv - dv^3 & cv^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - cv^2 & -dv^3 \\ bv - dv^3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & bv - dv^3 \\ -dv^3 & a - cv^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & bv - dv^3 & dv^3 \\ -dv^3 & a - cv^2 & cv^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & bv & dv^3 \\ -dv^3 & a & cv^2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & bv & dv^3 & 0 \\ -dv^3 & a & cv^2 & dv^3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & bv & dv^3 & 0 \\ 0 & a & cv^2 & dv^3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & bv & cv^2 & dv^3 & 0 \\ 0 & a & bv & cv^2 & dv^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplions les lignes du dernier déterminant respectivement par $v^{-2}, v^{-1}, 1, v, v^2$, les colonnes par $v^2, v, 1, v^{-1}, v^{-2}$, et remplaçons v^2 par u, en égalant à zéro le déterminant ainsi obtenu, on aura l'équation (s) en u, débarrassée des racines $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1 & 0 \\ u^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Le même procédé appliqué à une équation du quatrième degré,

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = 0,$$

ayant pour racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, donne pour équation en u, débarrassée des racines $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$, la suivante :

$$\begin{vmatrix} u^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & u^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d & e & 0 \\ a & b & c & d & e & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (q)$$

Nous allons montrer que celle-ci a pour racines $\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta, \gamma\delta$. (Si l'on opérait de même sur l'équation réduite relative à une équation du troisième degré, on ne verrait pas aussi bien que la démonstration est générale). Soient

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = (x - \alpha)(b_1 + c_1x + d_1x^2 + e_1x^3),$$
$$b_1 + c_1x + d_1x^2 + e_1x^3 = (x - \beta)(e_2 + d_2x + e_2x^2).$$

On aura

$$e = e_1, \quad d = d_1 - \alpha e_1, \quad c = c_1 - \alpha d_1, \quad b = b_1 - \alpha c_1, \quad a = -\alpha b_1,$$
$$e_1 = e_2, \quad d_1 = d_2 - \beta e_2, \quad c_1 = c_2 - \beta d_2, \quad b_1 = -\beta c_2.$$

Cela posé, retranchons de la sixième colonne du déterminant (q), la septième multipliée par α; de la cinquième, la nouvelle sixième colonne multipliée par α; de la quatrième, la nouvelle cinquième colonne multipliée par α; et ainsi de suite. Opérons de même sur le nouveau déterminant formé, en remplaçant α par β. Nous obtiendrons un troisième déterminant dont les trois dernières lignes seront

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad c_2 \quad d_2 \quad e_2,$$
$$0 \quad 0 \quad 0 \quad c_2 \quad d_2 \quad e_2 \quad 0,$$
$$0 \quad 0 \quad c_2 \quad d_2 \quad e_2 \quad 0 \quad 0,$$

et les quatre premières

$$x^3+\frac{\alpha^7-\beta^7}{\alpha-\beta},\quad \frac{\alpha^6-\beta^6}{\alpha-\beta},\quad \frac{\alpha^5-\beta^5}{\alpha-\beta},\quad \frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta},\ \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta},\ \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},\ 1,$$

$$x^2+\frac{\alpha^6-\beta^6}{\alpha-\beta},\quad x^2+\frac{\alpha^5-\beta^5}{\alpha-\beta},\quad \frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta},\quad \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta},\ \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},\quad 1,\quad 0,$$

$$x^1+\frac{\alpha^5-\beta^5}{\alpha-\beta},\quad x\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta},\quad x+\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta},\ \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},\quad 1,\quad 0,\quad 0,$$

$$\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta},\quad \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta},\quad \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},\quad 1,\quad 0,\quad 0,\quad 0.$$

Retranchons la quatrième ligne multipliée par $(\alpha+\beta)$, $(\alpha^2+\beta^2)$, $(\alpha^3+\beta^3)$, respectivement de la troisième, de la seconde et de la première. Les quatre premiers éléments de ces quatre lignes deviendront :

$$x^3-\alpha^3\beta^3,\quad 0,\quad \alpha^2\beta^2,\quad \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},$$

$$(x^2-\alpha^2\beta^2)\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},\quad x^2-\alpha^2\beta^2,\quad 0,\quad \alpha\beta,$$

$$(x-\alpha\beta)\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta},\quad (x-\alpha\beta)\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},\quad x-\alpha\beta,\quad 0,$$

$$\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta},\quad \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta},\quad \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},\quad 1.$$

Faisons maintenant $x=\alpha\beta$, dans le déterminant transformé. Il deviendra

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & \alpha^2\beta^2 & \alpha\beta\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta} & \dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta} & \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta} & 1\\
0 & 0 & 0 & \alpha\beta & \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta} & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta} & \dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta} & \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta} & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & d_2 & e_2\\
0 & 0 & 0 & c_2 & d_2 & e_2 & 0\\
0 & 0 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

et est nul, comme on le voit aisément. L'équation réduite en u a donc pour racine $\alpha\beta$, et de même $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$.

NOTE. Si l'on revient à l'équation primitive du troisième degré, on a

$$a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3=0, \quad a+b\beta+c\beta^2+d\beta^3=0, \quad u=\alpha\beta,$$

et, par suite

$$a+b\frac{u}{\alpha}+c\frac{u^2}{\alpha^2}+d\frac{u^3}{\alpha^3}=0, \quad \text{ou} \quad a\alpha^3+bu\alpha^2+cu^2\alpha+du^3=0.$$

Éliminant α entre la première et la dernière de ces relations, on trouve

$$\begin{vmatrix} du^3 & cu^2 & bu^3 & a & & \\ & du^3 & cu^2 & bu & a & \\ & & du^3 & cu^2 & bu & a \\ & & a & b & c & d \\ & a & b & c & d & \\ a & b & c & d & & \end{vmatrix} = 0$$

équation du neuvième degré qui a pour racines α^2, β^2, γ^2, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, ces trois dernières étant des racines doubles. Cette équation du neuvième degré doit être le produit de l'équation de M. Farkas, par l'équation réduite (n). On peut la débarrasser aisément des racines α^2, β^2, γ^2 et alors elle est le carré de l'équation réduite (n). (P. M.)

Question 355.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 159.)

Construire une conique, connaissant trois tangentes quelconques et la tangente en l'un des sommets. (MONTESANO.)

Solution par M. MANTEL. Soient a, b, c, s les tangentes données; x une perpendiculaire quelconque menée à s; a', b', c' les symétriques de a, b, c par rapport à x. Les six droites a, b, c, a', b', c' sont toujours tangentes à une même conique; celle-ci résout le problème proposé, si elle touche en même temps s. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les diagonales principales de l'hexagone $abca'b's$ concourent en un même point. Lorsque la droite x se déplace en restant perpendiculaire à s, les diagonales $(bc, b's)$, (sa, ca') engendrent deux faisceaux homographiques et marquent sur la troisième diagonale $(ab, a'b')$, qui reste fixe, deux ponctuelles projectives. On cherchera les points doubles E, F de ces ponctuelles par l'une des méthodes connues, et les perpendiculaires

abaissées de E, F sur s sont les axes de deux coniques résolvant la question.

Remarque. Plus généralement, si l'on donne quatre tangentes a, b, c, s et un point P du diamètre passant par le point de contact de s, on considère la suite des coniques tangentes à a, b, c, ayant pour diamètres conjugués une droite quelconque x menée par P et une parallèle à s. Trois nouvelles tangentes a', b', c' de l'une de ces coniques se déterminent facilement : Si A est le point de rencontre de s avec x, M et N les symétriques par rapport à A et P des points où a est coupée par s et par une parallèle à s menée par P, a' joint les points M et N. Le problème s'achève maintenant comme celui de la question 355. (J. N.)

Question 472.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 238.)

Il existe une infinité de triangles inscrits à un même cercle et ayant même point de Lemoine. Démontrer que ces triangles sont circonscrits à une même conique dont les foyers sont les points de Brocard de ces mêmes triangles.

(J. Neuberg.)

Solution par M. Déprez. Soient O, R le centre et le rayon du cercle donné, K le point donné (à l'intérieur du cercle O). On sait que, dans tout triangle ABC,

$$OK = R\sqrt{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\,V},$$

V étant l'angle de Brocard ; cet angle ne dépend que de OK et R. On peut donc chercher les points de Brocard ω, ω' sachant que la droite $\omega\omega'$ est perpendiculaire à OK et est vue de O sous l'angle 2V. Si l'on joint un point quelconque A de la circonférence O aux points ω et ω', et que l'on construise deux cordes AB, AC, faisant respectivement avec $A\omega$ et $A\omega'$ les angles ωAB, ωAC égaux à V, ABC est un triangle de la question.

Toutes les cordes telles que AB, qui font un angle constant avec une droite ωA joignant un point fixe ω à un point variable A d'un cercle O, enveloppent une ellipse ayant pour foyer ce point ω.

Solution par M. Schoute. On peut toujours faire une projection conique, telle que le cercle donné O se transforme en un cercle O' dont le centre O' soit la projection du point donné K. Les triangles équilatéraux

inscrits à ce second cercle, ont pour point de Lemoine le centre O′ et leurs côtés enveloppent un même cercle. Ils se projettent sur le plan du cercle O suivant des triangles qui ont même point de Lemoine K et sont circonscrits à une ellipse fixe.

×Question 504(*).

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 23.)

On joint les sommets d'un triangle ABC ***à deux points quelconques*** D_1, D_2. ***Soient*** $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ***les points de rencontre des droites ainsi menées avec la circonférence circonscrite au triangle*** ABC. ***Démontrer que les droites*** A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 ***forment un triangle qui est homologique avec*** ABC. ***Généraliser ce théorème par voie de perspective et énoncer le théorème corrélatif.*** (Jerábek.)

Solution par M. Laurens. Soient α, β', γ' les points de rencontre de A_1A_2 avec BC, CA, AB. Cherchons le rapport $\frac{\alpha C}{\alpha B}$ et démontrons que le produit des trois rapports $\frac{\alpha C}{\alpha B}, \frac{\beta A}{\beta C}, \frac{\gamma B}{\gamma A}$ égale l'unité.

Le triangle ABC coupé par la transversale A_1A_2, donne

$$\frac{\alpha C}{\alpha B}\cdot\frac{\beta' A}{\beta' C}\cdot\frac{\gamma' B}{\gamma' A}=1;$$

d'où, en éliminant $\beta' C$, $\gamma' B$ au moyen des relations

$$\beta' C\cdot\beta' A=\beta' A_1\cdot\beta' A_2,\quad \gamma' B\cdot\gamma' A=\gamma' A_1\cdot\gamma' A_2,$$

$$\frac{\alpha C}{\alpha B}=\frac{\beta' A_1\cdot\beta' A_2}{\gamma' A_1\cdot\gamma' A_2}\cdot\left(\frac{\gamma' A}{\beta' A}\right)^2. \qquad (1)$$

On trouve aisément :

$$\frac{\beta' A_1}{\gamma' A_1}=\frac{(\beta', AA_1)}{(\gamma', AA_1)}(**)=\frac{A\beta'\sin CAD_1}{A\gamma'\sin BAD_1},\quad \frac{\beta' A_2}{\gamma' A_2}=\frac{A\beta'\sin CAD_2}{A\gamma'\sin BAD_2};$$

(*) Notre article sur les transformations quadratiques (voir plus haut) fait ressortir le rôle de la proposition qui fait l'objet de la question 504. (J. N.)

(**) (α', AA_1) désigne la distance de β' à la droite AA_1.

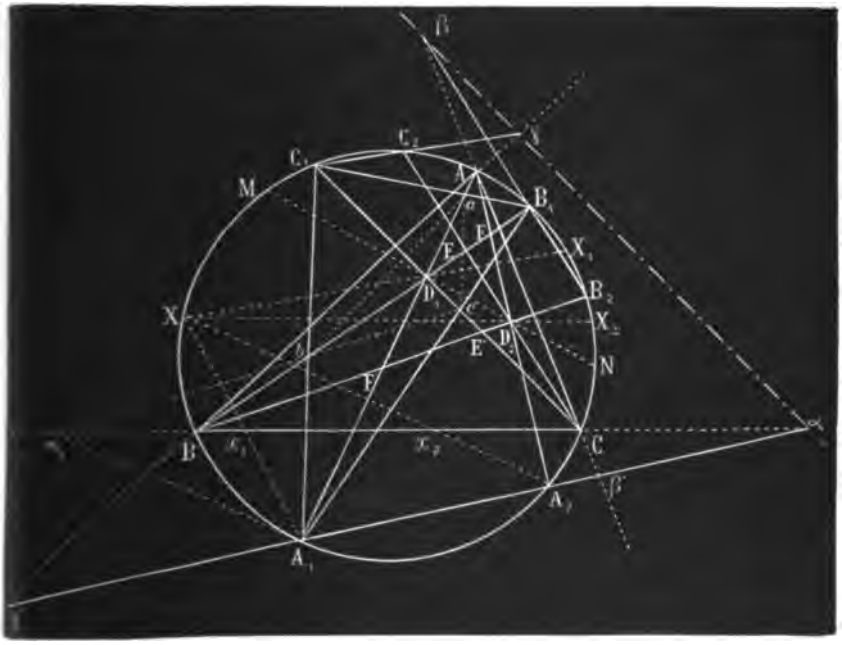
donc l'égalité (1) peut prendre la forme

$$\frac{\alpha C}{\alpha B} = \frac{\sin CAD_1}{\sin BAD_1} \cdot \frac{\sin CAD_2}{\sin BAD_2}. \qquad (2)$$

Observons maintenant que

$$\frac{\sin CAD_1}{\sin BAD_1} \cdot \frac{\sin ABD_1}{\sin CBD_1} \cdot \frac{\sin BCD_1}{\sin ACD_1} = 1, \quad \frac{\sin CAD_2}{\sin BAD_2} \cdot \frac{\sin ABD_2}{\sin CBD_2} \cdot \frac{\sin BCD_2}{\sin ACD_2} = 1 \text{ (*)}.$$

Donc le produit des rapports $(\alpha C : \alpha B)$,... égale l'unité.



Le théorème est évidemment projectif, et la circonférence ABC peut être remplacée par une conique quelconque circonscrite à ABC.

Voici le théorème corrélatif : *Les côtés d'un triangle* ABC *circonscrit à*

(*) Le produit de ces six rapports de sinus est encore égal à l'unité, lorsque les droites AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2 sont tangentes à une même conique; dans ce cas également les points α, β, γ sont en ligne droite. Comparer Steiner-Schröter, *Theorie der Kegelschnitte*, pp. 330, 331; ce passage contient aussi une démonstration de la question 504. (J. N.)

une conique sont rencontrés par deux transversales en six points tels que les nouvelles tangentes issues des deux points situés sur un même côté se coupent, respectivement, en trois points qui sont les sommets d'un triangle homologique avec ABC.

Solution analytique par M. Beyens (Cadix). Remplaçons la circonférence ABC par une conique quelconque circonscrite à ABC et ayant pour équation

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}=0.$$

Soient $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ les coordonnées des points D_1, D_2. Les coordonnées de A_1, A_2 peuvent être supposées de la forme (a_1, β_1, γ_1), (a_2, β_2, γ_2); a_1 et a_2 résultent alors des égalités

$$\frac{A}{a_1}+\frac{B}{\beta_1}+\frac{C}{\gamma_1}=0, \quad \frac{A}{a_2}+\frac{B}{\beta_2}+\frac{C}{\gamma_2}=0,$$

d'où les coordonnées de A_1, A_2 :

$$-\frac{A\beta_1\gamma_1}{B\gamma_1+C\beta_1}, \quad \beta_1, \gamma_1; \quad -\frac{A\beta_2\gamma_2}{B\gamma_2+C\beta_2}, \quad \beta_2, \gamma_2,$$

et l'équation de la droite A_1A_2 :

$$\frac{x}{A}(B\gamma_1+C\beta_1)(B\gamma_2+C\beta_2)+B\gamma_1\gamma_2 y+C\beta_1\beta_2 z=0.$$

Le point de rencontre α de BC avec A_1A_2 satisfait donc à l'égalité

$$\frac{By}{\beta_1\beta_2}+\frac{Cz}{\gamma_1\gamma_2}=0.$$

On voit aisément que les trois points α, β, γ sont sur la droite(*)

$$\frac{Ax}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{By}{\beta_1\beta_2}+\frac{Cz}{\gamma_1\gamma_2}=0.$$

Solution par M. Servais. Remplaçons la circonférence ABC par une conique quelconque. Si α, β, γ sont les points de rencontre de A_1A_2, B_1B_2,

---

(*) Cette droite et la conique dérivent l'une de l'autre au moyen de la transformation quadratique

$$\frac{xx_1}{\alpha_1\alpha_2}=\frac{yy_1}{\beta_1\beta_2}=\frac{zz_1}{\gamma_1\gamma_2},$$

dans laquelle les points D_1 et D_2 se correspondent. (J. N.)

C_1C_2 avec BC, CA, AB, effectuons une projection telle que la courbe se change en un cercle et que les points α, β se transportent à l'infini. Alors les droites A_1A_2, B_1B_2 deviennent parallèles à BC, CA, et les points D_1, D_2 sont deux points inverses par rapport au triangle ABC. La droite C_1C_2 est donc également parallèle à BC, et les trois points α, β, γ sont à l'infini. Il résulte de là que ces points, dans la figure primitive, sont en ligne droite.

Considérons un point X mobile sur la conique et désignons par X_1, X_2 les points de rencontre de la courbe avec les droites XD_1, XD_2. Les points X et X_1, X et X_2 se correspondent dans deux involutions; donc X_1 et X_2 sont des points homologues de deux séries projectives marquées sur la conique et ayant pour points doubles les points de rencontre M, N, de la droite D_1D_2 avec la courbe. Par conséquent : 1° les droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, ..., X_1X_2 enveloppent une conique touchant la conique donnée en M et N; 2° les droites A_1B_2 et A_2B_1, B_1C_2 et B_2C_1, C_1A_2 et C_2A_1, A_1X_2 et A_2X_1... se coupent sur D_1D_2.

Solution par M. Jeřábek. Imaginons deux figures homographiques F_1, F_2 ayant pour points doubles et pour droites doubles les sommets et les côtés du triangle ABC; ces figures sont complètement déterminées, si nous convenons de prendre D_1 et D_2 comme points correspondants. Soient ϖ_1, ϖ_2 deux points homologues de F_1, F_2 mobiles sur la droite double BC. Les droites $A_1\varpi_1$ et $A_2\varpi_2$ engendrent deux faisceaux projectifs; donc leur point d'intersection X se meut sur une conique passant par A_1 et A_2. Cette courbe passe aussi par les points B, C, A, qui sont les intersections des couples de rayons homologues A_1B et A_2B, A_1C et A_2C, A_1D_1A et A_2D_2A; donc elle se confond avec la circonférence ABC. Deux rayons homologues des deux faisceaux sont, évidemment, la tangente en A_1 et la ligne A_2A_1; donc celles-ci rencontrent la droite BC en deux points α_1, α, qui se correspondent dans les figures F_1 et F_2.

Si β_1 et β, γ_1 et γ ont des significations analogues à celles de α_1 et α, il suffit de démontrer que les points α_1, β_1, γ_1 sont en ligne droite; alors leurs homologues α, β, γ de la figure F_2 sont également en ligne droite. Soient a, b, c les intersections des droites A_1A, B_1B, C_1C avec les côtés du triangle $A_1B_1C_1$. Imaginons l'hexagone inscrit $A_1A_1C_1CBB_1$, dont deux sommets sont confondus en A_1; les points d'intersection des côtés opposés :

$$\alpha_1 = (A_1A_1, CB), \quad b = (A_1C_2, BB_1), \quad c = (C_1C, B_1A_1)$$

sont sur une même droite. Donc les points $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ se confondent avec les intersections des côtés correspondants des deux triangles perspectifs ABC, *abc*, et, par suite, appartiennent à une même droite.

Question 531.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 192.)

Soit a_n le plus grand diviseur impair de n; démontrer que

$$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{7}.$$ (E. Cesáro.)

Solution par M. W. Mantel. Le terme général de la série est

$$\frac{a_n}{n^2}=\frac{a_n}{(a_n\cdot 2^r)^2}=\frac{1}{8^r\cdot a_n^2}.$$

La somme de cette série ne dépendant pas de l'arrangement des termes, réunissons tous ceux pour lesquels a_n à la même valeur; leur somme est

$$\frac{1}{a_n^2}+\frac{1}{8\cdot a_n^2}+\frac{1}{8^2 a_n^2}+\cdots=\frac{8}{7a_n^2}.$$

La série proposée est ainsi remplacée par la suivante :

$$\frac{8}{7}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right).$$

On sait que

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)+\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right),$$

d'où

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8},$$

et la somme de la série proposée est égale à $\frac{\pi^2}{7}$.

×Question 591.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 240.)

Deux points matériels pesants parcourent simultanément une même verticale. L'un d'eux a été abandonné à lui-même au point O ***de cette droite; l'autre a été lancé, quelque temps après, du même point, avec une vitesse initiale connue, dirigée de haut en bas et suffisante pour que les deux mobiles se rencontrent à une distance donnée a du point*** O. ***Combien de temps s'est-il écoulé entre les départs des deux mobiles?*** (JAMET.)

Solution par MM. EMMERICH (Mülheim a/R) ***et*** G. RUSSO (Catanzaro). Désignons le temps qui s'écoule entre les départs des deux mobiles par x, et le temps entre le départ du second mobile et la rencontre des deux mobiles par t; nous aurons, en représentant par c la vitesse initiale du second mobile,

$$\tfrac{1}{2}g(t+x)^2 = a; \quad ct + \tfrac{1}{2}gt^2 = a; \tag{1}$$

d'où

$$t+x = \pm\sqrt{\frac{2a}{g}}; \quad t = -\frac{c}{g} \pm \sqrt{\frac{2a}{g} + \frac{c^2}{g^2}}.$$

Le sens strict du problème exige que $t+x$ et t soient positifs; il faut donc prendre

$$t+x = \sqrt{\frac{2a}{g}}; \quad t = -\frac{c}{g} + \sqrt{\frac{2a}{g} + \frac{c^2}{g^2}},$$

ce qui donne

$$x = \sqrt{\frac{2a}{g}} + \frac{c}{g} - \sqrt{\frac{2a}{g} + \frac{c^2}{g^2}}.$$

L'intérêt de la question consiste principalement dans l'interprétation des différentes combinaisons des racines des deux équations (1). Nous engageons donc nos jeunes lecteurs à une discussion plus approfondie du problème. (*Réd*.)

×Question 604.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 56.)

Soit ABC ***un triangle rectangle en*** A; ***on trace la hauteur*** AD, ***puis les bissectrices des angles*** DAC, DAB, ABC, ACB. ***On obtient ainsi sur*** BC ***deux points*** S, S' ***et sur*** AD ***deux points*** T, T'; ***désignons aussi par*** α, β, γ ***les centres des cercles inscrits aux triangles*** ABC, ABD, ACD. ***Cela posé:***

1° *Les points* A, α, β, γ *forment un groupe orthocentrique;* 2° *le centre du cercle* A$\beta\gamma$ *est situé sur* AD; 3° *les points* B, C, β, γ *sont concycliques;* 4° *les points* S, S', T, T' *forment un groupe orthocentrique.*

REMARQUE. *Nous proposons d'appeler groupe orthocentrique un ensemble de quatre points tels que l'un quelconque d'entre eux soit l'orthocentre du triangle formé par les trois autres.* (G. DE LONGCHAMPS.)

Solution par MM. DROZ (Porrentruy), FRANÇOIS (La Haye), EMMERICH (Mühlheim), DÉPREZ (Dinant), BROCARD (Grenoble), CONVERT. 1° Les angles DBA, DAC ayant leurs côtés perpendiculaires, leurs bissectrices Bα et Aγ sont également perpendiculaires; de même, Cγ fait un angle droit avec Aβ.

2° On a

$$\text{angle } \alpha A\gamma = \tfrac{1}{2}(BAC - DAC) = \tfrac{1}{2} BAD = \beta AD.$$

Donc, puisque Aα est une hauteur du triangle A$\beta\gamma$, la droite AD passe par le centre du cercle circonscrit.

3° Comme

$$\text{angle } \alpha\beta\gamma = \alpha A\gamma = \beta AD = BC\gamma,$$

le quadrilatère B$\beta\gamma$C est inscriptible.

4° On a vu que BT est perpendiculaire à AS, et CT' à AS'; donc T et T' sont les orthocentres des triangles ABS, ACS'. Par suite, ST et S'T' sont, respectivement perpendiculaires à AB et AC; elles sont donc perpendiculaires entre elles(*). AD étant également perpendiculaire à BC, les points S, S', T, T' forment un groupe orthocentrique.

REMARQUES. 1° Il résulte du 2° que le centre du cercle circonscrit au triangle ASS' est situé sur la droite Aα. (DROZ.)

2° Projetons S en E sur AC, S' en E' sur AB; les projetantes SE, S'E' touchent, respectivement, les cercles inscrits aux triangles ADC, ADB et se coupent sur la droite Aα (AE = AD = AF').

Les droites Aα, Eγ, bissectrices des angles CAB, SEA sont perpendiculaires; on a vu que $\beta\gamma$ est perpendiculaire à Aα; donc la ligne $\beta\gamma$ passe par E et E'.

Les droites Sβ, S'γ se coupent en un point K de la hauteur AD, centre du cercle inscrit au triangle D$\beta\beta$. En effet, les angles SDγ et S'AS étant

---

(*) Autrement: Les lignes ST et S'T' sont des droites homologues des deux triangles semblables ADB, CDA, dont les côtés correspondants sont perpendiculaires. (H. BROCARD.)

égaux à 45°, le quadrilatère $A\gamma DS'$ est inscriptible, et l'angle $A\gamma S' = ADS'$; donc $S'\gamma$ est une hauteur du triangle ASS'. $S\beta$ étant une seconde hauteur, le point K se trouve sur AD. Le triangle $D\beta\gamma$ des pieds des hauteurs du triangle ASS' a pour centre du cercle inscrit l'orthocentre K de ASS'.

Le triangle $D\beta\gamma$ est semblable à ABC; car les droites $D\beta$, $D\gamma$, lignes homologues des triangles semblables ADB et ADC sont dans le rapport AB : AC. (Brocard.)

3° Soient A', B', C' les projections de α sur BC, CA, AB, ou les points de contact des côtés de ABC avec le cercle inscrit. Les triangles $A'B'C'$, $A\beta\gamma$ ont leurs côtes égaux et parallèles; car les côtés homologues sont perpendiculaires à une même bissectrice du triangle ABC, les droites $A\alpha$, $\gamma\alpha$, $\beta\alpha$ sont perpendiculaires au milieu de $B'C'$, $B'A'$, $A'C'$, et A étant symétrique de α par rapport à $B'C'$, γ et β sont aussi les symétriques de α par rapport à $B'A'$, $A'C'$. Il résulte de là que le rayon du cercle circonscrit à $A\beta\gamma$ est égal au rayon du cercle inscrit à ABC, et que les triangles $A\beta\gamma$, $A'B'C'$ ont même cercle des neuf points; le centre de ce dernier cercle est au milieu des trois droites AA', $\beta B'$, $\gamma C'$. Comme AA' est, visiblement, une symédiane du triangle $A'B'C'$, on a la proposition suivante :

Si l'angle A' d'un triangle $A'B'C'$ vaut 45°, le centre du cercle des neuf points est au milieu de la symédiane $A'A$, A étant le pôle de la corde $B'C'$ du cercle circonscrit. (Déprez.)

×Question 607.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 80.)

Si $A + B + C = \pi$, *démontrer que l'on a*

$$S \sin^3 A = 3 \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C + \cos \tfrac{3}{2} A \cos \tfrac{3}{2} B \cos \tfrac{3}{2} C,$$
$$S \cos^3 A = 1 + 3 \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C - \sin \tfrac{3}{2} A \sin \tfrac{3}{2} B \sin \tfrac{3}{2} C;$$
$$S \sin^4 A = \tfrac{3}{2} + 2 \cos A \cos B \cos C + \tfrac{1}{2} \cos 2A \cos 2B \cos 2C,$$
$$S \cos^4 A = \tfrac{1}{2} - 2 \cos A \cos B \cos C + \tfrac{1}{2} \cos 2A \cos 2B \cos 2C.$$

(E. Gelin.)

Solution par MM. François (La Haye), Molenbroek (Amersfoort), Denys (Gand) *et* Déprez (Dinant). On sait que

$$2^{n-1} \cos^n \theta = \cos n\theta + C_{n,1} \cos(n-2)\theta + C_{n,2} \cos(n-4)\theta + \cdots + C_{n,k} \cos \theta,$$
$$(-1)^k 2^{n-1} \sin^n \theta = \sin n\theta - C_{n,1} \sin(n-2)\theta + C_{n,2} \sin(n-4)\theta - \cdots + (-1)^k C_{n,k} \sin \theta,$$

si $n = 2k + 1$, et que

$$2^{n-1}\cos^n\theta = \cos n\theta + C_{n,1}\cos(n-2)\theta + C_{n,2}\cos(n-4)\theta + \cdots + \tfrac{1}{2}C_{n,k},$$
$$(-1)^k 2^{n-1}\sin^n\theta = \cos n\theta - C_{n,1}\cos(n-2)\theta + C_{n,2}\cos(n-4)\theta - \cdots - \tfrac{1}{2}(-1)^k C_{n,k},$$

si $n = 2k$. D'autre part, on démontre aisément que

$$S\cos nA = 1 + (-1)^k \cdot 4\sin\tfrac{1}{2}nA\sin\tfrac{1}{2}nB\sin\tfrac{1}{2}nC,$$
$$S\sin nA = (-1)^k \cdot 4\cos\tfrac{1}{2}nA\cos\tfrac{1}{2}nB\cos\tfrac{1}{2}nC,$$

dans le cas de $n = 2k + 1$, et que

$$S\cos nA = 1 + (-1)^k \cdot 4\cos\tfrac{1}{2}nA\cos\tfrac{1}{2}nB\cos\tfrac{1}{2}nC,$$
$$S\sin nA = (-1)^k \cdot 4\sin\tfrac{1}{2}nA\sin\tfrac{1}{2}nB\sin\tfrac{1}{2}nC,$$

dans le cas de $n = 2k$.

Pour abréger l'écriture, posons

$$s_k = C_{n,\frac{n-k}{2}}\sin\tfrac{1}{2}kA\sin\tfrac{1}{2}kB\sin\tfrac{1}{2}kC,$$

$$c_k = C_{n,\frac{n-k}{2}}\cos\tfrac{1}{2}kA\cos\tfrac{1}{2}kB\cos\tfrac{1}{2}kC;$$

rappelons aussi que

$$2^n = 1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n}$$
$$= \begin{cases} 2(1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,k-1}) + C_{n,k}, & n = 2k, \\ 2(1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,k-1} + C_{n,k}), & n = 2k+1, \end{cases}$$

$$0 = 1 - C_{n,1} + C_{n,2} - \cdots + C_{n,n}$$
$$= 2(1 - C_{n,1} + C_{n,2} - \cdots \pm C_{n,k-1}) \mp C_{n,k}, \quad n = 2k.$$

Alors, nous pouvons déduire, des formules écrites ci-dessus, les suivantes :

$$2^{n-3}S\sin^n A = c_1 + c_3 + c_5 + \cdots + c_n,$$
$$2^{n-3}S\cos^n A = 2^{n-3} + s_1 - s_3 + s_5 - \cdots + (-1)^k s_n,$$

si $n = 2k + 1$, et

$$2^{n-3}S\sin^n A = \tfrac{1}{2}C_{n,k} + c_2 + c_4 + c_6 + \cdots + c_n,$$
$$2^{n-3}S\cos^n A = \tfrac{1}{2}C_{n,k} - 2^{n-3} - c_2 + c_4 - c_6 + \cdots + (-1)^k c_n,$$

si $n = 2k$. Celles-ci, pour $n = 3$, $n = 4$, se réduisent aux égalités proposées.

Les formules générales nous avaient été également signalées par M. E. Gelin.

MM. François, Déprez et Falisse ont aussi démontré directement celles de la question au moyen des relations

$$\sin^3 A = \tfrac{1}{4}(3\sin A - \sin 3A), \quad \cos^3 A = \tfrac{1}{4}(3\cos A + \cos 3A),$$
$$\cos 4A = 8\sin^4 A + 4\cos 2A + 2, \quad \cos 4A = 8\cos^4 A - 4\cos 2A - 3.$$

×Question 612.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 104).

Quels que soient les entiers a, b, c, l'équation indéterminée

$$xy + ax + by = c$$

admet au moins deux systèmes de solutions entières. (H. Brocard.)

Solution par MM. Beyens, Bruyr et Emmerich. Écrivant l'équation sous la forme

$$(x+a)(y+b) = c - ab,$$

on aperçoit les solutions

$$\begin{cases} y+b = \pm(c-ab); \\ x+a = \pm 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+a = \pm(c-ab), \\ y+b = \pm 1. \end{cases}$$

Lorsque $c - ab$ est décomposable en deux facteurs α, β, on peut également poser

$$\begin{cases} x+a = \pm\alpha \\ y+b = \pm\beta; \end{cases} \quad \begin{cases} x+a = \pm\beta, \\ y+b = \pm\alpha. \end{cases}$$

Note. Posons $N = c - ab$, $X = x + a$, $Y = y + b$. Si N est premier, on a évidemment quatre solutions

$$(X = \pm 1,\ Y = \pm N), \quad (X = \pm N,\ Y = \pm 1).$$

Si N est composé, le nombre des solutions est égal au double du nombre des diviseurs de N, sauf si N est un carré.

L'équation

$$xyz + ayz + bzx + cxy + bcx + cay + abz = d$$

peut s'écrire $XYZ = N$, si $x + a = X$, $y + b = Y$, $z + c = Z$, et a toujours au moins 12 solutions, sauf si $N = d - abc = \pm 1$. Si N est composé, il y a toujours plus de 12 solutions. (A. Laisant.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

375. D'un point fixe A de l'axe radical d'un faisceau de cercles, on mène deux tangentes AB, AC à l'un quelconque de ces cercles. Trouver le lieu du milieu de la corde BC.

Ce lieu est l'inverse de la ligne des centres par rapport au cercle orthogonal décrit de A comme centre.

376. Une droite est donnée par ses projections $(ab, a'b')$. 1° Trouver la perpendiculaire commune à cette droite et à la ligne de terre; 2° tracer les projections de la sphère décrite sur cette perpendiculaire commune comme diamètre et les intersections de cette sphère avec les plans de projection; 3° représenter le cube circonscrit à cette sphère dont l'une des faces passe par la droite $(ab, a'b')$ et dont l'une des arêtes est parallèle à cette droite. (ECOLE NAVALE, 2 juin 1888, de 2 h. à 3 h. 1/2.)

377. Calculer les valeurs de x comprises entre 0 et 360° qui satisfont à l'équation

$$\sin^3(2x + 13°) = \frac{0{,}0643217 \times \cos 212°10'22''}{\operatorname{tg}^4 321°21'19''}$$

(ECOLE NAVALE, 2 juin 1888, de 4 h. à 5 h. 1/2).

378. Les axes étant rectangulaires, on considère la conique définie par l'équation

$$[(x - a)^2 + y^2 - \rho^2](1 + m^2) - (y - mx)^2 = 0, \qquad (1)$$

dans laquelle m est un paramètre variable. Montrer 1° que cette courbe a un double contact avec la circonférence

$$(x - a)^2 + y^2 - \rho^2 = 0; \qquad (2)$$

2° que cette conique est une parabole; équation de l'axe, démontrer que l'axe passe par un point fixe. — Lieu géométrique des points de contact des tangentes menées par l'origine à toutes les courbes (1).

3° Aux points P, Q où chacune des paraboles (1) coupe l'axe des x, on mène des normales : lieu géométrique du point de rencontre R de ces normales. (ÉCOLE NAVALE, 4 juin 1888, de 7 h. à 10 1/2 h)

2° L'équation (1) se réduit à

$$f(x, y) \equiv (x + my)^2 - (1 + m^2)(2ax - a^2 + \rho^2) = 0.$$

L'axe a pour équation

$$f'_x + \frac{2A}{B} f'_y = 0, \quad \text{ou} \quad x + my - a = 0;$$

il passe par le centre du cercle (2), ce qui s'explique par le 1°. — La polaire du point (x', y') est représentée par

$$(x + my)(x' + my') - (1 + m^2)(ax - a^2 + \rho^2) = 0;$$

celle de l'origine l'est donc par l'équation $ax - a^2 + \rho^2 = 0$, indépendante de m. Cette droite coïncide avec la polaire de O par rapport au cercle (2). Ce résultat s'explique par la corde de double contact des courbes (1) et (2) passant par O

3° Les abscisses de P, Q vérifient l'équation

$$x^2 - (1 + m^2)(2ax - a^2 + \rho^2) = 0. \tag{3}$$

La normale en l'un de ces points a pour équation

$$Y = \frac{mx}{x - a(1 + m^2)}(X - x). \tag{4}$$

Considérons (X, Y) comme étant les coordonnées de R; les équations (3) et (4) devront donner les deux mêmes valeurs de x, leurs coefficients sont donc proportionnels ... R décrit une parabole. (J. N.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

273 (*Mathesis*, III, p. 192) Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin a & \sin(a+\delta) & \sin(a+2\delta) & \dots & \sin(a+n\delta-\delta) \\ \sin(a+n\delta-\delta) & \sin a & \sin(a+\delta) & \dots & \sin(a+n\delta-2\delta) \\ \sin(a+n\delta-2\delta) & \sin(a+n\delta-\delta) & \sin a & \dots & \sin(a+n\delta-3\delta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(a+\delta) & \sin(a+2\delta) & \sin(a+3\delta) & \dots & \sin a \end{vmatrix}$$

a pour valeur

$$\sin^n \frac{n\delta}{2} \frac{\sin k \sin\left(k - \frac{\pi}{n}\right) \sin\left(k - \frac{2\pi}{n}\right) \cdots \sin\left(k - \frac{n-1}{n}\pi\right)}{\sin\frac{\delta}{2} \sin\left(\frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\delta}{2} + \frac{2\pi}{n}\right) \cdots \sin\left(\delta + \frac{n-1}{n}\pi\right)},$$

k désignant l'arc

$$a + \frac{n-1}{2}\delta. \qquad \text{(J. Neuberg.)}$$

×**621** (*Mathesis*, t. III, p. 216). Décomposer $\frac{1}{6}(3n^4 - 4n^3 + n)$ en une somme algébrique de $n(n-1)$ carrés. (DE ROCQUIGNY.)

622. Au moyen de la formule d'Euler

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{16}\cdots = \frac{\sin x}{x},$$

vérifier la relation suivante, due à Cauchy (*Anciens exercices*, t. IV, 1829) :

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \frac{1}{6}\operatorname{tg}\frac{x}{6} + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{x}{8}\cdots$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \cot x\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{x} - \cot\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{5}{x} - \cot\frac{x}{5}\right)\cdots$$

×**623.** Un triangle ABC tourne autour d'un point fixe X de son plan. Soient A', B', C' les intersections des côtés homologues de deux positions quelconques du triangle. Démontrer que le quadrilatère XA'B'C' est toujours semblable à lui-même, et trouver comment il faut choisir le point X par rapport à ABC, pour qu'il soit le centre du cercle circonscrit ou inscrit à A'B'C', ou l'orthocentre, ou le centre de gravité de A'B'C'.

×**624.** Lorsqu'un quadrilatère ABCD, inscrit dans un cercle, tourne autour du centre O de ce cercle, les intersections de ses côtés avec leurs homologues dans une nouvelle position du polygone sont les sommets d'un parallélogramme(*). (E. BEYENS.)

×**625.** Soient données les deux progressions arithmétiques

$$1,\quad 1+2^m,\quad 1+2.2^m,\quad 1+3.2^m,\quad \ldots$$
$$1,\quad 1+2^{m+1},\quad 1+2.2^{m+1},\quad 1+3.2^{m+1},\quad \ldots$$

On partage les termes de la seconde en groupes de termes consécutifs, tels que le nombre de termes du p^e groupe soit égal au p^e terme de la première progression; soit S_p la somme des termes de ce groupe. Démontrer que S_p est un cube parfait.

Si l'on intervertit les rôles des deux groupes, la somme S'_p des termes du p^e groupe de la première progression, est la somme de deux cubes. (DE ROCQUIGNY.)

(*) C'est cette proposition, signalée par M. Beyens dans l'*Ed. Times*, qui nous a suggéré la question 623 (J. N)

DE LA MESURE DE LA SIMPLICITÉ DANS LES CONSTRUCTIONS MATHÉMATIQUES;

par M. E. Lemoine, ancien élève de l'École polytechnique.

I. Principes.

J'ai traité cette année, au congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences tenu à Oran, un sujet plus général que celui annoncé par le titre de cette note et qui était : *la mesure de la simplicité dans les sciences mathématiques;* je montrais qu'après avoir mis toutes les propositions d'une science déterminée, sous une forme syllogistique, il était possible d'apprécier la simplicité d'une proposition en comptant le nombre d'éléments syllogistiques nécessaires pour arriver à sa démonstration, ce nombre mesurant sa simplicité; mais si la chose est possible, elle est assez délicate à mettre en pratique en l'appliquant à l'exposé didactique de toute une branche de la science, la géométrie élémentaire, par exemple, et je n'ai pas encore eu le loisir de compléter mon étude de cette façon. Au contraire, le principe de ce qui se rapporte à la mesure de la simplicité d'une construction peut s'exposer en quelques lignes, on peut en faire l'application générale en quelques pages; aussi je crois intéresser les lecteurs de ce journal en leur communiquant ce qui suit.

Nous supposerons que les instruments employés sont la règle, le compas et l'équerre; les tracés étant exécutés indifféremment à la plume, au crayon, au tire-ligne.

Les opérations *élémentaires* que l'on peut faire avec une règle, se réduisent à deux : 1° Faire passer le bord de la règle par *un* point marqué (opération R_1); 2° tracer une ligne le long du bord de cette règle (opération R_2). Ainsi, tracer une ligne par deux points marqués exigera une opération $(2R_1 + R_2)$.

Les opérations *élémentaires* que l'on peut faire avec le compas se réduisent à trois : 1° Mettre une pointe du compas en un point marqué (opération C_1); 2° mettre une pointe du compas en un point arbitraire d'une ligne donnée (opération C_2); 3° tracer la circonférence (opération C_3).

Avec l'équerre on peut faire d'abord ce que nous faisons avec la règle

et nous conservons les mêmes noms R_1, R_2 à ces opérations communes, qu'elles soient faites avec la règle ou avec l'équerre; on peut enfin faire deux autres opérations : 1° Faire coïncider un des côtés de l'équerre avec le bord d'une règle ou d'une autre équerre en les appliquant l'une sur l'autre, ou réciproquement, placer le bord d'une règle ou d'une équerre en contact avec le côté d'une équerre (opération E_1); 2° Faire glisser l'équerre le long du côté sur lequel elle s'appuie jusqu'à ce que le bord d'un de ses côtés passe par un point marqué (opération E_2).

Cela posé, une construction géométrique quelconque se résumera par un *résultat* de la forme

$$(n_1R_1 + n_2R_2 + n_3C_1 + n_4C_2 + n_5C_3 + n_6E_1 + n_7E_2),$$

où n_1, n_2, n_3 etc. sont les nombres d'opérations élémentaires R_1, R_2, etc. qui ont été effectuées.

Admettons maintenant que chaque opération *élémentaire* ait une *simplicité* égale à l'unité(*), nous voyons que le coefficient de simplicité, ou, plus brièvement, que la *simplicité* de l'opération considérée est $n_1 + n_2 + \cdots + n_7$.

La simplicité d'une construction est donc le nombre total d'opérations élémentaires nécessaires à son exécution.

II. Exemples.

Je supposerai d'abord que nous nous servons seulement de la règle et du compas. Dans tout ce qui suit, on suppose chaque construction effectuée isolément, c'est-à-dire on suppose que l'on opère sur une feuille de papier ne contenant aucune construction déjà effectuée et pouvant servir pour celle que l'on a en vue.

I. *Prendre avec le compas une longueur donnée* AB. Je mets une pointe en A (op. C_1), l'autre en B (op. C_1). Résultat ($2C_1$); simplicité, 2.

(*) Il est certain qu'en admettant que toutes les opérations sont équivalentes entre elles, nous faisons une hypothèse qui peut être contestée; mais, quoique l'on puisse, à la rigueur, donner à chacune d'elles un coefficient expérimental, nous ne croyons pas la chose utile. Si l'on observe que nous négligeons forcément bien d'autres éléments, comme l'échelle à laquelle nous opérons, la longueur réellement tracée de chaque ligne (par exemple, nous comptons (C_3) pour un arc de cercle quelque petit que soit l'arc ou pour le cercle tracé entièrement et quel que soit son rayon, etc.), on voit clairement que notre hypothèse est justifiée pour le genre d'exactitude dont la question est susceptible.

II. *Porter la longueur comprise entre les pointes du compas sur une droite tracée : 1° à partir d'un point arbitraire de cette droite; 2° à partir d'un point* C *de cette droite.*

Dans le premier cas, le résultat est $(C_2 + C_3)$; dans le second $(C_1 + C_3)$; la simplicité est 2.

III. *Porter une longueur donnée* AB *sur une droite donnée.* C'est la succession des constructions I et II. Le résultat est donc $(2C_1 + C_2 + C_3)$ ou $(3C_1 + C_3)$, la simplicité, 4.

IV. *Tracer une droite passant par* 2 *points donnés* A *et* B(*). Résultat $(2R_1 + R_2)$, simplicité, 3.

V. *Par un point* B *donné sur une droite* BC *mener une seconde droite qui fasse avec la première un angle égal à un angle donné* DAE. Je mets la pointe du compas en A (op. C_1) ; je décris de A comme centre une circonférence quelconque (op. C_3), qui coupe en D et en E les côtés de l'angle donné. Je mets la pointe en B (op. C_1), je décris avec le rayon arbitraire employé précédemment l'arc GF (op. C_3) qui coupe en F la droite BC; je prends avec le compas la longueur DE (op. $2C_1$) ; je mets une pointe en F (op. C_1), je décris de F comme centre avec DE pour rayon un arc de cercle (op. C_3) qui coupe en H l'arc GF; je trace la droite BH (op. $2R_1 + R_2$). Résultat $(2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3)$; simplicité, 11.

VI. *Par un point* A *pris hors d'une droite* BC *mener une parallèle à cette droite.* La construction exige exactement les mêmes opérations que la construction V. Résultat $(2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3)$; simplicité, 11.

VII. *Mener une perpendiculaire à une droite donnée en son milieu; ou, trouver le milieu d'une droite donnée.* Résultat : $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$, simplicité 7.

VIII. *Décrire un cercle sur une droite donnée comme diamètre.* Résultat $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3)$; simplicité, 10.

IX. *Mener par un point* C *pris sur une droite* AB *ou hors d'une*

(*) Je fais ici une remarque analogue à celle que j'ai déjà faite pour justifier l'équivalence que je suppose aux opérations élémentaires; car il est évident que dans la construction I mettre la seconde pointe en B lorsque la première est déjà en A, n'est pas tout à fait la même chose que de mettre la première en A; de même, faire passer le bord de la règle par 2 points donnés dans la construction IV, n'est pas exactement la même chose que de faire passer 2 fois le bord de la règle par un point.

droite une perpendiculaire sur cette droite. Je mets une pointe en C (op. C_1), je trace de C comme centre une circonférence quelconque (op. C_3) qui coupe AB en A et en B; de A comme centre, avec un rayon quelconque, je trace une circonférence (op. $C_1 + C_3$), je fais de même en B (op. $C_1 + C_3$); ces deux circonférences se coupent en D, je trace CD (op. $2R_1 + R_2$). Résultat ($2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3$); simplicité, 9.

X. *Élever une perpendiculaire à l'extrémité* A *d'une droite* AB *qu'on ne peut prolonger.* Je place une pointe du compas en un point arbitraire O et l'autre pointe en A (op. C_1); de O comme centre je décris la circonférence OA (op. C_3) qui coupe AB en A et en B, je joins BO (op. $2R_1 + R_2$) qui coupe la circonférence en C; je joins AC (op. $2R_1 + R_2$). Résultat ($4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_3$); simplicité, 8.

Remarque. Cette construction semble donc un peu plus simple, dans tous les cas, que celle qui est donnée comme devant être appliquée dans le cas général.

XI. *Décrire une circonférence passant par trois points donnés* A, B, C. Résultat ($4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3$); simplicité, 15.

XII. *Diviser un angle en* 2 *parties égales.* Résultat ($2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3$); simplicité, 9.

XIII. *Diviser un arc de cercle donné en deux parties égales.* Résultat ($2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3$); simplicité, 7(*).

XIV. *Mener par un point donné* A *pris sur une circonférence de centre* O, *une tangente à cette circonférence.* Je joins OA (op. $2R_1 + R_2$), et je suis ramené à la construction IX ou X; je prends X. Résultat ($6R_1 + 3R_2 + C_1 + C_3$); simplicité, 11.

XV. *Mener d'un point extérieur les deux tangentes à un cercle donné.* Résultat ($6R_1 + 3R_2 + 4C_1 + 3C_3$); simplicité, 16.

(*) Afin de ne pas allonger inutilement l'exposé d'une chose aussi simple, je n'ai pas indiqué les constructions que j'applique, mais ce sont les problèmes fondamentaux classiques de tracé et les procédés adoptés ne varient guère; j'ai suivi ceux qui sont exposés dans le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Combrousse.

Pour les autres constructions, j'ai toujours pris le tracé que notre méthode nous montrait être le plus simple. C'est, en définitive, la construction la plus simple possible pour établir un résultat que j'appelle la simplicité de ce résultat, car on peut évidemment obtenir un même résultat par diverses constructions inégalement simples : beaucoup de chemins mènent à Rome.

XVI. *Inscrire un cercle dans un triangle donné* ABC. Résultat ($6R_1 + 3R_2 + 11C_1 + 10C_3$); simplicité, 30.

Remarque. L'exécution répétée dans une épure d'une construction, suscite le plus souvent des simplifications importantes qu'il ne faut pas négliger; si l'on veut, par exemple, tracer les 4 cercles tangents aux 3 côtés d'un triangle, la simplicité de l'opération, si elle est conduite convenablement sera bien inférieure à 4.30 ou 120. En effet, de A, B, C comme centres, avec le même rayon quelconque, je trace 3 circonférences : (op. $3C_1 + 3C_3$); au moyen de ces circonférences je trace les bissectrices des 3 angles extérieurs au triangle (op. $6C_1 + 6C_2 + 6R_1 + 3R_2$), qui se coupent aux centres O_a, O_b, O_c des cercles ex-inscrits; je joins AO_a, BO_b qui se coupent en O centre du cercle inscrit: (op. $4R_1 + 2R_2$); de O j'abaisse une perpendiculaire $O\alpha$ sur BC, je prends la longueur $O\alpha$ et, de O comme centre, avec $O\alpha$ comme rayon, je décris un cercle (op. $2R_1 + R_2 + 5C_1 + 4C_3$); je répète trois fois la même opération en O_a, O_b, O_c (op. $6R_1 + 3R_2 + 15C_1 + 12C_3$). Résultat total ($29C_1 + 25C_3 + 18R_1 + 9R_2$); simplicité, 81.

XVII. *Décrire sur une droite donnée un segment capable d'un angle donné.* Résultat ($6R_1 + 3R_2 + 10C_1 + 7C_3$); simplicité, 26.

XVIII. *Diviser une droite donnée en moyenne et extrême raison.* Résultat ($8R_1 + 4R_2 + 8C_1 + 5C_3$); simplicité, 25.

Si quelques-unes des constructions se trouvent déjà effectuées sur l'épure ou si certaines données sont en place utilisable, il faut évidemment en tenir compte. Ainsi :

XIX. *Construire un triangle connaissant les* 3 *côtés,* donne pour résultat ($4R_1 + 3R_2 + 8C_1 + C_2 + 3C_3$), simplicité, 19. Mais si nous construisons le triangle sur un des côtés déjà en place il y aura de moins : 1° ($2C_1$), pour prendre avec le compas la longueur de ce côté; 2° R_2 pour le tracé d'une droite; 3° ($C_2 + C_3$) pour placer la longueur de ce côté sur la droite; donc on a pour résultat ($4R_1 + 2R_2 + 6C_1 + 2C_3$), pour simplicité, 14.

XX. *Trouver le centre d'une circonférence passant par* 3 *points.* Résultat ($3C_1 + 3C_3 + 4R_1 + 2R_2$); simplicité, 12.

XXI. *Décrire une circonférence passant par* 3 *points.* Résultat ($5C_1 + 4C_2 + 4R_1 + 2R_2$); simplicité, 15.

XXII. *Tracer la polaire d'un point par rapport à une circonférence.* Résultat $(6R_1 + 3R_2 + 4C_1 + 2C_3)$; simplicité, 15.

XXIII. *Trouver le pôle d'une droite par rapport à une circonférence.* Résultat $(6R_1 + 3R_2 + 7C_1 + 6C_3)$; simplicité, 22.

(*A continuer.*)

BIBLIOGRAPHIE.

A Treatise on plane Trigonometry, containing an Account of Hyperbolic Functions, with Numerous Examples. By John Casey, LL. D., F. R. S., Professor of the Higher Mathematics and Mathematical Physics in the Catholic University of Ireland. Dublin, Hodges, Figgis and C°; London, Longmans, Green and C°, 1888. Un volume in-8° de XVI-276 pages avec 66 figures dans le texte.

Ainsi qu'il le dit dans la Préface, M. Casey s'est proposé de composer un Traité de Trigonométrie qui soit en harmonie avec les récents manuels les plus avancés sur les autres branches des mathématiques : démonstrations rigoureuses et complètes, ordre méthodique, développement clair et suffisant des connaissances faisant habituellement partie des traités de trigonométrie, indication des questions les plus intéressantes que l'on rencontre dans les journaux périodiques.

L'auteur a-t-il réalisé ce programme idéal? Les ouvrages des maîtres français (Serret, Briot et Bouquet, etc.) se distinguent par la recherche de la rigueur scientifique; les manuels anglais se recommandent par la richesse des matières traitées ou proposées en exercices, et par un texte concis qui introduit rapidement le lecteur dans les régions élevées de la science, en glissant quelque peu sur les difficultés des éléments. Le savant professeur de Dublin, parfaitement au courant de la littérature mathématique de l'Angleterre et de la France, a cherché à réunir, dans une juste mesure, les qualités qu'on rencontre chez les auteurs renommés de l'un ou l'autre pays. Il a pleinement réussi dans cette œuvre difficile, sauf en quelques parties délicates où, quoique en progrès sur les géomètres anglais, il a encore préféré la concision à l'extrême rigueur. Mais il lui sera facile, dans une prochaine édition, de donner satisfaction, même aux *puristes*, en ce qui concerne les n°s 77, 80, 84, 89, 105, 158, 159, 161, 163, 165, 176-180, 224-228.

La partie qui se rapporte au programme des établissements belges et français, du degré moyen, est admirablement développée.

Le plan adopté se rapproche sensiblement de celui de l'ouvrage de Serret, sauf que la théorie exponentielle des logarithmes, conformément aux usages anglais, précède le chapitre des tables trigonométriques. Aucun détail de quelque importance n'est omis; on trouve aussi bien les notions indispensables pour connaître le but proprement dit de la trigonométrie, que les ressources fournies par cette science aux autres branches des Mathématiques et aux recherches d'un ordre pure-

ment spéculatif. A l'appui de ce que nous avançons, nous signalons spécialement les sections suivantes : formules entre les lignes inverses(*), éliminations trigonométriques, identités trigonométriques, appropriation des formules au calcul logarithmique, équations trigonométriques, aire du triangle, rayons des cercles associés au triangle, résolution des triangles avec des données diverses, quadrilatères, problème de Malfatti. Comme nous l'avons déjà dit (*Mathesis*, t. VIII, p. 114), ce traité de M. Casey constitue un répertoire très complet de trigonométrie : on y retrouve, soit dans le texte, soit dans les exercices, toutes les questions intéressantes, publiées depuis un demi-siècle dans les journaux mathématiques. Dans les trente dernières années, l'enseignement de la trigonométrie plane a fait, en France, des progrès considérables ; on en peut juger par les problèmes posés aux examens publics (St-Cyr, baccalauréat, école polytechnique, etc.), problèmes que certains journaux (par exemple le J. M. E. de M. de Longchamps) et même des recueils spéciaux (publiés par les librairies Nony ou Croville-Morant) reproduisent régulièrement; M. Casey a eu la bonne idée de faire un bon choix parmi ces problèmes pour ses exercices. En même temps, il a proposé un très grand nombre de questions originales.

L'avant-dernier chapitre de l'ouvrage que nous analysons ici, a pour objet les conséquences de la formule de Moivre, les séries trigonométriques, les développements des fonctions circulaires en produits infinis, les équations binômes, les nombres de Bernoulli, des théorèmes de Viète, Côtes et Moivre. Le dernier chapitre renferme une bonne théorie des fonctions hyperboliques, dont les éléments sont surtout empruntés au Traité spécial de M. Laisant et au Précis publié par M. Mansion dans *Mathesis*, t. VI. La trigonométrie supérieure est aussi complète qu'on peut le désirer; les formules moins importantes sont proposées comme exercices. (J. N.)

Éléments de Trigonométrie plane et sphérique, à l'usage des élèves des cours professionnels, des candidats aux Écoles spéciales des Universités et à l'École militaire de Bruxelles, par l'abbé Gelin, docteur en philosophie et en théologie, professeur de Mathématiques supérieures au Collège Saint-Quirin à Huy Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique. Namur, Wesmael-Charlier; Huy, chez l'auteur, 1888. — Un volume in 8° de 252 pages. Prix : 5 francs.

Précis de Trigonométrie rectiligne, à l'usage des élèves des classes d'humanités et des candidats au diplôme de géomètre-arpenteur, par l'abbé Gelin. Ibid., 1888. Un vol. in-8° de 66 pages. Prix : 1 fr. 50.

Les Éléments de Trigonométrie de M. Gelin sont divisés en quatre Livres, qui sont intitulés : théorie des lignes trigonométriques, trigonométrie rectiligne, trigonométrie sphérique, compléments de trigonométrie.

(*) Nous aurions désiré que M. Casey contribuât, par son autorité, à faire abandonner la notation ambiguë $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, employée en Angleterre pour désigner $\arcsin x$, $\arccos x$.

Dans le Livre premier, l'auteur expose avec beaucoup de soin les formules trigonométriques, la construction et l'usage des tables. Les points présentant quelque difficulté aux commençants sont complètement élucidés, tels que : variations des lignes trigonométriques, arcs qui répondent à une ligne donnée, généralisation des relations entre les lignes d'un même arc et celle des formules d'addition, multiplicité des valeurs de $\sin \frac{1}{2} a$, $\sin \frac{1}{3} a$, ..., proportion logarithmique, sinus et tangentes des arcs très-petits. Tous les progrès introduits depuis un quart de siècle dans l'enseignement de la trigonométrie se retrouvent dans ce traité : développements de $\sin (a+b+c+\cdots)$, $\cos (a+b+c+\cdots)$, $\operatorname{tg} (a+b+c+\cdots)$, $\sin ma$, $\cos ma$, $\operatorname{tg} ma$; appropriation des formules au calcul logarithmique, vérification des identités trigonométriques, résolution des équations trigonométriques. On rencontre ici, pour la première fois peut-être, les valeurs, à dénominateurs rationalisés, des sécantes, des cosécantes, des tangentes et des cotangentes de tous les arcs multiples de 3° (voir *Mathesis*, supplément de la livraison de juin 1888).

Le Livre deuxième comprend, outre la résolution des triangles dans les cas où les données ne sont prises que parmi les côtés et les angles, des relations trigonométriques (dont plusieurs sont nouvelles) entre les trois angles d'un triangle quelconque, les formules relatives à l'aire du triangle et aux rayons des cercles associés au triangle; douze exemples de résolution de triangles avec des données variées; un grand nombre de relations entre les éléments d'un quadrilatère; l'application de la trigonométrie à la mesure des hauteurs et des distances; des indications sur les opérations géodésiques (triangulations).

En trigonométrie sphérique, l'auteur établit, d'abord, les relations entre les côtés et les angles des triangles obliquangles et en déduit, ensuite, les formules entre les éléments des triangles rectangles. La résolution des triangles est suivie des formules relatives à l'excès sphérique et aux rayons des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits, et de quelques questions choisies (distance de deux points à la surface terrestre, notion du sinus de l'angle solide, etc.).

Le Livre quatrième, outre diverses additions à la Trigonométrie élémentaire, contient l'exposition succincte de quelques théories de la Trigonométrie supérieure. Voici les sujets traités : 1° Méthode des projections. 2° Sommation des sinus et des cosinus d'arcs en progression par différence. 3° Questions de maximum et de minimum. 4° Valeurs limites de certaines fonctions trigonométriques. 5° Forme trigonométrique des imaginaires. 6° et 7° Formules générales relatives à l'addition et à la multiplication des arcs. 8° Sin *ma* et cos *ma* en fonction de sin *a* ou de cos *a*. 9° Sin *ma* et cos *ma* en fonction des sinus ou des cosinus des multiples de *a*. 10° Division des arcs. 11° Equations binômes. 12° Théorèmes de Moivre et de Côtes. 13° Des polygones réguliers en général. 14° Du polygone régulier de 17 côtés. 15° Résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré. 16° Comment, des formules de la trigonométrie sphérique, on peut déduire celles de la trigonométrie rectiligne. 17° Questions diverses de trigonométrie. Plusieurs de ces questions ont paru en supplément dans la livraison de juillet 1888 de *Mathesis*. On voit, par cette énumération, que M. Gelin n'a négligé aucune des questions qui peuvent être considérées comme faisant partie d'une instruction

solide en trigonométrie. Nous avons remarqué particulièrement dans les compléments : une démonstration générale, par la méthode des projections(*), des formules $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$ et de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique; la démonstration du théorème sur le maximum de la somme $\sin x + \sin y + \sin z \ldots$ dans le cas ou $x + y + z + \cdots$ constant, par une méthode imitée de celle que M. Goursat(**) a donnée du théorème d'Algèbre correspondant; une méthode de résolution, propre à l'auteur, de l'équation $x^3 + px + q = 0$, dans le cas des racines imaginaires, au moyen de la substitution $x = \lambda(\operatorname{tg}\alpha \pm \cot\alpha)$; le calcul du produit $\sin 1^\circ \sin 2^\circ \sin 3^\circ \ldots \sin 90^\circ$ d'après M. Laisant; enfin, la détermination de l'angle de Brocard.

Nous avons tenu à montrer, par une analyse détaillée, que les Éléments de Trigonométrie de M. Gelin sont aussi complets qu'on peut le désirer pour nos cours professionnels, et qu'ils satisfont à toutes les exigences, tant sous le rapport de la science que sous celui de la méthode. En ajoutant que le style est parfaitement approprié aux classes, nous ne pouvons que nous rallier au jugement porté sur cet ouvrage, au nom de l'Académie royale de Belgique, par l'un de nos géomètres les plus autorisés, M. Catalan.

« D'après lui, à part quelques légères incorrections de langage et quelques petites omissions, l'auteur de ce traité ne mérite que des éloges. Il sait beaucoup, expose simplement, écrit bien. On ne trouverait pas en Belgique un traité comparable au sien. — Plusieurs chapitres paraissent nouveaux. — La construction et l'usage des tables trigonométriques ne laissent rien à désirer. Il en est de même du chapitre relatif aux formules rendues calculables par logarithmes. — Les applications numériques sont nombreuses et bien choisies. En un mot, la trigonométrie sphérique aussi bien que la trigonométrie rectiligne sont traitées d'une façon à la fois claire et complète.... Le nouveau traité est appelé à rendre des services signalés à nos établissements d'enseignement moyen. » (B. B. (3), XV, pp. 107-108, mai 1888).

Le *Précis de Trigonométrie* de M. l'abbé Gelin étant la reproduction presque intégrale des deux premiers Livres des *Éléments de Trigonométrie*, le compte-rendu de ce dernier ouvrage nous dispense de faire l'éloge et l'analyse du Précis. Qu'il nous suffise de dire que, grâce au choix judicieux des matières traitées, il convient parfaitement aux élèves des classes d'humanités et, en général, à ceux qui désirent apprendre la trigonométrie pour elle-même, sans pousser leurs études plus loin.

(J. N.)

(*) Cette démonstration se simplifie encore, si dans la formule $p = a\cos\alpha$ (§ 190) on considère le segment projeté a comme soumis à la règle des signes, α étant l'angle des directions *positives* des segments a et p. Pour la méthode des projections, voir *Mathesis*, t. IV, p. 222 et t. VII, p. 272.

(**) N. A. M., 1887, (3) VI, p. 437; *Mathesis*, t. VIII, p. 11.

NOTES MATHÉMATIQUES.

13. ***École polytechnique de Paris; composition de mathématiques,*** juin 1888 (Voir *Mathesis*, p. 163)(*). La belle solution de cette question, publiée par notre savant collègue et ami, M. de Longchamps, dans le numéro de juillet du *J. M. S.*, p. 160, nous a averti d'une lacune qui existe dans la nôtre : La méthode que nous avons employée dans la quatrième partie fait trouver, non seulement le lieu du point P, mais aussi celui du point M. Ce fait s'explique géométriquement; mais on peut le voir aussi par l'équation rapportée vers la fin de la page 163. Cette égalité donne deux valeurs rationnelles pour y, savoir :

$$y = \frac{4b(x-a)}{3x-4a}, \quad y = \frac{bx}{3x-a};$$

la première convient au point M, la seconde au point P. Le lieu de P est donc une hyperbole ayant pour asymptotes des parallèles à OX, OY menées par le centre de gravité du triangle OAB.

RECTIFICATIONS. Page 163, équation (9), lire $4gk$ au lieu de $4k$; ligne 21, lire *droite* (5) au lieu de *droite* B. (J. N.).

*14. ***Sur un théorème de MM. Laisant et Beaujeux.*** Le théorème 57 des questions d'arithmologie (Voir *Mathesis*, p. 192) a été énoncé, avec des notations différentes, par MM. Laisant et Beaujeux dans un article intéressant, intitulé ***Quelques conséquences des théorèmes de Fermat et de Wilson*** (N. C. M., t. V, p. 156).

En voici une démonstration imitée de celle que Serret donne du cas particulier de $a = b$ (Algèbre supérieure, t. II, p. 34).

Soit $p = a + b + 1$ un nombre premier. D'après le théorème de Wilson,

$$1.2.3\ldots a \times (a+1)(a+2)\cdots(a+b)+1 = \mathscr{M} p. \qquad (1)$$

Or

$$(a+1)(a+2)\cdots(a+b) = (p-b)(p-b-1)\cdots(p-1)$$
$$= \mathscr{M} p + (-1)^b\, 1.2.3\ldots b. \qquad (2)$$

(*) La lacune nous a été signalée également par M. S. B. de Reims et par M. Lemoine.

Des égalités (1) et (2), on déduit aisément

$$1.2.3...a \times 1.2.3...b + (-1)^a = \mathscr{M} p.$$

Corollaires I. On démontre, de la même manière, que

$$(a+1)(a+2)...(a+b) \times (b+1)(b+2)...(b+a) + (-1)^a = \mathscr{M} p.$$

II. Si p est un nombre premier de la forme $4q+1$, on peut faire $a = b = 2q$, de sorte que

$$(1.2.3...2q)^2 + 1 = \mathscr{M} p,$$

$$[(2q+1)(2q+2)...4q]^2 + 1 = \mathscr{M} p.$$

III. Si p est un nombre premier de la forme $4q+3$,

$$[1.2.3...(2q+1)]^2 - 1 = \mathscr{M} p,$$

$$[(2q+2)(2q+3)\cdots(4q+2)]^2 - 1 = \mathscr{M} p. \qquad \text{(J. N.)}$$

×15. *Moment d'inertie du triangle.* Le moment d'inertie d'un triangle, par rapport à une parallèle à sa base b, menée par le sommet opposé, est égal, par définition, à la limite (pour $n = \infty$) de la somme de tous les produits de la forme $\beta\gamma x^2$, où β désigne une parallèle à la base, x sa distance au sommet, $\beta\gamma$ la surface d'un rectangle construit sur la base β et ayant pour hauteur γ, qui est la $n^{ième}$ partie de la hauteur h. Considérons la pyramide qui a, pour une de ses faces latérales, le triangle donné, et pour base perpendiculaire à cette face, le rectangle de base b et de hauteur h; βx sera la surface de la section de cette pyramide à une distance x du sommet, $\beta\gamma x$ un parallèlipipède de base βx, de hauteur γ; $\beta\gamma x^2$ son moment statique par rapport à un plan mené par le sommet parallèlement à la base de la pyramide. La limite de la somme de tous les $\beta\gamma x^2$ est égale, d'après la théorie des centres de gravité, au produit du volume de la pyramide par la distance du centre de gravité au plan dont on vient de parler, c'est-à-dire à $\frac{1}{4} bh^2$.

Le moment d'inertie I par rapport à la base est égal à la limite de la somme de toutes les expressions de la forme $\beta\gamma (h-x)^2 = \beta\gamma h^2 - 2h \cdot \beta\gamma x + \beta\gamma x^2$. La limite de la somme de tous les $\beta\gamma h^2$ est égale à h^2 multiplié par l'aire $\frac{1}{2} bh$ du triangle; celle de tous les $\beta\gamma x$ est le volume

$\frac{1}{3}bh^2$ de la pyramide dont on vient de parler; enfin la somme de tous les $\beta\gamma x^2$ est $\frac{1}{4}bh^2$, comme on l'a vu. On a donc

$$I = \frac{1}{2}bh^3 - \frac{2}{3}bh^3 + \frac{1}{4}bh^3 = \frac{1}{12}bh^3,$$

ce qui est le point de départ de M. Cesáro, dans l'article publié plus haut p. 183-186(*).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, EN 1888;

Solution de la question d'algèbre,

par M. V. JAMET, professeur au Lycée de Nantes(**).

Un polynôme $f(x)$ du degré n vérifie l'identité

$$nf(x) = (x - a)f'(x) + bf''(x)$$

1° *Chercher les coefficients de $f(x)$, ordonné suivant les puissances de $x - a$.* 2° *Chercher les conditions de réalité des racines.* 3° *Prouver que si b_0 est la valeur absolue de b, les racines de $f(x)$ sont comprises entre*

$$a - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}b_0 \quad \text{et} \quad a + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}b_0.$$

1° Soit $x - a = z$ et $f(x) = \varphi(z)$. Soit aussi

$$\varphi(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_0. \qquad (1)$$

Si, dans l'égalité

$$n\varphi(z) = z\varphi'(z) + b\varphi''(z), \qquad (2)$$

on remplace $\varphi(z)$ par le second membre de (1), les deux membres de l'égalité (2) deviennent des polynômes entiers, de degré n, et pour qu'ils

---

(*) On peut aussi trouver, sans calcul intégral proprement dit, le moment d'inertie de la pyramide et en déduire celui de la sphère et de l'ellipsoïde. (P. M.)

(**) L'auteur nous a envoyé, en juillet, en même temps que cette solution, une note sur l'intégrale générale de l'équation $ny = xy' + by''$, dont nous espérons publier plus tard un extrait. (P. M.)

soient identiques, il faut que, pour toute valeur de μ inférieure à $n-1$, on ait

$$na_\mu = \mu a_\mu + (\mu+2)(\mu+1)ba_{\mu+2}, \tag{3}$$

ou

$$a_\mu = \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{n-\mu} ba_{\mu+2}, \tag{4}$$

et pour $\mu = n-1$, $na_{n-1} = (n-1)a_{n-1}$, et, par conséquent : $a_{n-1} = 0$.

De cette remarque et de l'égalité (3), on tire $a_{n-3} = a_{n-5} = a_{n-7} = \ldots = 0$.

On déduit aussi, de l'égalité (4),

$$a_{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} ba_n,$$

$$a_{n-4} = \frac{(n-2)(n-3)}{4} ba_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} b^2 a_n,$$

$$a_{n-6} = \frac{(n-4)(n-5)}{6} ba_{n-4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.4.6} b^3 a_n;$$

. . . . . .

Donc

$$(5)\quad \varphi(z) = a_n\left[z^n + \frac{n(n-1)}{2} bz^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} b^2 z^{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.4.6} b^3 z^{n-6} + \ldots\right]$$

2° D'après cette dernière égalité, il est ***nécessaire*** que b soit négatif, ou nul, pour que toutes les racines de l'équation $\varphi(z) = 0$ soient réelles; car, si b est positif et z réel, $\varphi(z)$ est (au facteur z près, si n est impair), une somme de quantités toutes positives. Cette condition est ***suffisante***. Si $b = 0$, toutes les racines sont nulles. Si b est négatif, de l'égalité

$$n\varphi(z) = z\varphi'(z) + b\varphi''(z)$$

nous déduirons successivement :

$$\begin{aligned}
&(n-1)\,\varphi'(z) = z\varphi''(z) + b\varphi'''(z),\\
&(n-2)\,\varphi''(z) = z\varphi'''(z) + b\varphi^{IV}(z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(n-p)\,\varphi^{(p)}(z) = z\varphi^{(p+1)}(z) + b\varphi^{(p+2)}(z), \qquad (6)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&2\varphi^{(n-2)}(z) = z\varphi^{(n-1)}(z) + b\varphi^{(n)}(z).
\end{aligned}$$

Donc, en vertu de la formule démontrée à la fin du n° précédent :

$$\varphi^{(n-2)}(z) = a_2(z^2 + b), \tag{7}$$

résultat que l'on obtient aussi en différentiant $n-2$ fois les deux membres de la formule, et l'on a, de plus, la condition

$$a_2 = 3.4.5.6 \ldots n.a_n.$$

L'égalité (7) montre que la condition $b < 0$ suffit pour que toutes les racines de l'équation $\varphi^{(n-2)}(z) = 0$ soient réelles. Je dis que si l'on a $b < 0$, et si toutes les racines de l'équation $\varphi^{(p+1)}(z) = 0$ sont réelles, toutes les racines de l'équation $\varphi^{(p)}z = 0$ sont réelles aussi. En effet, soient α_1, α_2, α_3 ... α_{n-p-1}, les racines de l'équation $\varphi^{(p+1)}(z) = 0$, écrites par ordre de grandeur croissante. Au dessous de α_1, il n'y a aucune racine de l'équation $\varphi^{(p+2)}(z) = 0$; car, en vertu du théorème de Rolle, il y a une racine de cette dernière équation, entre α_1 et α_2; une autre entre α_2 et α_3; etc. Donc, si $n-p$ est un nombre pair, et si, dans l'égalité (6) on remplace z, successivement, par,

$$-\infty, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots \quad \alpha_{n-p-1}, \quad +\infty$$

$\varphi^{(p)}(z)$ prendra les signes suivants :

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad \cdots \quad - \quad +$$

Si, au contraire, $n-p$ est impair, $\varphi^{(p)}(z)$ prendra les signes :

$$- \quad + \quad - \quad + \quad \cdots \quad - \quad +.$$

Dans les deux cas, l'équation considérée aura toutes ses racines réelles.

Il en résulte que les équations

$$\varphi^{(n-3)}(z) = 0, \quad \varphi^{(n-4)}(z) = 0, \quad \varphi^{(n-5)}(z) = 0, \quad \ldots \quad \varphi'(z) = 0$$

auront toutes leurs racines réelles, et le même raisonnement pouvant être répété sur l'égalité qui définit $\varphi(z)$, il s'ensuit que $\varphi(z) = 0$ a toutes ses racines réelles(*).

(*) Comme l'a observé M. Brisse, dans la livraison de juillet 1888 des N. A. M., on peut encore s'appuyer sur ce que la suite des fonctions de Sturm de l'équation $\varphi(z) = 0$, se compose, à des facteurs positifs près, des polynômes $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\varphi''(z) \cdots \varphi^n(z)$, dont les premiers coefficients sont tous de même signe; d'où aisément le théorème. La démonstration un peu plus longue de M. Jamet suppose moins de connaissances préliminaires (P. M.).

3° Si $b = -b_0$, et si l'on fait $a_n = 1$, ce qui est toujours possible, on aura

$$\varphi(z) = z^{n-2}\left(z^2 - \frac{n(n-1)}{2}b_0\right)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4}b_0^2 z^{n-6}\left(z^2 - \frac{(n-4)(n-5)}{6}b_0\right) + \cdots$$

Mais on aura aussi

$$\frac{n(n-1)}{2}b_0 > \frac{(n-4)(n-5)}{6}b_0 > \frac{(n-6)(n-7)}{8}b_0 \ldots.$$

Si donc on remplace z par une expression dont la valeur numérique soit supérieure à $\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}b_0}$, tous les binômes écrits entre parenthèses seront positifs; et le polynôme $\varphi(z)$ aura toujours le signe de z^{n-2}. On en conclut que toute racine positive de l'équation $\varphi(z) = 0$ est inférieure à $+\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}b_0}$ et que toute racine négative est supérieure à $-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}b_0}$, ce qui achève de démontrer le théorème.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 396.(*)

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 248.)

Étant donnée une tangente T *à une conique* C, *on mène par les points où* T *rencontre une conique variable* C', *homofocale à* C, *deux nouvelles tangentes à* C. *Trouver le lieu du point de rencontre de ces droites.* (J. N.)

Solution par M. Déprez. Désignons par M le point de contact de T; par N et P les points de rencontre de T avec la conique variable C'; par Q le point de concours des secondes tangentes menées par N et P à C; enfin, par S le point d'intersection des tangentes menées par N et P à C'.

D'après des théorèmes connus : 1° Si F et F' sont les foyers de C et C',

(*) Une solution analytique directe présenterait un grand intérêt. (J. N.)

la droite NS, bissectrice (intérieure ou extérieure) de l'angle FNF' est également bissectrice de l'angle QNP; de même SP est bissectrice de l'angle NPQ. 2° La perpendiculaire abaissée de S sur sa polaire NP par rapport à C', et cette polaire divisent FF' harmoniquement; donc S est sur la normale menée en M à C.

Il résulte de là que S est le centre d'un cercle touchant C en M et que NQ, PQ sont des tangentes communes à ce cercle et à la conique C.

La question proposée est ainsi ramenée au problème classique traité dans ***Mathesis***, t. I, p. 53.

×Question 498.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 280).

Le moment d'inertie d'un quadrilatère, par rapport au point de rencontre des droites qui joignent les milieux des côtés opposés, est égal à la 48e partie de l'aire, multipliée par la somme des carrés des côtés et des diagonales.

(E. Cesáro.)

Solution par V. Jamet. En effet, soient M, N, P, Q les milieux des côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère. Le point de rencontre O des deux droites MP, NQ, diagonales du parallélogramme MNPQ, est le milieu de chacune d'elles; c'est aussi le milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère. Cela posé, soit R le milieu de la diagonale AC. Posons

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = b,$$
$$OM = \alpha, \quad ON = \beta, \quad OR = \gamma, \quad AC = \delta, \quad BD = \delta';$$
$$\text{surf. ABC} = S, \quad \text{surf. CDA} = S, \quad \text{et} \quad S_1 + S_2 = S.$$

D'un théorème démontré dans la N. C. M, t. V, pp. 27 et 22(*); il résulte que la somme des moments d'inertie du triangle ABC, par rapport à deux axes rectangulaires issus du point O, c'est-à-dire le moment d'inertie du triangle ABC par rapport à ce point, est égal à

$$\frac{S_1(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{3},$$

(*) Le moment d'inertie de l'aire d'un triangle, par rapport à un axe situé dans son plan, est égal au produit de l'aire de ce triangle, par la moyenne arithmétique des carrés des distances des milieux des côtés à cet axe. On peut démontrer ce théorème d'une manière élémentaire (Voir p. 227-228).

et puisque OM = OP, ON = OQ, le moment d'inertie du triangle CDA par rapport au même point, est égal à

$$\frac{S_2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{3}.$$

Donc le moment d'inertie du quadrilatère, par rapport au point O, est égal à

$$\frac{S(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{3}.$$

D'ailleurs,

$$16\gamma^2 = a^2+b^2+c^2+d^2-\delta^2-\delta'^2 \text{ (*)}$$

$$4(\alpha^2+\beta^2) = 2(\overline{MN}^2+\overline{NP}^2) = \frac{\delta^2+\delta'^2}{2}.$$

D'où l'on conclut

$$16(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = a^2+b^2+c^2+d^2+\delta^2+\delta'^2.$$

Donc, le moment d'inertie du quadrilatère est égal à

$$\frac{S(a^2+b^2+c^2+d^2+\delta^2+\delta'^2)}{48},$$

ce qui démontre le théorème.

Question 563.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 76.)

En un point P ***d'un hyperboloïde à une nappe on mène les deux génératrices rectilignes, puis par chacune de celles-ci un plan perpendiculaire au plan tangent en*** P. ***Ces plans touchent l'hyperboloïde en deux points*** Q ***et*** R; ***trouver l'équation du plan passant par*** Q, R ***et le centre de l'hyperboloïde.***

(Ed. Lucas.)

Une bonne solution de cette question nous a été adressée par M. Couturiaux. Comme elle est un peu longue, nous reproduisons celle de l'auteur de la question.

La droite QR et la normale PP′ à l'hyperboloïde sont des droites conjuguées, car la première est la corde des contacts des plans tangents menés par l'autre. Le plan OQR est donc le plan polaire du point à

(*) La somme des carrés des côtés d'un quadrilatère est égale à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la distance des milieux des diagonales.

l'infini sur PP', ou le plan diamétral des cordes parallèles à PP'. L'équation de la normale au point P (x', y', z') étant

$$\frac{x-x'}{\frac{x'}{a^2}}=\frac{y-y'}{\frac{y'}{b^2}}=\frac{z-z'}{-\frac{z'}{c^2}},$$

ce plan OQR est représenté par l'équation

$$\frac{xx'}{a^4}+\frac{yy'}{b^4}+\frac{zz'}{c^4}=0.$$

Question 603.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 28 et p. 164.)

On considère les paraboles qui ont même corde normale NN' (N et N' étant des points fixes). *Démontrer :* 1° *que l'axe enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements;* 2° *que la directrice enveloppe une parabole.* (Jeřábek.)

Solution géométrique par MM. Brocard, Cl. Servais, Verniory et Déprez. Soient m le point de concours des tangentes menées en N et N' à l'une des paraboles, A le milieu de NN'; mA est un diamètre de la courbe, et la tangente conjuguée est la parallèle B'B, menée à NN' par le milieu B de mA.

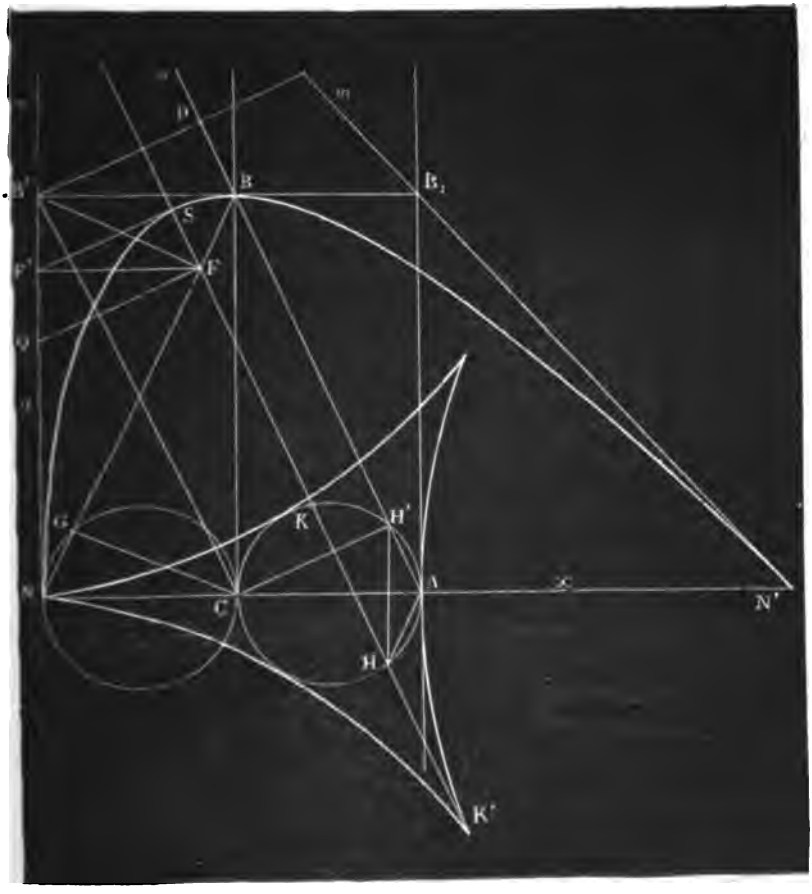
Le point de concours B' des tangentes rectangulaires menées en N et B appartient à la directrice; celle-ci est donc la perpendiculaire B'D abaissée de B' sur mA. Or, si C est le milieu de NA, CB' est parallèle à AB. Donc l'enveloppe de la directrice B'D est la parabole qui a C pour foyer et Nm pour tangente au sommet.

Le foyer F est la projection du point B' de la directrice sur sa polaire NB. Soit G la projection de C sur NB : on a, visiblement, NF = BG, et G décrit la circonférence qui a pour diamètre NC. Donc F décrit une cissoïde ayant son point de rebroussement en N et son asymptote dirigée suivant CB.

La parallèle menée par B' à BN rencontre NN' en un point fixe D; donc l'enveloppe de B'F est une parabole (*).

(*) Le symétrique de B' par rapport à F est la projection du pied C de la directrice de cette parabole sur une tangente B'F; donc ce point engendre une strophoïde. (Cl. Servais.)

Construisons le parallélogramme FBAH : FH et l'axe de la parabole NBN'. Le point H décrit la circonférence qui a pour diamètre AC. Soit H' le symétrique de H par rapport à AC ; les angles AHH', H'HF étant égaux, la droite HF se meut de manière à déterminer sur la circonférence AHC deux arcs AK, AH qui sont doubles l'un de l'autre. L'enve-



loppe de HF est donc une hypocycloïde(*); son point de contact est le symétrique de K par rapport à H (*Mathesis*, t. VIII, p. 5).

(*) Donc le symétrique du rayon vecteur d'une cissoïde par rapport à l'ordonnée enveloppe une hypocycloïde. (VERNIORY.)

REMARQUE. On peut rapprocher la question 603 d'un autre problème depuis longtemps classique : ***Trouver l'enveloppe des axes des paraboles ayant avec une conique donnée un contact du second ordre en un point donné*** A.

Ces paraboles ont, en A, même centre de courbure N que la conique donnée. Le lieu de leurs foyers est donc la circonférence qui a pour diamètre la distance de A au milieu C du rayon de courbure (***Mathesis***, t. V, p. 179), et leurs directrices passent par un point fixe, symétrique de C par rapport à A (*) (*ibid.*). Si H est le foyer de l'une des paraboles, l'axe HK et le rayon vecteur HA sont également inclinés sur la normale AN. (BROCARD.)

Solution analytique par M. BROCARD. Prenons pour axes NN' et une perpendiculaire en N, et soit $NN' = d$. L'équation générale d'une des paraboles étant

$$(by + x)^2 - dx = 0, \tag{1}$$

celle de son axe est

$$by + x = \frac{d}{2(1 + b^2)}, \tag{2}$$

ou

$$x \cos\omega + y \sin\omega = \frac{d}{2}\cos^3\omega.$$

Par suite, la podaire de l'origine par rapport à l'enveloppe de cet axe a pour équation

$$\rho = \frac{d}{2}\cos^3\omega.$$

Cette enveloppe est donc une hypocycloïde ayant un rebroussement en N.

Des équations (1) et (2), on déduit les coordonnées du sommet S, et ensuite l'équation de la tangente en S sous la forme

$$y = bx + \frac{d}{4b(1 + b^2)}. \tag{3}$$

Le point de rencontre F' de cette droite avec la tangente Ny est la projection du foyer F sur SF'; donc NF' est l'ordonnée de F. Les coordonnées de F sont, d'après cela,

$$\beta = \frac{d}{4b(1 + b^2)}, \quad \alpha = \frac{d}{4(1 + b^2)}. \tag{4}$$

(*) De là la proposition mentionnée à la fin de la lettre de M. de Longchamps. (J. N.)

Les coordonnées de S et F conduisent aisément à celles du pied de la directrice, et ensuite à l'équation de cette droite;

$$y = bx + \frac{d}{4b};$$

d'où l'équation de l'enveloppe de la directrice

$$y^2 - dx = 0.$$

Celle du lieu du foyer résulte des égalités (4); on trouve

$$\beta^2 = \frac{\alpha^3}{\frac{1}{4}d - \alpha},$$

équation d'une cissoïde.

Les équations du lieu du sommet S, du lieu du pied de la directrice, de l'enveloppe de la tangente au sommet se déduisent aisément des calculs précédents.

M. Déprez a donné une solution analytique analogue. Il trouve pour le lieu du centre de courbure en N' (origine des coordonnées en N') :

$$2d(x^2 + y^2) = x^2 y.$$

Considérant la série des paraboles touchant une droite fixe Ny au point donné N, et passant par un second point fixe N', il obtient pour l'enveloppe de la directrice une parabole, pour le lieu du foyer une cissoïdale.

Autre solution analytique par M. Pisani.

×Question 608.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, pp. 80 et 104.)

Si un quadrilatère ABCD ***est à la fois inscriptible dans un cercle de rayon*** R ***et circonscriptible à un cercle de rayon*** r, ***la somme des distances du centre du premier cercle aux quatre côtés est égale à***

$$\frac{mn}{2r} = r + \sqrt{r^2 + 4R^2},$$

m et n désignant les diagonales AC, BD. (J. Déprez.)

Soient O le centre du cercle ABCD, M, N, P, Q les milieux des côtés $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les distances OM, ON, OP, OQ. Les quadrilatères inscriptibles OMBN, ONCP,... donnent

$$a\beta + b\alpha = Rm, \quad b\gamma + c\beta = Rn,$$
$$c\delta + d\gamma = Rm, \quad d\alpha + a\delta = Rn,$$

d'où, en additionnant,

$$2R(m+n) = (a+c)(\beta+\delta) + (b+d)(\alpha+\gamma).$$

Or

$$S = (a+c)r = (b+d)r; \qquad (1)$$

par suite,

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \frac{2Rr(m+n)}{S}. \qquad (2)$$

On a également

$$4SR = 4ABC.R + 4ADC.R = (ab+cd)m,$$
$$4SR = (ad+bc)n; \qquad (3)$$

d'où

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n} = \frac{(a+c)(b+d)}{4SR},$$

et, à cause de (1),

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n} = \frac{S}{4Rr^2}, \quad m+n = \frac{Smn}{4Rr^2}. \qquad (4)$$

De (2) et (4), on déduit

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \frac{mn}{2r}.$$

Multipliant, membre à membre, les relations (3), on trouve

$$16S^2R^2 = mn[ac(b^2+d^2)+bd(a^2+c^2)]$$
$$= mn[ac(b+d)^2+bd(a+c)^2-4abcd]. \qquad (5)$$

En ayant égard aux égalités (1) et à celles-ci :

$$ab+cd = mn, \quad S^2 = abcd(*),$$

(*) Corollaire de la *formule de Dostor* et *Bretschneider* (N. A. M, (1), VII, 69, (2) XIII, 563, et N. C. M., VI; 52).

$$16S^2 = 4m^2n^2 - (a^2+c^2-b^2-d^2)^2,$$

qu'on peut déduire de l'expression de l'aire du triangle

$$4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2,$$

appliquée au triangle MNQ qui est égal à $\frac{1}{4}$ MNPQ $= \frac{1}{4}$ S. Si le quadrilatère est à la fois circonscriptible et inscriptible, on a

$$a^2+c^2+2ac = b^2+d^2+2bd, \quad mn = ac+bd. \qquad \text{(J. N.)}$$

on déduit de (5) :

$$m^2n^2 - 4r^2mn - 16R^2r^2 = 0,$$

$$mn = 2r(r + \sqrt{r^2 + 4R^2});$$

puis

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = r + \sqrt{r^2 + 4R^2}. \qquad \text{(Déprez.)}$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

379. Démontrer que, si v et v' sont les volumes engendrés par un segment circulaire AMB tournant successivement autour de deux diamètres D, D', l'expression

$$v^2 + v'^2 - 2vv' \cos(D, D')$$

est indépendante de la position du segment, mais non de sa grandeur. (Barbarin.)

380. Une droite AB, de longueur donnée l, se meut entre deux droites fixes CX, CY. Démontrer que le centre du cercle circonscrit au triangle CAB et l'orthocentre décrivent des circonférences.

381. On porte sur les côtés BA, CA d'un triangle ABC, dans les deux sens, les longueurs BE = BF = CE' = CF' = BC. Démontrer que les droites EE', FF', EF', E'F sont parallèles aux droites qui joignent les pieds des bissectrices extérieures ou ceux des deux bissectrices intérieures.

Corollaire. Ces droites sont perpendiculaires à celles qui joignent le centre du cercle circonscrit à ABC au centre de l'un des cercles tangents aux trois côtés. (J. N.)

382. Soient A', B', C' les points de rencontre des bissectrices intérieures d'un triangle ABC avec la circonférence circonscrite O et soient A'', B'', C'' les points de contact des côtés avec la circonférence inscrite I. Démontrer que les centres de gravité G', G'' des triangles A'B'C', A''B''C'' sont situés sur la ligne IO, et que

$$IG' = 2G'O, \quad IG'' : IG' = r : 2R.$$

O et I étant le centre du cercle circonscrit à A'B'C' et l'orthocentre, G' est sur IO. O et G', I et G'' sont des points homologues des triangles homothétiques A'B'C', A''B''C''; donc les droites OG', IG'' sont parallèles et dans le rapport des lignes homologues OA', IA''. (J. N.).

383. On mène par le foyer F d'une ellipse une corde quelconque MN. La normale en M et la tangente en N se coupent en un point R. Le lieu de ce point a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{(2a^2-b^2)^2}=1. \qquad \text{(Milne.)}$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**626.** Soit $\alpha+\beta+\gamma+\delta=(2n+1)\pi$. Démontrer l'égalité des expressions suivantes :

$(\sin\alpha\sin\beta+\sin\gamma\sin\delta)(\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin\delta)(\sin\alpha\sin\delta+\sin\beta\sin\gamma,)$
$(\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma\cos\delta)(\cos\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\delta)(\cos\alpha\cos\delta+\cos\beta\cos\gamma),$
$\frac{1}{4}(-\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta)(\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta)(\cdots)(\cdots),$
$\frac{1}{4}(-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta)(\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta)(\cdots)(\cdots),$
$\frac{1}{16}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma+\sin 2\delta)^2,$
$\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2(\alpha+\gamma)\sin^2(\alpha+\delta).$

(Wolstenholme.)

×**627.** Construire un tétraèdre équifacial SABC, connaissant la droite sur laquelle est l'arête SA, le plan mené par SA parallèlement à BC; un point de BC; un triangle LMN semblable à ABC. (E. Lemoine.)

Les arêtes opposées d'un tétraèdre équifacial sont égales.

628. On donne une circonférence Δ, un point fixe O et un axe fixe OX. Soit M un point quelconque de Δ. 1° Soit N un point tel que

$$\textit{angle}\ \mathrm{NOX}=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{MOX},\quad \mathrm{OX}=\sqrt{a.\mathrm{OM}},$$

a étant une constante; démontrer que N décrit un ovale de Cassini. 2° Le lieu d'un point P tel que

$$\textit{angle}\ \mathrm{POX}=2\mathrm{MOX},\quad \mathrm{OP}=\frac{\overline{\mathrm{OM}}^2}{a},$$

est un ovale de Descartes. (Laisant.)

×**629.** Étant donnés deux points A, B et une droite AX, trouver sur celle-ci un point C, tel que le produit des projections des droites CA, CB sur la bissectrice de l'angle ACB soit égal à un carré donné k^2.

(Barbarin.)

DE LA MESURE DE LA SIMPLICITÉ DANS LES CONSTRUCTIONS MATHÉMATIQUES :

par M. E. Lemoine, ancien élève de l'École polytechnique.

(*Suite ;* voir *Mathesis*, t. VIII, p. 217.)

III. Application à la construction des circonférences tangentes à trois circonférences données.

Nous allons appliquer notre procédé de mesure de la simplicité à chercher la simplicité de la construction du problème suivant : *Construire les circonférences tangentes à trois circonférences données.*

Méthode de Bobillier et Gergonne. Soient A, B, C les centres des trois circonférences; j'appellerai les circonférences du nom de leur centre et j'examinerai le cas général où les trois circonférences étant extérieures l'une à l'autre, il y a 8 solutions.

Je joins AB, BC et par B et C je mène des parallèles à une droite quelconque tracée d'abord par A : $(9R_1 + 5R_2 + 10C_1 + 6C_2)$.

Ces trois parallèles coupent respectivement les circonférences par le centre desquelles elles passent en (a, a'), (b, b'), (c, c'). — Aa, Bb, Cc étant de même sens.

En joignant ab et ba', je détermine les centres de similitude externe et interne γ et γ' de A et de B; en joignant bc et bc', je détermine les centres de similitude externe et interne α et α' de B et de C. Je trace $\alpha\gamma$, axe de similitude externe que j'appelle T ; je trace $\alpha\gamma'$, $\alpha'\gamma'$, $\gamma\alpha'$ que j'appelle T_a, T_b, T_c; ce sont les trois autres axes de similitude. J'ai ainsi tracé 8 droites : $(16R_1 + 8R_2)$.

Je cherche maintenant le centre radical ω des trois cercles au moyen de deux cercles quelconques qui les coupent tous les trois : $(16R_1 + 8R_2 + 2C_2)$.

Je cherche le pôle de T par rapport à chacune des 3 circonférences; soient T^A, T^B, T^C ces pôles, puis T_a^A, T_a^B, T_a^C; T_b^A, T_b^B, T_b^C; T_c^A, T_c^B, T_c^C, les pôles des trois autres axes de similitude par rapport aux mêmes circonférences, c'est-à-dire que je répète 12 fois la construction du pôle d'une droite, ce qui fait : $(72R_1 + 36R_2 + 84C_1 + 72C_2)$.

Je mène ωT^A, ωT^B, ωT^C qui coupent les circonférences A, B, C respec-

tivement en a_{T_A}, a'_{T_A}; b_{T_B}, b'_{T_B}; c_{T_C}, c'_{T_C}, et je trace les circonférences $a_{T_A}b_{T_B}c_{T_C}$, $a'_{T_A}b'_{T_B}c'_{T_C}$, ce qui fait $(14R_1 + 7R_2 + 10C_1 + 8C_2)$ et trois fois, autant ou $(42R_1 + 21R_2 + 30C_1 + 24C_2)$ pour tracer les 3 autres couples de circonférences.

Le résultat final est donc : $(169R_1 + 85R_2 + 134C_1 + 112C_2)$ et la simplicité : 500.

On prend ici sur le fait la véritable difficulté des constructions graphiques; chaque opération élémentaire comportant une cause d'erreur, il y a 500 causes d'erreur dans la construction considérée; encore, j'ai pris les constructions auxiliaires les plus simples, et j'ai supposé qu'il n'y avait aucun incident graphique, comme des droites se coupant hors de l'épure ou sous des angles trop aigus, etc. etc. !

Si l'on ne cherchait qu'un seul des 8 cercles, le nombre qui exprime la simplicité ne serait pas $\frac{500}{8}$ parce que certaines des lignes tracées servent pour plusieurs solutions, on trouverait pour le résultat $(57R_1 + 29R_2 + 36C_1 + 30C_2)$, et pour la simplicité, 152.

Méthode de Viète. Cherchons maintenant la simplicité de la solution en employant la construction la plus ancienne qui consiste, comme on sait, à ramener le problème à construire les cercles tangents à deux cercles donnés et passant par un point, puis celui-ci à construire un cercle passant par deux points et tangent à un cercle etc.

Soient A, B, C les centres des trois cercles ayant respectivement pour rayons R_a, R_b, R_c, avec l'hypothèse $R_a > R_b > R_c$.

Je joins AB qui coupe la circonférence A en a et a', la circonférence B en b et b'; a et b étant les points les plus éloignés, a' et b' les plus rapprochés : $(2R_1 + R_2)$.

Je prends avec le compas la longueur du rayon de C : $(C_1 + C_2)$.

Je le reporte sur AB de part et d'autre de b' en β et β_1, β étant entre b' et B, puis de part et d'autre de a', en α et α_1, α étant entre a' et A : $(2C_1 + 2C_2)$.

Je trace quatre circonférences; deux ayant pour centre A et pour rayons $A\alpha$ et $A\alpha_1$, c'est-à-dire $R_a - R_c$ et $R_a + R_c$, je les appelle les circonférences ρ_a et ρ'_a; deux ayant pour centre B et pour rayons $B\beta$ et $B\beta_1$, c'est-à-dire $R_b - R_c$ et $R_b + R_c$, je les appelle les circonférences ρ_b et ρ'_b : $(6C_1 + 4C_2)$.

Jusqu'ici j'ai fait en tout :

$$(2R_1 + R_2 + 9C_1 + C_2 + 6C_3). \qquad (1)$$

Je vais maintenant chercher les centres des 4 circonférences tangentes à ρ_a à ρ_b et passant par C; par A je mène une droite quelconque : $(R_1 + R_2)$; elle coupe la circonférence ρ_a en deux points ρ_{1a}, ρ_{2a}; par B je mène une parallèle à cette droite : $(2R_1 + R_1 + \rho C_1 + 3C_3)$, qui coupe la circonférence ρ_b en 2 points ρ_{1b}, ρ_{2b}. Aρ_{1a} et Bρ_{1b} sont de même sens; je mène $\rho_{1a}\rho_{1b}$ et $\rho_{1a}\rho_{2b}$: $(4R_1 + 2R_2)$. Ces droites coupent AB en ω et ω'. Je joins Cω', Cω : $(4R_1 + 2R_2)$. Je joins Cβ : $(2R_1 + R_2)$ je fais en α l'angle BαM$_1$ = βCω, M$_1$ étant sur ωC : $(2R_1 + R_2 + \rho C_1 + 3C_3)$; je fais en α l'angle BαM$_2$ = βCω', M$_2$ étant sur ω'C : $(2R_1 + R_2 + \rho C_1 + 3C_3)$.

J'ai maintenant à déterminer les centres des quatre circonférences; deux passant par M$_1$ et C, et touchant ρ_a ou ρ_b, les deux autres passant par M$_2$, C et touchant ρ_a ou ρ_b.

Au milieu de CM, je mène une perpendiculaire sur cette droite : $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$; je trace un cercle quelconque ayant pour centre un point indéterminé de cette droite : $(C_2 + C_3)$; ce cercle coupe le cercle ρ_b suivant une droite : $(2R_1 + R_2)$; celle-ci coupe M$_1$C en K$_1$.

Au milieu de CM$_2$ je mène une perpendiculaire sur cette droite : $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$; je trace un cercle quelconque ayant pour centre un point indéterminé de cette droite : $(C_2 + C_3)$. Ce cercle coupe le cercle ρ_b suivant une droite que je trace : $(2R_1 + R_2)$, et qui coupe M$_2$C en K$_2$, je joins K$_1$B, K$_2$B : $(4R_1 + 2R_2)$.

La circonférence décrite sur K$_1$B comme diamètre : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3)$ coupe la circonférence ρ_b en j_1, j'_1; et la circonférence décrite sur K$_2$B comme diamètre coupe ρ_b en j_2, j'_2 : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3)$.

Je cherche maintenant les centres O$_1$, O'$_1$, O$_2$, O'$_2$ des quatre circonférences CM$_1j_1$, CM$_1j'_1$, CM$_2j_2$, CM$_2j'_2$.

Ce qui, en remarquant que les perpendiculaires sur les milieux de CM$_1$ et de CM$_2$ sont déjà tracées, s'obtient par $(4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 4C_3)$.

Je joins ces quatre centres au point B : $(8R_1 + 4R_2)$; je prends avec le compas la longueur R$_3$ $(2C_1)$ et je la porte sur chacune des droites partant de chaque centre, à partir du point où cette droite coupe la circonférence ρ_b : $(4R_1 + 4R_3)$. J'ai ainsi 4 points μ_1, μ'_1, μ_2, μ'_2 et je décris les circonférences ayant pour centres O$_1$, O'$_1$, O$_2$, O'$_2$ et respectivement pour rayons O$_1\mu_1$, O$_1\mu'_1$, O$_2\mu_2$, O$_2\mu'_2$ $(8C_1 + 4C_3)$. Ce sont 4 des 8 solutions. Pour décrire ces quatre circonférences le résultat est donc, en tout :

$$(49R_1 + 27R_2 + 41C_1 + 2C_2 + 29C_3). \qquad (2)$$

Il en faudrait autant pour décrire les 4 autres solutions des cercles qui seraient tangents à ρ'_a, ρ'_b et passant par C.

Le résultat total de la construction s'obtient en ajoutant (1) à 2 fois (2) il est donc : $(100R_1 + 55R_2 + 91C_1 + 5C_2 + 84C_3)$; simplicité : 335.

Si l'on ne cherche qu'un seul des 8 cercles, on trouve pour résultat $(23R_1 + 12R_2 + 30C_1 + 2C_2 + 20C_3)$; simplicité, 87.

Les résultats des deux méthodes n'ont pas été sans me laisser une vive surprise et elle *a été partagée par tous ceux auxquels je les ai montrés.*

Je voyais bien — et c'est un peu de là qu'est venue l'idée que j'ai eue de mesurer la simplicité des constructions — que la concision du langage géométrique ou la désignation par un seul mot de certains éléments, implique de nombreuses constructions effectuées pour leur détermination, pouvait disposer à l'erreur dans l'appréciation, au jugé, de la simplicité d'une construction, mais je n'aurais pas cru que l'illusion de l'élégance pût aller jusque là. Ainsi, pour le problème que nous venons d'examiner, la solution de Bobillier et de Gergonne qui est si belle, si ingénieuse, si directe, et se démontre si prestement, qui donne lieu comme résultat à une construction facilement résumée en quelques mots, qui est universellement connue et citée à juste titre comme modèle, que tous les géomètres ont admirée lorsqu'elle a été présentée, est *beaucoup* moins simple, *le compas à la main,* que la solution de Viète qui semblait lui être si inférieure. Cela se comprend cependant aisément; car il ne faut que quelques mots pour dire qu'on trace les 4 axes de similitude, qu'on prend leurs 12 pôles par rapport aux 3 cercles, qu'on détermine le centre radical des trois cercles donnés et cela seul donne déjà 344 comme coëfficient de simplicité, plus que celui de la construction totale nécessitée par l'exécution intégrale dans l'autre méthode.

Je n'ai pas donné ici d'exemples de construction avec l'équerre pour ne pas allonger sans nécessité l'exposition de la méthode que j'indique, mais il est évident que la chose se ferait exactement de la même manière.

NOTES MATHÉMATIQUES.

×16. *Sur quelques espèces particulières de triangles.* I. Soit un triangle ABC dans lequel la ligne d'Euler, OGH, est parallèle au côté AB. On a les relations

$$\cos C = \tfrac{3}{2} \sin A \sin B = 2 \cos A \cos B = \tfrac{1}{2} \cos (A - B)(*),$$
$$\sin 2C = \tfrac{1}{2} (\sin 2A + \sin 2B)(**), \quad \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 3 (***),$$
$$\operatorname{tg} C = \tfrac{1}{2} (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B), \quad OH = R \sin (A - B).$$

Cas particuliers. 1° $B = 45°$; alors

$$\operatorname{tg} B = 1, \quad \operatorname{tg} C = 2, \quad \operatorname{tg} A = 3, \quad OH = HC',$$

C' étant le pied de la hauteur issue de C.

2° $A - B = 45°$; dans ce cas, $OH = HC$.

II. Supposons IG parallèle à AB. On trouve aisément

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \tfrac{2}{3} \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B = 2 \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B = \tfrac{1}{2} \cos \tfrac{1}{2} (A - B),$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \tfrac{1}{3}, \quad c = \tfrac{1}{2} (a + b), \quad r = 2R \sin^2 \tfrac{1}{2} C,$$
$$r_c = 3r = h_c, \quad IG = \tfrac{1}{6} (a - b) = \tfrac{1}{3} (c - b).$$

Cas particuliers. — 1° $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$; 2° $a = 15$, $b = 13$, $c = 14$, $h_c = 12$.

III. Si, dans le triangle ABC, la droite OH est parallèle à AB, la

---

(*) Soient A', B', C' les pieds des hauteurs. On a

$$CH = 2R \cos C, \quad CC' = 2R \sin A \sin B, \quad HC' = 2R \cos A \cos B,$$

et si M, N sont les milieux de CH, AB :

$$MC' = MN \cos C'MM = R \cos (A - B).$$

Or, par hypothèse, $CH = \tfrac{2}{3} CC' = 2HC'$, $CM = \tfrac{1}{2} MC'$; donc...

(**) Cette relation résulte de ce que

$$\textit{aire}\ AOB = \tfrac{1}{3} ABC = \tfrac{1}{3} (AOC + BOC).$$

(***) On a

$$CC'.HC' = AC'.C'B, \quad HC' = \tfrac{1}{3} CC', \quad AC' = CC' \cot A, \quad C'B = CC' \cot B, \ \ldots$$

Il est facile de transformer les différentes relations signalées ci-dessus l'une dans l'autre.

droite HG′ qui, dans le triangle orthique A′B′C′ de ABC, joint le centre H du cercle inscrit au centre de gravité G′ est parallèle à A′B′; de plus $A'B' = \frac{1}{2}(A'C' + B'C')$.

Car la relation $\cos C = 2 \cos A \cos B$ entraîne l'égalité $\sin \frac{1}{2} C' = 2 \sin \frac{1}{2} A' \sin \frac{1}{2} B'$, puisque les angles A′, B′, C′ du triangle orthique sont les suppléments de 2A, 2B, 2C.

IV. Soit Γ le point de Gergonne de ABC, c'est-à-dire le point de concours des droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés avec le cercle inscrit. Si la droite GΓ est parallèle à AB, on a les formules

$$\frac{1}{p-c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b}\right), \quad r_c = \frac{1}{2}(r_a + r_b),$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B).$$

Les §§ I-IV sont tirés d'un article de M. Reuschle, *Journal de Schlömilch*, t. XI, p. 490.

V. Si la droite GK (K = point de Lemoine) est parallèle à AB, on a

$$a^2 + b^2 = 2c^2, \quad m_c = \tfrac{1}{2} c \sqrt{3},$$

m_c étant la médiane partant de C.

VI. Supposons les sommets A, B fixes. Alors : 1° si la droite OG est parallèle à AB, le sommet C décrit une ellipse dont A et B sont les extrémités du petit axe; 2° si la droite IG est parallèle à AB, le lieu de C est une ellipse ayant pour foyers A et B; 3° si GK est parallèle à AB, C parcourt une circonférence dont le centre est au milieu de AB. (J. N.)

×17. Théorème *sur les maxima et les minima* (par M. l'abbé Gelin). *Si la somme de deux nombres variables est maximum lorsque ces nombres sont égaux, la somme des inverses des mêmes nombres est minimum aussi lorsque ces nombres sont égaux.*

En effet,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{4(x+y)}{(x+y)^2 - (x-y)^2} = \frac{4}{x+y - \dfrac{(x-y)^2}{x+y}}.$$

Le premier terme du dernier dénominateur est maximum, par hypothèse, pour $x = y$, et le second terme est minimum aussi pour $x = y$.

DÉTERMINATION, EN GRANDEUR ET EN DIRECTION, DES AXES D'UNE SECTION DIAMÉTRALE DE L'ELLIPSOÏDE;

par M. Ph. Gilbert, professeur à l'Université de Louvain.

1. La voie indiquée, dans la plupart des traités, pour trouver l'équation aux carrés des demi-axes de la section, suppose connus plusieurs théorèmes dont la méthode suivante, très simple et d'ailleurs plus complète, permet de se passer.

L'équation de l'ellipsoïde étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

soient l, m, n les cosinus directeurs de la normale OP au plan de la section; (x, y, z) les coordonnées de l'extrémité M d'un des demi-axes $OM=\rho$; α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente MT à la section; MT étant perpendiculaire à OM, à OP et à la normale en M à l'ellipsoïde, on a

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha x+\beta y+\gamma z=0,\\ &\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=0,\\ &\alpha l+\beta m+\gamma n=0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Pour éliminer α, β, γ, multiplions par $1, \lambda, \mu$ (λ et μ étant des indéterminées) et ajoutons ces égalités; puis égalons à zéro les coefficients de α, β, γ. Il viendra

$$\left\{\begin{aligned} &x+\frac{\lambda x}{a^2}+\mu l=0,\\ &y+\frac{\lambda y}{b^2}+\mu m=0,\\ &z+\frac{\lambda z}{c^2}+\mu n=0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Si l'on ajoute ces dernières équations, respectivement multipliées par x, y, z, et si l'on a égard aux relations (1) et à celles-ci

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2, \quad lx+my+nz=0, \tag{4}$$

on trouvera

$$\rho^2 + \lambda = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda = -\rho^2;$$

d'où

$$(5) \qquad x = \frac{\mu a^2 l}{\rho^2 - a^2}, \quad y = \frac{\mu b^2 m}{\rho^2 - b^2}, \quad z = \frac{\mu c^2 n}{\rho^2 - c^2}.$$

Substituant ces valeurs dans la deuxième équation (4) et observant que μ n'est pas nul en général, on a

$$(6) \qquad \frac{a^2 l^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{b^2 m^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{c^2 n^2}{\rho^2 - c^2} = 0$$

pour l'équation cherchée.

2. Les équations (5) permettent de trouver les directions des axes de la section quand leur grandeur est connue, mais il y a un moyen plus élégant de les déterminer. On tire des équations (2) et de la relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, l'équation en x, y, z,

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ x & y & z \\ \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$a^2 l(b^2 - c^2)yz + b^2 m(c^2 - a^2)zx + c^2 n(a^2 - b^2)xy = 0.$$

Cette équation représente un cône du second degré dont le sommet est au centre de l'ellipsoïde et qui passe par le point (x, y, z); il contient donc les deux axes de la section. Or, on vérifie immédiatement que les trois axes de l'ellipsoïde, la normale OP au plan de la section, et le diamètre conjugué de ce plan, sont des génératrices du cône; et comme un cône du second degré est déterminé par cinq génératrices, on a ce théorème :

Si l'on coupe un ellipsoïde par un plan diamétral, qu'on fasse passer un cône du second degré par les trois axes de la surface, par le diamètre conjugué du plan sécant et par la perpendiculaire à ce plan élevée par le centre de la surface, ce cône coupera le plan diamétral suivant les axes de la section.

3. La méthode ci-dessus est applicable à bien d'autres surfaces qu'à l'ellipsoïde. Pour la *surface d'élasticité*

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) = 0,$$

on trouve, par exemple, l'équation aux carrés des demi-axes

$$\frac{l^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{m^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{n^2}{\rho^2 - c^2} = 0,$$

ce qu'il était d'ailleurs facile de prévoir, d'après les relations existant entre cette surface et l'ellipsoïde

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1.$$

De même pour la surface des ondes, etc...

BIBLIOGRAPHIE.

Companion to the Weekly Problem Papers, intended for the use of Students preparing for Mathematical Scholarships and for the Junior Members of the Universities who are reading for Mathematical Honours. By The Rev. JOHN J. MILNE, M. A. (London, Macmillan et Co, 1888). Un vol. in-8°, de XXVIII-340 pages, avec 132 figures dans le texte. Prix : 10 sh. 6.

Les *Weekly Problem Papers* et leurs *Solutions*, par M. Milne, ont pour but de familiariser les élèves avec les connaissances acquises dans les cours de Mathématiques et de les initier aux différentes méthodes scientifiques qui leur permettent de résoudre les questions posées aux examens. Le succès que ce Recueil a obtenu en Angleterre a engagé l'auteur à en publier un Complément traitant des matières qui sont négligées ou à peine effleurées dans les manuels en usage et qui, cependant, par leur intérêt particulier, sont éminemment propres à inspirer aux jeunes gens studieux l'amour de la science et le goût des recherches personnelles. Pour mieux assurer la réussite d'un tel livre, M. Milne a fait appel au concours de plusieurs géomètres que leurs travaux antérieurs désignaient spécialement pour les sujets qu'ils ont développés dans le *Companion*.

Comme tous les ouvrages classiques publiés en Angleterre, celui que nous analysons aujourd'hui se recommande par une grande variété des questions traitées ou proposées. On en peut juger par ce simple relevé des subdivisions du livre.

I. Maximums et minimums : 1° partie algébrique (pages 4-16), avec une note de M. Genese ; 2° partie géométrique (17-43). II. Théorie élémentaire des enveloppes : 1° algébrique (47-53) ; 2° géométrique (54-68), avec une note de M. Davis. III. Théories du centre de gravité (par M. Davis) et de la composition des forces (par M. Genese), appliquées à la Géométrie (69-77). IV. Coordonnées biangulaires (78-98), par M. Genese. V. Géométrie récente du triangle (99-184), par le Rév. T. C. Simmons. VI. Théorème de Feuerbach (185-191), démonstrations par MM. Davis, Langley et Genese. VII. Théorie de l'inversion, inverseurs de Peaucellier et de Hart, podaires des coniques (192-204), par M. Langley. VIII. Constructions géométriques et mécaniques (205-211), par M. Genese. IX. Théorie de

l'élimination (212-224), avec une note de M. Simmons. X. Sommation de quelques suites (225-233). XI. Séries binomiales (233-240), par M. Davis. XII. Identités algébriques et trigonométriques (240-247), par M. Davis. XIII. Questions diverses d'algèbre, de trigonométrie et de géométrie des coniques (247-259). XIV. Longueurs des tangentes et des normales aux coniques (261-269). XV. Nouvelles solutions de questions des *Weekly Problem Papers* (269-286). XVI. Questions d'examens posées antérieurement en 1886 dans les différents colléges de Cambridge (281 questions). Les chapitres dont l'auteur n'a pas été spécifié sont dus à M. Milne.

Pour le premier chapitre, l'auteur a consulté un traité de 300 pages de Cresswell (publié en 1817) et un autre de Ramchundra (traduit en anglais en 1859); de plus, il a profité des conseils de M. Elliot dont plusieurs articles sur la même matière viennent de paraître dans le *Messenger of Mathematics*. Il serait intéressant de comparer le traité de Cresswell aux mémoires de Lhuilier et de Steiner.

Le choix des questions est très heureux et les calculs sont présentés avec élégance; mais au point de vue de la rigueur, plusieurs solutions laissent à désirer, particulièrement dans les questions où interviennent les infiniment petits; dans le cas des fonctions de plusieurs variables indépendantes, on se dispense d'examiner la condition nécessaire pour qu'il y ait maximum ou minimum; la distinction entre le maximum et le minimum est souvent supprimée et les valeurs correspondantes de la fonction étudiée sont appelées *valeurs singulières*.

La théorie algébrique des enveloppes traite des courbes représentées par des équations de la forme

$$A\theta^2 + B\theta + C = 0, \quad A\cos\theta + B\sin\theta = C, \quad \frac{A}{\cos\theta} + \frac{B}{\sin\theta} = C,$$

θ étant le paramètre variable; la notation différentielle est remplacée ici par une périphrase équivalente. Dans la partie géométrique, on donne un grand nombre d'enveloppes déduites des propriétés classiques des coniques.

Si A et B sont deux points fixes, les coordonnées biangulaires d'un point M sont les cotangentes des angles MAB, MBA; si on les désigne par $\lambda : \nu$, $\mu : \nu$, les quantités λ, μ, ν peuvent être considérées comme des coordonnées trilinéaires, le triangle de référence étant formé par la droite AB et les perpendiculaires élevées en A et B sur AB. M. Genese traite, dans ce système de coordonnées, plusieurs questions intéressantes relatives à la droite, au cercle et aux courbes du second ordre. Nous avons remarqué une démonstration fort élégante du théorème suivant (Voir *Mathesis* t. II, p. 157): Si sur AB comme base on construit trois triangles isoscèles ABC, ABC', ABC'' tels que la somme des angles CAB, C'AB, C''AB égale deux droits, les côtés de ces triangles se coupent mutuellement en six points d'une même circonférence. Une proposition assez curieuse, qui se rattache naturellement aux coordonnées biangulaires et que nous n'avons pas rencontrée dans ce chapitre, est la suivante : Les angles d'un triangle ABC dont les sommets A et B sont fixes et dont le sommet C décrit une circonférence, vérifient une relation de la forme

$$l \operatorname{cotg} A + m \operatorname{cotg} B + n \operatorname{cotg} C = p,$$

l, m, n, p étant des constantes (*Mathesis*, t. II, pp. 186 et 242).

Quant à la section consacrée à la géométrie récente, voici en quels termes elle a été analysée par M. Tucker dans le n° du 30 juin de l'*Academy*. « L'article le plus long est un exposé de la géométrie récente du triangle par le Rév. T. C. Simmons (pp. 99-184). Comme le disait en janvier dernier M. Davis à l'Association pour l'Avancement de l'enseignement géométrique, *la géométrie récente est le progrès le plus remarquable et le plus intéressant qu'aient fait les mathématiques élémentaires en ces derniers temps. Depuis quelques années, il est apparu dans le champ mathématique, si l'on peut ainsi parler, une planète nouvelle et étrange; maints télescopes sont braqués sur elle dans les divers pays civilisés et on l'observe avec soin.*

« A part l'article de M. Simmons, il n'y a que le supplément de la quatrième édition de *A Sequel to Euclid* du Dr Casey (pp. 165-222) et les pages 245-257 de ses *Coniques* et quelques autres passages de ce dernier manuel, qui contiennent un exposé d'ensemble de cette géométrie récente. On a une foule de mémoires spéciaux sur la matière; mais, en général, il est bien difficile de se les procurer. Dans les *Renseignements historiques et bibliographiques* publiés à la suite de son mémoire lu au Congrès de Grenoble (1885)(*), M. Lemoine a donné un historique des travaux relatifs à la Géométrie récente. C'est une esquisse très soignée et très complète (sauf pour l'Angleterre) dont M. Simmons a donné un résumé dans le chapitre IX. On peut observer à ce propos que, souvent en Angleterre et en France, depuis 1859, on a touché à des questions de géométrie récente, mais sans en voir la connexion. Comme l'a dit M. Lemoine, les points de Brocard ont sans doute été fréquemment rencontrés, mais il est certain qu'avant ce géomètre nul n'avait soupçonné leur rôle et leur importance dans la géométrie du triangle; et il en est de même du point de Lemoine.

« En Angleterre, on ne fit d'abord aucune attention à la géométrie récente. Mais en avril 1885, en étudiant un certain cercle que nous avons appelé cercle de H. M. Taylor, nous avons imaginé le cercle triplicateur et nous avons signalé ses relations avec le cercle de Brocard. Le Dr Casey à qui nous avions communiqué nos résultats reconnut immédiatement l'importance de la géométrie récente. Le savant géomètre de Dublin en devint bientôt l'un des plus ardents promoteurs et contribua grandement à ses progrès.

« M. Simmons, dans son excellente esquisse de la nouvelle doctrine, s'est mis à un point de vue nouveau, tout en conservant les découvertes anciennes. Le premier, il y a introduit, et avec le plus grand succès, la considération de l'excentricité de l'ellipse de Brocard. La science « brocardienne, » dit M. de Longchamps, est née en France, mais elle y est encore peu répandue, bien qu'elle soit déjà classique à l'étranger. Et M. le professeur Neuberg observe qu'il n'y a pas et qu'il n'y aura probablement pas de sitôt, en France, de manuel aussi élémentaire et aussi complet que celui de M. Simmons. Les mathématiciens anglais ont donc contribué

(*) Voir les Mémoires de l'*Association française pour l'Avancement des sciences*, et le supplément du tome VI de *Mathesis*. Nous espérons compléter plus tard la Bibliographie de M. Lemoine dans *Mathesis*.

aux progrès de la géométrie récente depuis 1885, bien qu'ils s'en soient occupés les derniers. M. Simmons, en particulier, dans un mémoire intitulé *Nouvelle Théorie des polygones harmoniques* (lu à la Société Mathématique de Londres, le 7 avril 1887) a fait des recherches originales dans une autre partie de la géométrie récente. Nous croyons même que si le volume de M. Milne n'était pas publié, M. Simmons exposerait cette partie de la science en partant du polygone harmonique et en prenant le triangle comme cas particulier. »

Sans qu'il soit nécessaire d'analyser les autres sections du *Companion*, nos lecteurs ont déjà pu se convaincre, par les pages précédentes, que M. Milne et ses vaillants collaborateurs ont fait une œuvre des plus utiles aux professeurs et aux élèves en réunissant, dans un même volume, les matières qui, sans faire partie des programmes officiels, sont encore du domaine des mathématiques élémentaires.

(J. N.)

A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid, etc., by JOHN CASEY, LL. D., F. R. S., etc. Fifth Edition, Revised and enlarged. Dublin : Hodges, Figgis, and Co. London : Longmans, Green and Co. Un vol. in-12, cartonné de XIX-251 p., avec 184 figures et 553 exercices. Prix : 3 sh. 6 d.

Cinquième édition, revue et augmentée, de l'ouvrage désormais classique du savant professeur de l'Université catholique de Dublin, ouvrage dont il a déjà été rendu compte deux fois dans *Mathesis* (V, pp. 76-78; VI, pp. 276). L'auteur a surtout fait des additions (27 pages, 23 propositions, 79 exercices et 9 figures) au chapitre consacré à la *Géométrie récente*. Il contient une nouvelle section, intitulée : *Théorie générale des figures associées* (pp. 223-251; 9 propositions, 30 exercices); elle est empruntée, en substance, aux articles de M G. Tarry, publiés en 1886 dans notre journal (t. VI, p. 97, 149, 196).

Nous ferons paraître dans *Mathesis*, en 1889, la traduction de la partie de l'ouvrage de M. Casey, relative à *Géométrie récente* (pp. 165-248). (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 242.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 95 et t. VIII, p. 148.)

Les N *premiers nombres entiers sont renfermés dans une urne; on tire au hasard deux nombres* x *et* y. *La probabilité que la somme* $x+y$ *soit un nombre premier avec* N *est* $\varphi(N) : (N-1)$ *ou* $\varphi(N) : N$, *suivant que* N *est pair ou impair.* (DE ROCQUIGNY.)

Suivant l'usage, $\varphi(N)$ désigne combien il y a de nombres non supérieurs à N et premiers à N.

Solution par M. Laisant. Formons le tableau de toutes les sommes $x+y$, en donnant successivement à x les valeurs entières de 1 à N, puis à y toutes les mêmes valeurs, moins, chaque fois, celle attribuée à x. Nous aurons ainsi doublé tous les cas qui peuvent se présenter, et la probabilité pourra s'évaluer en considérant ce tableau :

$$\begin{array}{ccccccc}
3 & 3 & & & & & \\
4 & & 4 & & & & \\
5 & 5 & 5 & & & & \\
\cdot & \cdot & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
1+N & 1+N & 1+N & \cdots & 1+N & & \\
 & 2+N & 2+N & \cdots & 2+N & & \\
 & & 3+N & \cdots & 3+N & & \\
 & & & & \cdot & & \\
 & & & & 2N-1. & &
\end{array}$$

Mais au point de vue des facteurs communs avec N, on peut aussi bien écrire(*)

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\
3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\
4 & & 4 & \cdots & 4 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
N & N & N & \cdots & N.
\end{array}$$

D'après la formation même de ce tableau, il est visible

1° que si N est pair, on a $\frac{1}{2}$N lignes de rang impair, de N éléments, et $\frac{1}{2}$N lignes, de rangs pairs, de N — 2 éléments(**). C'est seulement parmi les lignes impaires qu'il faut chercher les cas favorables. Il y en a évidemment $N\varphi(N)$ et le nombre total des cas possibles étant $N(N-1)$, on a la probabilité $\varphi(N):(N-1)$.

2° Si N est impair, on a N lignes composées chacune de (N — 1)

(*) On diminue de N les nombres des N — 1 dernières lignes horizontales, et l'on réunit, ensuite, la première ligne à la $(N+3)^e$, le 2e à la $(N+4)^e$, etc.

(**) Soit a un nombre pair, plus petit que N; les nombres a et $N+a$ ont été écartés, chacun une fois, du tableau primitif comme provenant de deux valeurs égales de x et y.

éléments (*). La probabilité est alors $(N-1)\varphi(N) : N(N-1) = \varphi(N) : N$.

Autre solution. Donnons à x une valeur fixe, à y une valeur variable; nous aurons pour $x+y$ une suite de N valeurs

$$x+1, \quad x+2, \quad x+3, \quad \ldots, \quad x+N \tag{1}$$

renfermant $\varphi(N)$ nombres premiers avec N. Faisant ensuite varier x, nous aurons N séries semblables à (1) et renfermant en tout $N\varphi(N)$ nombres premiers avec N. Mais il faut supprimer de ces séries les nombres qui correspondent à $x = y$, c'est-à-dire

$$1+1, \quad 2+2, \quad 3+3, \quad \ldots, \quad N+N. \tag{2}$$

Lorsque N est pair, la suite (2) ne présente aucune chance favorable; lorsque N est impair, elle présente $\varphi(N)$ chances favorables. Donc la somme $x+y$ offre $N(N-1)$ cas possibles, parmi lesquels $N\varphi(N)$ favorables, dans l'hypothèse de N pair, et $N\varphi(N) - \varphi(N)$, dans celle de N impair. (J. N.)

Question 428.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 70.)

Étant donnés quatre points A, B, C, D, *trouver le lieu du point de contact de deux circonférences variables, tangentes entre elles et passant, l'une par* A *et* B, *l'autre par* C *et* D. *Trouver l'enveloppe de la tangente commune.* (Barbarin.)

1° *Solution par* MM. Verniory *et* Gob. Supposons que les droites AB, CD se rencontrent en O, et soient $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$. Les équations des deux circonférences variables, rapportées aux axes OA, OC seront

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2\alpha x - 2my + \beta = 0, \tag{1}$$

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2nx - 2\gamma y + \delta = 0, \tag{2}$$

où

$$2\alpha = a+b, \quad \beta = ab, \quad 2\gamma = c+d, \quad \delta = cd;$$

m et n sont des paramètres variables.

Si (x, y) sont les coordonnées d'un point M du lieu, elles vérifient les équations (1) et (2); de plus, les coefficients angulaires des tangentes en

---

(*) Des nombres a et $N+a$, un seul est pair et a été écarté une fois du premier tableau.

M aux deux circonférences correspondantes sont égaux. On a donc

$$\frac{x+y\cos\theta-\alpha}{y+x\cos\theta-m}=\frac{x+y\cos\theta-n}{y+x\cos\theta-\gamma}. \qquad (3)$$

Entre (1), (2), (3), il faut éliminer m et n. La dernière égalité peut être écrite ainsi :

$$(x+y\cos\theta)(m-\gamma)+(y+x\cos\theta)(n-\alpha)+\alpha\gamma-mn=0.$$

Si l'on y remplace m et n par leurs valeurs, on trouve, en désignant $x^2+2xy\cos\theta+y^2$ par S :

$$2(x^2+xy\cos\theta)(S-2\alpha x-2\gamma y+\beta)+2(y^2+xy\cos\theta)(S-2\alpha x-2\gamma y+\delta)$$
$$+4\alpha\gamma xy-(S-2\alpha x+\beta)(S-2\gamma y+\delta)=0,$$

ou, après quelques réductions faciles,

$$S^2-2(\alpha x+\gamma y)S+(\beta-\delta)(x^2-y^2)+2\beta\gamma y+2\alpha\delta x-\beta\delta=0.$$

Le lieu de M est donc une quartique bicirculaire. Si l'on fait $y=0$, on trouve

$$x^4-(a+b)x^3+(ab-cd)x^2+2(a+b)cdx-abcd=0,$$

équation dont les racines sont a, b, $+\sqrt{cd}$, $-\sqrt{cd}$; ce résultat s'explique à priori.

L'hypothèse $\beta=\delta$ réduit l'équation du lieu à

$$(S-\beta)(S-2\alpha x-2\gamma y+\beta)=0.$$

Le quadrilatère ABCD est alors inscriptible, et le lieu se compose, visiblement, de la circonférence ABCD et de la circonférence décrite de O comme centre, avec le rayon $\sqrt{OA.OB}$.

2° L'axe radical des circonférences (1) et (2) a pour équation

$$2(n-\alpha)x+2(\gamma-m)y+\beta-\delta=0,$$

que nous représentons par

$$px+qy-1=0. \qquad (4)$$

Exprimons qu'il touche l'une des circonférences. A cet effet, nous déduisons de (1) et (4) l'équation homogène en x et y :

$$x^2+2xy\cos\theta+y^2-2(\alpha x+my)(px+qy)+\beta(px+qy)^2=0,$$

laquelle devra donner pour le rapport $\frac{x}{y}$ deux valeurs égales. On a donc la condition

$$(\cos\theta-\alpha q-mp+\beta pq)^2-(1-2\alpha p+\beta p^2)(1-2mq+\beta q^2)=0,$$

ou

$$(m^2-\beta)p^2+(\alpha^2-\beta)q^2+2(\beta\cos\theta-\alpha m)pq$$
$$+2p(\alpha-m\cos\theta)+2q(m-\alpha\cos\theta)-\sin^2\theta=0. \qquad (5)$$

Si l'on y remplaçait p et q par les valeurs

$$p=\frac{2(\alpha-n)}{\beta-\delta}, \quad q=\frac{2(m-\gamma)}{\beta-\delta}, \qquad (6)$$

on aurait l'équation de condition entre m, n, exprimant que les circonférences (1) et (2) se touchent. Mais en éliminant m de l'équation (5) au moyen de la seconde des équations (6), on aura une relation constante entre p et q, c'est-à-dire l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée. On obtient

$$p^2q^2(\beta-\delta)^2+4p^2q\gamma(\beta-\delta)-4pq^2\alpha(\beta-\delta)+4p^2(\gamma^2-\beta)+4q^2(\alpha^2-\delta)$$
$$+4pq[(\beta+\delta)\cos\theta-2\alpha\gamma]+8p(\alpha-\gamma\cos\theta)+8q(\gamma-\alpha\cos\theta)-4\sin^2\theta=0.$$

Si l'on suppose $\beta=\delta$, on trouve l'équation tangentielle de la circonférence ABCD et l'origine O caractérisée par $p=\infty$, $q=\infty$.

L'équation de l'enveloppe de la tangente commune, en coordonnées parallèles, nous paraît être assez compliquée.

Note. 1° Pour trouver le degré du lieu du point M, il suffit d'observer que la droite OX renferme quatre points du lieu, savoir les points A et B, qui correspondent aux circonférences CDA, CDB, et les points distants de O de la quantité $\pm\sqrt{OC.OD}$; ces points correspondent aux deux circonférences qu'on peut faire passer par C, D, tangentiellement à la droite OAB considérée comme étant une circonférence décrite par A et B.

2° Plus généralement, considérons deux faisceaux F, F′ de coniques passant, les unes par les points fixes A, B, A′B′, les autres par les points fixes C, D, C′, D′. Nous nous proposons de déterminer l'ordre du lieu du point où une conique Σ du premier faisceau est touchée par une conique du second faisceau.

Entre deux points M, N de Σ, qui sont situés sur une conique du faisceau F′, il existe une correspondance (3, 3); car si l'on donne le point M, les cinq points C, D, C′, D′, M déterminent une seule conique, et celle-ci rencontre Σ en trois autres points. Cette correspondance présente 3 + 3 ou 6 coïncidences (*), donc il existe six coniques passant par C, D, C′, D′,

(*) On peut encore dire que les coniques du faisceau F′ marquent sur Σ des

et touchant Σ. Mais les points fixes A, B, A′, B′ sont aussi des points du lieu cherché; car il existe dans le faisceau F une conique (et une seule) touchant la conique CDC′D′A en A. Il résulte de là que toute conique de l'un ou l'autre faisceau F, F′ renferme dix points du lieu; celui-ci est donc, dans le cas général, du 5e ordre.

On parvient à la même conclusion en observant que la droite AB renferme cinq points du lieu, savoir : les points A et B, les points doubles de l'involution marquée sur AB par les courbes du faisceau F′, et le point d'intersection des droites AB, A′B′.

On peut confirmer ces conclusions par l'analyse. Soient

$$P + \lambda Q = 0, \quad R + \mu S = 0,$$

les équations des deux faisceaux; P, Q, R, S représentent des fonctions connues, homogènes en x, y, z et du second degré. Marquons par les indices 1, 2, 3 les dérivées partielles de ces fonctions par rapport à x, y, z. Les équations des tangentes en un point (x, y, z) commun à deux courbes des faisceaux sont

$$X(P_1 + \lambda Q_1) + Y(P_2 + \lambda Q_2) + Z(P_3 + \lambda Q_3) = 0,$$
$$X(R_1 + \mu S_1) + Y(R_2 + \mu S_2) + Z(R_3 + \mu S_3) = 0.$$

Pour que les deux courbes se touchent en ce point, on doit avoir

$$\frac{P_1 + \lambda Q_1}{R_1 + \mu S_1} = \frac{P_2 + \lambda Q_2}{R_2 + \mu S_2} = \frac{P_3 + \lambda Q_3}{R_3 + \mu S_3},$$

ou

$$P_1 + \lambda Q_1 = \rho(R_1 + \mu S_1),$$
$$P_2 + \lambda Q_2 = \rho(R_2 + \mu S_2),$$
$$P_3 + \lambda Q_3 = \rho(R_3 + \mu S_3),$$

ρ étant un facteur de proportionnalité. Entre ces équations et $P + \lambda Q = 0$, éliminons λ, ρ, μ; il vient

$$\begin{vmatrix} P, & Q, & 0, & 0 \\ P_1, & Q_1, & R_1, & S_1 \\ P_2, & Q_2, & R_2, & S_2 \\ P_3, & Q_3, & R_3, & S_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on fait coïncider C′, D′ avec A′, B′, la droite C′D′ se sépare du lieu; c'est le cas de la question 428. (J. N.)

---

groupes de quatre points en involution. Or, une involution du m^e ordre présente $2(m-1)$ points doubles.

Question 535.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 216.)

Le sommet A *de l'angle droit d'un triangle rectangle* ABC *est fixe; le sommet* B *décrit une droite ou une circonférence, et l'hypoténuse est parallèle à une droite donnée Trouver le lieu du sommet* C. (DE ROCQUIGNY.)

Solution analytique par MM. MINOLITI, G. RUSSO, VERNIORY, BOEDT, GOB. Prenons des axes AX parallèle, et AY perpendiculaire à la direction de l'hypoténuse. Soient (x, y) les coordonnées de C, (x', y') celles de B. Les conditions du lieu s'expriment par les équations

$$y = y', \quad xx' + yy' = 0, \tag{1}$$

qui donnent

$$\begin{cases} y' = y, \\ x' = -\dfrac{y^2}{x}; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = y', \\ x = -\dfrac{y'^2}{x'}. \end{cases}$$

Donc si l'équation du lieu décrit par B est $f(x, y) = 0$, celle du lieu de C sera $f\left(-\dfrac{y^2}{x}, y\right) = 0$ (*). Supposons successivement

$$f(x, y) = Ay + Bx + C,$$
$$f(x, y) = x^2 + y^2 + Ay + Bx + C = 0.$$

Nous aurons pour le lieu de C :

$$y(Ax - By) + Cx = 0,$$
$$y^2(x^2 + y^2) + xy(Ax - By) + Cx^2 = 0.$$

Dans le premier cas, on obtient une hyperbole passant par A et ayant ses asymptotes, l'une parallèle à Ax et l'autre perpendiculaire à la droite donnée; cependant, si celle-ci est perpendiculaire à Ax, on a une parabole.

Dans le second cas, le lieu est une quartique passant par A et par les points cycliques du plan. Il se réduit à une circonférence, lorsque $A = 0$, $C = 0$; ce résultat se voit immédiatement. On obtient une conique lorsque $C = 0$.

M. MINEUR traite la question en coordonnées polaires; M. DÉPREZ l'étend à la sphère, et M. JAMES emploie la méthode vectorielle (équipollences).

(*) Prenons l'équation du lieu de B sous la forme homogène $f(x, y, z) = 0$; alors l'équation du lieu de C est $f(-y^2, xy, xz) = 0$. (J. N.)

Solution synthétique. A) Lorsque le point B décrit une droite u, les droites AB, BC, AC se correspondent dans trois faisceaux projectifs; donc le point C parcourt une conique passant par les centres des faisceaux (AC), (BC), c'est-à-dire par A et le point à l'infini sur la direction de l'hypoténuse. Le lieu de C est donc une hyperbole dont une asymptote est parallèle à cette direction; la seconde asymptote est perpendiculaire à u. Les directions asymptotiques se confondent, lorsque u est perpendiculaire à la direction de BC; la courbe est alors une parabole (LAURENS, MINOLITI, BOEDT).

B) Supposons que l'hypoténuse BC pivote autour d'un point fixe I et que le point B décrive une courbe d'ordre n. Toute droite menée par A rencontre cette courbe en n points qui sont, chacun, une position du sommet B d'un triangle ABC. De même, à toute droite menée par I correspondent n positions de B. Donc, les droites AC, IC satisfont à une correspondance (n, n) et leur point d'intersection engendre une courbe d'ordre $2n$. A et I sont des points n-tuples.

Le degré du lieu diminue, lorsque A ou I sont des points simples ou multiples du lieu du point C. (VERNIORY, BOEDT.)

Question 606.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 56.)

Par les sommets A *et* B, C *et* D *d'un quadrilatère, on fait passer deux circonférences variables, telles que le rapport des rayons soit constant. Démontrer que leur axe radical enveloppe une conique.* (DÉPREZ.)

Solution analytique par MM. BROCARD *et* PISANI. Prenons pour axes de coordonnées OABx, OCDy et soient θ l'angle YOX, a, b, c, d les segments OA, OB, OC, OD. Les circonférences variables ayant, respectivement, pour équations

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - (a+b)\,x - \beta y + ab = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - (c+d)\,y - \alpha x + cd = 0,$$

le rapport des carrés des rayons est

$$K^2 = \frac{(a+b)^2 + \beta^2 - 2\beta(a+b)\cos\theta - 4ab\sin^2\theta}{(c+d)^2 + \alpha^2 - 2\alpha(c+d)\cos\theta - 4cd\sin^2\theta},$$

ou, en posant

$$\beta - (a+b)\cos\theta = \lambda, \quad \alpha - (c+d)\cos\theta = \mu,$$

$$K^2 = \frac{\lambda^2 + (a-b)^2\sin^2\theta}{\mu^2 + (c-d)^2\sin^2\theta}. \qquad (1$$

L'axe radical a pour équation

$$\mu x - \lambda y + \rho = 0,$$

où ρ désigne la quantité

$$[c+d-(a+b\cos\theta]\,y - [a+b-(c+d)\cos\theta]\,x + ab - cd.$$

μ et λ sont ici deux paramètres variables liés par l'équation de condition (1). La théorie des enveloppes conduit aisément à l'équation

$$K^2\rho^2 + [(a-b)^2 - K^2(c-d)^2]\sin^2\theta\,(K^2y^2 - x^2) = 0.$$

La courbe cherchée est donc une conique tangente aux droites $x = \pm Ky$. Elle se réduit à l'origine, lorsque $ab = cd$, condition qui exprime que les points A,B,C,D sont concycliques.

Solution géométrique par M. Bruyr, *sous-lieutenant d'infanterie.* Il est facile de construire deux cercles ω, ω', passant respectivement, par A et B, C et D, et tels que l'axe radical passe par un point donné X de la droite AB. En effet, joignons XC, et déterminons sur cette droite, au moyen de la circonférence ABC, un point E tel que $XC.XE = XA.XB$. Prenons le cercle CDE pour le cercle ω', et si R′ est son rayon, décrivons un cercle ω passant par A et B et dont le rayon R est déterminé par la relation $R = \lambda R'$, λ étant le rapport constant donné. Comme il y a deux de ces cercles ω, et que la droite AB n'appartient pas à l'enveloppe cherchée, on voit que celle-ci est de la seconde classe.

Si M et N sont les milieux de AB, CD et que l'on fasse $M\omega = \rho$, $N\omega' = \rho'$, $AM = \alpha$, $CN = \beta$, il existe entre ρ et ρ' la relation

$$\alpha^2 + \rho^2 = K^2(\beta^2 + \rho'^2);$$

donc la ligne des centres $\omega\omega'$ enveloppe une courbe de la quatrième classe ayant pour tangentes doubles les perpendiculaires élevées aux milieux de AB, CD. (J. N.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

384. En quel point M d'une ligne de chemin de fer AX faut-il faire aboutir une route de terre BM pour établir entre une localité A située sur la ligne de chemin de fer et une autre B située en dehors 1° la com-

munication la plus rapide; 2° la voie la moins coûteuse pour les marchandises ?

1° **Menons** BB′ perpendiculaire sur AX et soient $BB' = a$, $AB' = b$, $B'M = x$. V et V′ étant les vitesses sur le chemin de fer et sur la route de terre, on doit rendre minimum la quantité

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{V'} + \frac{b - x}{V}.$$

On trouve

$$x = \frac{aV'}{\sqrt{V'^2 - V^2}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{V}{V'} = \sin. MBB'.$$

2° Si p et p' sont les prix du transport par kilomètre sur les deux routes, il faut rendre minimum

$$q = p'\sqrt{a^2 + x^2} + p(b - x), \quad \text{d'où} \quad \sin MBB' = p' : p.$$

285. De l'équation $\operatorname{tg} b \cos x - \sin a \sin x = \operatorname{tg} b \cos a$, déduire $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x$, en fonction de $\operatorname{tg} \frac{1}{2} a$ et $\operatorname{tg} \frac{1}{2} b$.

Solution : $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} b$ ou $- \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \operatorname{cotg} \frac{1}{2} b$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

282. (*Mathesis*, t. III, p. 231). Trouver la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{x^n \, dx}{\sqrt[m]{(P_n x^n + P_{n-1} x^{n-1} + \cdots + P_2 x^2 + P_1 x + 1)^{m-1}}},$$

où l'on a posé, pour abréger.

$$P_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)},$$

m désignant un nombre entier plus grand que l'unité, et n un entier positif quelconque. (S. Realis.)

317. (*Mathesis*, t. IV, p. 71). Les droites qui joignent les sommets d'un triangle fixe ABC à un point quelconque O, rencontrent les côtés opposés en trois points A′, B′, C′; par ceux-ci et par deux points fixes D, E, on fait passer une conique, qui rencontre les côtés de ABC en trois nouveaux points A″, B″, C″; les droites AA″, BB″, CC″ se coupent en un même point O′. Les points O, O′ satisfont à une transformation birationnelle réversible qu'on demande de décomposer en trois transformations quadratiques. (J. Neuberg.)

×**218**. (*Mathesis*, t. IV, p. 71). La conique A'B'C'DE étant remplacée par le cercle A'B'C', et le point O parcourant la circonférence ABC, trouver le lieu décrit par O'(*). (J. GILLET.)

×**333**. (*Mathesis*, t. IV, p. 119). On peut décomposer un polygone de $m = (p-2)\,n + 2$ côtés, en n polygones de p côtés de

$$\frac{(np-n)\,(np-n-1)\,\ldots\,(np-2n+2)}{1.2.3\ldots n}$$

manières différentes. (H. M. TAYLOR et R. C. ROWE.)

×**630**. Soient AB un diamètre d'une circonférence et CD une corde perpendiculaire à AB au point E. Si a, b, c, d sont les distances des points A, B, C, D à une droite quelconque L et $(\lambda : \mu)$ le rapport des segments BE, AE, démontrer la relation

$$\lambda a^2 + \mu b^2 = (\lambda + \mu)\,(cd + \overline{CE}^2).$$

Déduire de là l'enveloppe d'une droite L satisfaisant à la condition $\lambda a^2 + \mu b^2 = \text{const.}$ (M'CAY.)

×**631**. Combien de solutions distinctes admet l'équation

$$x + y + z = n + 2,$$

les indéterminées x, y, z ayant des valeurs égales ou inégales choisies parmi les nombres $1, 2, 3, \ldots, n$? (ANDRÉ DE BÖZÓBY.)

SUPPLÉMENT.

Nous publions en supplément, dans la présente livraison de *Mathesis*, un intéressant article de M. le lieutenant Goedseels, répétiteur à l'École militaire de Belgique, article qui a paru dans les *Bulletins* de l'*Académie royale* de Bruxelles, (juillet 1888, 3e série, t. XVI, p. 86-92). Pour faciliter l'intelligence de ce petit mémoire à ceux de nos lecteurs qui pourraient trouver trop concise l'exposition de M. Goedseels, nous croyons utile d'ajouter quelques notes explicatives à deux des paragraphes de son travail (**).

(*) Ce cas particulier, communiqué par M. Gillet, nous a suggéré la question plus générale qui précède. (J. N.)

(**) *Rectifications importantes.* 1° page 9, ligne 13, il faut lire évidemment : *corde* SUPÉRIEURE *à* ρ, au lieu de *corde* INFÉRIEURE *à* ρ.

2° Dans le texte du rapport imprimé aux *Bulletins*, se trouve p. 23, la note suivante qui n'est pas dans le tirage à part destiné à servir de supplément à *Mathesis* : « La démonstration s'appuie implicitement sur la remarque suivante : *Si une corde*

§ I. On peut mettre sous une forme plus explicite le raisonnement contenu dans les derniers alinéas de ce paragraphe.

1° Supposons que v_n ait une limite finie L et posons $L - v_n = \varepsilon_n$: d'après l'hypothèse ε_n décroît quand n croît et a pour limite zéro.

Le terme v_n faisant partie de la suite des $u_0, u_1, u_2, \cdots$, on est certain, comme le dit M. Goedseels, que, pour k suffisamment grand, on a

$$v_n < u_{n+k}, \quad v_n < u_{n+k+1}, \quad v_n < u_{n+k+2}, \text{ etc.},$$

autrement dit, u_{n+k}, u_{n+k+1}, u_{n+k+2}, $\cdots$ sont tous supérieurs à $L - \varepsilon_n$.

Un terme quelconque de cette suite, par exemple u_{n+k+r}, est inférieur à tous les termes : $u_{n+k+r+l}$, $u_{n+k+r+l+1}$, $u_{n+k+r+l+2}$, $\cdots$ pour l suffisamment grand, d'après la définition de la suite des u; parmi ces termes $u_{n+k+r+l}$, $u_{n+k+r+l+1}$, etc., il y a des termes de la suite des v, sans quoi elle ne serait pas indéfinie comme elle l'est évidemment. Soit $v_{n+q} = L - \varepsilon_{n+q}$ le premier. On aura donc $u_{n+k+r} < L - \varepsilon_{n+q}$.

Tout terme u_{n+k+r}, à partir de u_{n+k} inclusivement, satisfait donc aux inégalités

$$L - \varepsilon_n < u_{n+k+r} < L - \varepsilon_{n+q} < L,$$

d'où il résulte que, pour r croissant indéfiniment, u_{n+k+r} a pour limite L.

2° Si v_n a une limite infinie, c'est-à-dire si v_n pour n suffisamment grand dépasse une quantité G aussi grande qu'on veut, on a immédiatement

$$G < v_n < u_{n+k}, \quad G < v_n < u_{n+k+1}, \quad \text{etc.}$$

d'où, plus rapidement encore, $\lim u_{n+k} = \infty$.

§ III. Ce paragraphe s'appuie sur quelques propriétés des fonctions continues qu'on trouve seulement dans les traités récents de calcul différentiel et qu'il est bon de signaler explicitement.

1° Si les côtés du polygone dont il est parlé dans le premier alinéa sont suffisamment petits, ce polygone jouira de la propriété énoncée dans le deuxième alinéa, pourvu que la courbe ne soit pas fermée et n'ait pas de boucle(*). Cette propriété est la suivante : *La distance entre deux points choisis arbitrairement sur tout arc sous-tendu par un côté du polygone à côtés suffisamment petits est inférieure à une quantité d donnée d'avance.*

D'après une propriété des fonctions continues, on peut choisir δ de manière que pour toute valeur de t, depuis a jusqu'à b, on ait, en valeur absolue,

$$F(t + \lambda\delta) - F(t) < \tfrac{1}{3} d,$$
$$f(t + \lambda\delta) - f(t) < \tfrac{1}{3} d,$$
$$\varphi(t + \lambda\delta) - \varphi(t) < \tfrac{1}{3} d,$$

---

inscrite dans une courbe (non fermée et sans boucle) a pour limite zéro, il en est de même de la différence des valeurs de la variable indépendante correspondant aux extrémités de la corde. (JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 588, n° 39, fin).

3° A la page 8, ligne 8, lire, comme dans les *Bulletins*, *ligne continue*, au lieu de *ligne*; ligne 24, lire inférieur *ou égal*.

(*) On étend aux courbes fermées ou à boucles ce qui est dit des courbes non fermées, en les subdivisant en courbes non fermées et sans boucles.

λ prenant toutes les valeurs depuis 0 jusque 1 (Voir C. JORDAN, *Cours d'analyse*, 1887, t. III, p. 573, n° 26; PH. GILBERT, *Cours d'analyse infinitésimale*, 3e édition, 1887, n° 71, p. 64; P. MANSION, *Résumé du cours d'analyse de l'Université de Gand*, 1877-1887, n° 93, p. 20-21).

La distance des points correspondant aux valeurs t et $t+\lambda\delta$ est égale ou inférieure à la somme des valeurs absolues des différences

$$F(t+\lambda\delta)-F(t),\quad f(t+\lambda\delta)-f(t),\quad \varphi(t+\lambda\delta)-\varphi(t),$$

qui sont les projections de cette distance sur les trois axes de coordonnées. On a donc, en appelant cette distance $\psi(t, \lambda\delta)$, $\psi(t, \lambda\delta) < d$.

Donnons maintenant à t toutes les valeurs de a à b, et à λ toutes les valeurs plus grandes que l'unité, pourvu que $t+\lambda\delta$ ne tombe pas en dehors de l'intervalle (a, b). Aucune des cordes $\psi(t, \lambda\delta)$ ne peut être nulle, puisque la courbe n'est pas fermée et n'a pas de boucle. Enfin la fonction $\psi(t, \lambda\delta)$ étant une fonction continue de t et de λ, a une valeur minima m différente de zéro, d'après un théorème de Weierstrass (JORDAN, III, p. 572, n° 25; GILBERT, n° 73, p. 65; MANSION, n° 204, p. 81; ce théorème s'applique aux fonctions de plusieurs variables).

Considérons maintenant un polygone inscrit dans la courbe et dont tous les côtés sont inférieurs à m. Les valeurs t_1, t_2 correspondant aux extrémités d'un côté sont telles que $t_2 - t_1$ est moindre que δ en valeur absolue; car, si l'on avait $\pm(t_2 - t_1)$ supérieur à δ, le côté correspondant serait supérieur à m. Les valeurs t_3, t_4 correspondant aux extrémités d'une corde inscrite dans l'arc sous-tendu par le côté dont il vient d'être question, étant telles que $\pm(t_4 - t_3)$ est inférieur à $\pm(t_2 - t_1)$, on a aussi $\pm(t_4 - t_3) < \delta$. Par conséquent, le côté et la corde sont inférieurs à d, ce qu'il fallait démontrer.

Les polygones dont il est parlé dans le deuxième alinéa du § III de l'article de M. Goedseels comprennent donc *tous* les polygones inscrits à côtés suffisamment petits(*).

2° Dans le cinquième alinéa, M. Goedseels dit : « Partant de là, considérons la partie $K_\varphi L_\varphi \dots U_\varphi V_\varphi$ du polygone $AC_\varphi D_\varphi \dots B$, inscrite dans l'arc $M_p N_p$. »

Au premier abord, on peut se demander si le polygone $AC_\varphi D_\varphi \dots B$ aura un seul sommet compris entre les points M_p et N_p. La réponse à cette question se trouve dans l'alinéa précédent. Supposons qu'aucun sommet du polygone $AC_\varphi \dots B$ ne se trouve ni entre M_p et R, ni entre R et N_p. Alors, d'après la définition même du polygone $AC_\varphi \dots B$, les cordes M_pR, RN_p (qui joindraient chacune deux points pris sur un arc sous-tendu par un côté du polygone $AC_\varphi \dots B$) seraient inférieures à q, ce qui est absurde, puisque M_pR et RN_p surpassent $4q$. Il y a donc au moins un sommet du polygone $AC_\varphi \dots B$ entre M_p et R et un entre R et N_p.

Mais il est facile de voir qu'il doit au moins y en avoir quatre, car s'il y en avait moins, trois, par exemple, le raisonnement du quatrième alinéa prouve que l'un au moins des côtés serait supérieur à q, ce qui est contraire à l'hypothèse. (P. M.)

(*) Le présent commentaire peut aussi s'appliquer à la définition de la longueur d'une courbe donnée par M. JORDAN, *Cours d'analyse*, III, p. 594, n° 46.

PROBLÈMES SUR LA DROITE DE PROFIL(*);

par M. BARBARIN, professeur au lycée de Toulon.

I. *Connaissant les deux projections* (a, a'), (b, b') *de deux points* A, B *d'une droite, et la projection* m *d'un point* M *de cette droite, trouver l'autre projection* m'. Quand la droite AB est perpendiculaire à la ligne de terre ou, suivant l'expression usitée, située dans un *plan de profil*, on fait un changement de plan de projection unique, qui ramène la question au cas général; mais, en examinant avec soin la figure du cas général de ce problème, on fait une remarque qui, appliquée à la droite de profil, permet de faire simplement la construction sans recourir à une projection nouvelle. Cette remarque est la suivante : *les points* m *et* m', *partagent respectivement les droites* ab, $a'b'$ *dans le même rapport.*

Soient donc (fig. 1) les projections (a, a') (b, b') des points A, B, situées sur la même ligne de rappel, et m la projection donnée de M; en un point quelconque β de la ligne de terre, menons une autre ligne de rappel coupée aux points a_1, m_1, b_1 par les parallèles aa_1, mm_1, bb_1 à LT. Faisons couper a_1a', b_1b' au point μ; la droite μm_1 rencontre $a'b'$ au point m' demandé. Inversement, de m' on peut déduire m_1 et m.

Les droites a_1a', b_1b' peuvent être parallèles; $m_1\mu m'$ est alors parallèle à ces droites; μ est à l'infini sur leur direction.

Cette construction présente sur celle du changement de plan l'avantage de n'exiger que la règle et l'équerre.

II. *Construire les points remarquables de la droite de profil* $(ab, a'b')$.

1° *Traces sur les plans de projection.* On connaît (fig. 2) la projection verticale h' de la trace horizontale, et la projection horizontale v de la trace verticale, situées toutes deux au pied α de la ligne de rappel; en utilisant la construction précédente, on trouve les points h et v'.

2° *Traces sur les plans bissecteurs.* Soit γ le milieu de $\alpha\beta$, la ligne $\mu\gamma$ coupe $a'b'$ au point p' qui est la projection verticale du point P où AB

(*) Il importe d'observer, en lisant cet article, que l'ingénieuse méthode qui y est exposée ne peut remplacer la méthode ordinaire, dans tous les cas, parce que le point μ peut tomber en dehors des limites de l'épure. La méthode ordinaire est moins métrique, plus descriptive que celle qui est exposée ici.

rencontre le plan bissecteur du premier dièdre; on sait donc construire la projection horizontale p.

La parallèle à LT menée par le point μ coupe ab et $a'b'$ aux points confondus qq' qui sont les projections du point Q où AB perce le deuxième plan bissecteur.

Fig 1.

Il est intéressant d'observer que $havpmb \ldots h'a'v'p'm'b' \ldots$ forment respectivement, sur la ligne de rappel αd deux divisions semblables ayant qq' pour point double.

Remarque. La ligne pp' n'existe pas quand $\mu\gamma$ est perpendiculaire

à LT, c'est à dire quand $ab = a'b'$, a et b étant disposés en sens inverse de a' et b'; alors la droite AB est parallèle au premier plan bissecteur. De même, qq' n'existe pas quand μ est à distance infinie, ce qui exige

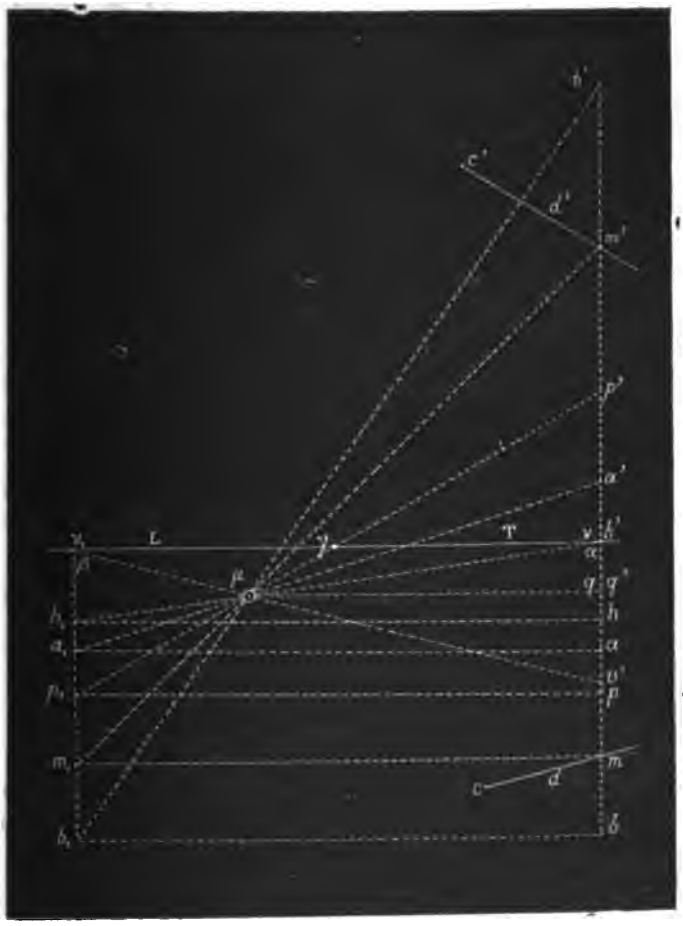


Fig. 2.

$ab = a'b'$, a et b étant disposés de la même manière que a' et b'; AB est alors parallèle au deuxième plan bissecteur.

III. ***Intersection de droites de profil.*** Une seule des deux droites, (ab, $a'b'$) par exemple, est de profil, la projection horizontale cd de l'autre

droite coupant ab au point m, sa projection verticale $c'd'$ coupant $a'b'$ au point m' (fig. 2), il faut que les trois points m_1, μ, m' soient en ligne droite pour que $(cd, c'd')$ coupe $(ab, a'b')$; le point d'intersection est mm'.

Supposons maintenant que les deux droites AB, CD soient dans le même plan de profil α. Soient (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'), les projections des quatre points qui les déterminent (fig. 1). Je construis les deux points μ et μ_1 relatifs à AB et CD; la droite $\mu\mu_1$ coupe $a'b'$ au point m' projection verticale du point M où AB et CD se coupent. Quand les points μ et μ_1 sont à distance infinie, la construction ne réussit plus, car les droites AB, CD, étant parallèles toutes deux au deuxième plan bissecteur, sont parallèles entre elles; il en est encore de même quand $\mu\mu_1$ est perpendiculaire sur LT, comme nous le démontrerons un peu plus loin. Enfin, si les points μ et μ_1 se confondent, $\mu\mu_1$ est une ligne indéterminée, et AB, CD se confondent.

IV. *Droites de profil parallèles.* Quand deux segments de droites, AB, CD sont parallèles, leurs projections de même nom sont respectivement proportionnelles et dirigées de la même manière. La réciproque est également vraie dans tous les cas. Utilisons ces remarques.

1° Soient AB, CD deux droites de profil appartenant à des plans de profil différents. On reconnaîtra qu'elles sont parallèles à ce que les droites AC, BD, qui ne sont pas de profil, se coupent.

2° Soient AB, CD deux droites du même plan de profil α, on reconnaîtra qu'elles sont parallèles à ce que cd et $c'd'$ sont disposées de la même manière par rapport à ab et $a'b'$, et qu'on a en outre

$$\frac{ab}{cd} = \frac{a'b'}{c'd'}.$$

Si nous construisons comme sur la figure 1 les points μ, μ_1 relatifs à ces droites, nous constatons tout d'abord qu'ils sont placés du même côté de α; et comme on a aussi

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{\mu a_1}{\mu a'}, \quad \frac{cd}{c'd'} = \frac{\mu_1 c_1}{\mu_1 c'},$$

il s'ensuit

$$\frac{\mu a_1}{\mu a'} = \frac{\mu_1 c_1}{\mu c'};$$

donc $\mu\mu_1$ est perpendiculaire sur LT.

V. *Mener par un point* (o, o') *la parallèle à la ligne de profil* $(ab, a'b')$. Si (o, o') n'est pas dans le plan de profil α, il suffit de construire les deux parallèlogrammes $abom$, $a'b'o'm'$, de sorte que om et $o'm'$ soient dirigés, par exemple, comme ab et $a'b'$; la droite OM résout la question, et on a même OM = AB.

Si (o, o') est dans le plan du profil α (et aussi dans le cas précédent) on prendra sur la ligne de rappel $(om, o'm')$ respectivement égales à $(ab, a'b')$ et dans le même sens que ces lignes; on peut aussi mener par un point quelconque (p, p') de l'espace la parallèle $(pn, p'n')$ à AB, puis par (o, o') la parallèle $(om, o'm')$ à PN.

VI. *Construire le point d'intersection d'une droite de profil* $(ab, a'b')$ *avec un plan.* On fait passer par la droite un plan quelconque en joignant les points AB à un point O de l'espace; on fait couper le plan OAB avec le plan donné; l'intersection PQ de ces deux plans coupe AB au point cherché M.

VII. *Construire les perpendiculaires abaissées du point* (a, a') *sur les plans bissecteurs.* Il est aisé de démontrer que, étant données les projections a, a' du point A, son symétrique B par rapport au premier plan bissecteur a pour projections, b symétrique de a', et b', symétrique de a, par rapport à LT; son symétrique C par rapport au deuxième plan bissecteur a pour projections : c qui coïncide avec a', et c' qui coïncide avec a. AB est donc la perpendiculaire au premier plan bissectenr, AC est la perpendiculaire au second. Les distances du point A à ces deux plans sont les moitiés respectives de AB et AC, ou bien elles sont égales à $\frac{1}{2} ab\sqrt{2}$ et $\frac{1}{2} ac\sqrt{2}$.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

par M. F. Pisani, professeur à Reggio.

1. Le centre A d'un cercle de rayon constant r glisse sur une droite fixe OX. Trouver le lieu du pôle P d'une droite fixe OZ.

Identifier les équations

$$y = mx, \quad (x - \alpha)(x' - \alpha) + yy' = r^2,$$

et éliminer α entre les égalités de conditions. P décrit une hyperbole.

Si l'on prend pour axes OX et une perpendiculaire OY à OZ, l'équation du lieu est, visiblement, $y(y - mx) = r^2$.

2. Lieu du pôle P d'une droite fixe par rapport aux cercles doublement tangents à une parabole.

Le centre d'un cercle bitangent aux points $(x', y')(x', -y')$ a pour coordonnées $(p + x', 0)$; le rayon égale $\sqrt{p^2 + y'^2}$; d'où l'équation du cercle :

$$x^2 + y^2 - 2(p + x')x + x'^2 = 0.$$

L'équation de d étant $mx + ny - 1 = 0$, celle du lieu de P est

$$mnxy + m^2y^2 - n^2px - n(mp + 1)y - n^2p^2 = 0.$$

Les polaires d'un point (x', y') par rapport aux cercles des deux questions précédentes ont pour équations

$$(x + x')^2 - 4(xx' + yy' - r^2) = 0,$$
$$(x + x')^2 - 4[(x' - p)x + y'y - px'] = 0.$$

3. Soient AB un diamètre fixe d'un cercle, CD une corde variable, parallèle à AB. Lieu du pôle P d'une droite fixe d par rapport à la parabole passant par les points A, B, C, D.

Équation de la parabole

$$x^2 + y^2 - r^2 + ky(y - c) = 0, \quad \text{ou} \quad x^2 + cy - r^2 = 0.$$

Celle de d étant $mx + ny - 1 = 0$, le lieu de P est représenté par $mxy + x - mr^2 = 0$. La polaire d'un point donné (x', y') passe par un point fixe $\left(\frac{2r^2}{x'}, \ -y'\right)$.

4. Soient AB un diamètre fixe d'un cercle, CD une corde variable, parallèle à AB, C′ et D′ les projections de C et D sur AB. Lieu du pôle P d'une droite fixe d par rapport à l'ellipse circonscrite au rectangle CDD′C′, et semblable à une ellipse donnée.

Coordonnées de C $(2x', 2y')$; équations de d et de l'ellipse CDD′C′ (k variable)

$$mx + ny - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - y')^2}{b^2} = k^2, \tag{1}$$

avec les conditions

$$4(x'^2 + y'^2) = r^2, \quad \frac{4x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = k^2,$$

qui donnent à (1) la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 - 2yy'}{b^2} = \frac{r^2 - 4y'^2}{a^2},$$

où y' est le seul paramètre variable. — Équation du lieu cherché

$$mY^2\left(\frac{a^2}{b^2} - 4\right) + nXY\left(\frac{8b^2}{a^2} - 1\right) - \frac{4b^4n^2}{a^4m}X^2 - X + mr^2 = 0.$$

5. On mène par le sommet A d'un triangle ABC les droites arbitraires AD, AD_1, AD_2, ···, AD_{n-1}, rencontrant BC en D, D_1, D_2, ···, D_{n-1}. Soient r, r_1, r_2, ··· r_n les rayons des cercles inscrits aux triangles

$$ABC, \quad ABD, \quad D_1BD_2, \quad D_2BD_3, \quad \cdots, \quad D_{n-1}AC.$$

Démontrer la relation

$$(h - 2r_1)(h - 2r_2) \cdots (h - 2r_n) = h^{n-1}(h - 2r).$$

(Comparer *Mathesis*, t. VI, pp. 96 et 237.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

18. ***Interprétation géométrique du système d'équations***

$$\frac{x^2 - yz}{X} = \frac{y^2 - zx}{Y} = \frac{z^2 - xy}{Z}, \tag{1}$$

par **M. M'Cay**, *professeur au Trinity College* (Dublin). Ce système donne (*Mathesis*, t. VI, p. 24)

$$\frac{X^2 - YZ}{x} = \frac{Y^2 - ZX}{y} = \frac{Z^2 - XY}{z}. \tag{2}$$

Considérons (x, y, z) et (X, Y, Z) comme étant les coordonnées de deux points p et P par rapport à un triangle de référence quelconque ABC, et soit O le point qui correspond à $x = y = z$.

D'après les relations (1), à tout point p correspond un point unique P. Mais, pour que tout point donné P n'ait qu'un seul homologue p, il faut et il suffit que les coniques représentées par les équations (voir *Mathesis*, t. VII, p. 110)

$$x^2 - yz = 0, \quad y^2 - zx = 0, \quad z^2 - xy = 0, \tag{3}$$

aient trois points communs; on trouve aisément que le système (3) a les trois solutions

$$x = y = z, \quad x : y : z = 1 : \theta : \theta^2, \quad x : y : z = 1 : \theta^2 : \theta,$$

θ étant une racine cubique imaginaire de l'unité. Ces solutions définissent le point réel O et deux points imaginaires I et J, situés sur la droite réelle $x + y + z = 0$. Par conséquent, les points p et P satisfont à une

transformation quadratique birationnelle, ayant pour points fondamentaux les points O, I, J.

On vérifie facilement que les points O, p, P sont en ligne droite et que les points p, P sont toujours harmoniques par rapport à la conique

$$yz + zx + xy = 0.$$

En effet, ces propriétés sont exprimées par les équations

$$\begin{vmatrix} x & X & 1 \\ y & Y & 1 \\ z & Z & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$yZ + zY + zX + xZ + xY + yX = 0,$$

qui se changent en identités quand on remplace X, Y, Z par $x^2 - yz$, $y^2 - zx$, $z^2 - xy$.

Lorsque (x, y, z), (X, Y, Z) sont des coordonnées normales par rapport à un triangle équilatéral, les points p, P sont situés sur un même diamètre du cercle ABC et l'on a $Op.OP = R^2$, c'est-à-dire p et P sont des points inverses par rapport au cercle ABC.

Quel que soit le triangle de référence ABC, la relation entre les points p et P est réversible (involutive) : donc les formules (1) ont pour conséquence les égalités (2).

BIBLIOGRAPHIE.

Traité d'Arithmétique élémentaire, à l'usage des élèves des cours professionnels, des candidats aux écoles spéciales des universités et à l'école militaire de Bruxelles, par l'abbé E. Gelin, Dr S. Th. et Ph., professeur de mathématiques supérieures au collège S. Quirin à Huy (Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique et adopté par le conseil de perfectionnement de l'enseignement moyen pour les classes supérieures de la section scientifique des athénées). Cinquième édition. Namur, Wesmael; Huy, chez l'auteur; 1888. Un vol. in-8° de VII-408 p. Prix : 5 francs.

Nouvelle édition de cet excellent ouvrage dont nous avons publié un compte rendu détaillé dans le premier supplément du Tome VI de *Mathesis*. L'auteur a introduit dans son livre un assez bon nombre d'additions et de modifications. Nous signalons rapidement les principales : 1° Définition du quotient de deux nombres à une unité près d'un ordre décimal donné 2° Note sur la définition des nombres incommensurables, d'après Dedekind (avec une petite remarque critique qui ne nous semble pas juste). 3° Démonstration du théorème $\log(ab) = \log a + \log b$.

4° Usage de la règle logarithmique (il aurait été utile de faire observer que l'on a donné récemment à cet instrument la forme d'une montre). 5° Calendrier perpétuel de M. Ed. Lucas. 6° Théorie de la monnaie, comme dans l'appendice publié en supplément à *Mathesis* en janvier 1888. 7° Additions au chapitre relatif aux partages proportionnels. 8° Applications de la méthode des parties aliquotes au calcul de l'intérêt. 8° Notions sur les opérations de bourse. 9° Méthode de résolution des problèmes par réduction aux mêmes coefficients (au fond, procédé de résolution de deux équations à deux inconnues) et par fausse position. L'auteur a aussi retouché la théorie des fractions périodiques, en rapprochant plus que dans l'édition précédente, la recherche de la limite de la fraction décimale ayant un nombre croissant de périodes, de celle de la génératrice de cette fraction.

Précis d'Arithmétique, à l'usage des écoles moyennes, des cours professionnels, des écoles normales et des classes d'humanités, par l'abbé E. Gelin, etc. (Ouvrage adopté par le conseil de perfectionnement, etc.). Deuxième édition, rédigée d'après un plan entièrement nouveau. Namur, Wesmael; Huy, chez l'auteur. 1888. Un vol. in-8° de 272 pages. Prix : 3 fr.

La nouvelle édition du *Précis* de M. l'abbé Gelin diffère de la précédente principalement en deux points : 1° L'ouvrage est rédigé sur un plan nouveau, plus conforme à l'ordre ordinairement suivi dans la pratique de l'enseignement : ainsi l'auteur a réuni en un livre spécial tout ce qui se rapporte aux puissances et aux racines, au lieu de distribuer ces matières à leur place logique; les livres consacrés aux mesures et à la résolution des problèmes viennent immédiatement après la théorie des nombres décimaux; les questions relatives aux partages proportionnels et à l'intérêt composé sont placées respectivement à la fin des livres qui traitent des proportions et des logarithmes. 2° Pour alléger et compléter en même temps les autres livres, M. Gelin a réuni dans un appendice intitulé *Compléments d'Arithmétique*, les sujets suivants : Division par les compléments, multiplication abrégée, recherche de l'exposant, nombre et nature des opérations arithmétiques, preuve par neuf, nombres premiers entre eux, moindre multiple; mesures anciennes de Belgique et de France; méthode des parties aliquotes; problèmes divers.

Le nouveau *Précis* n'a pas la belle ordonnance logique de l'ancien; mais au point de vue pratique, il lui est de beaucoup supérieur et nous ne doutons pas qu'il ne soit mieux accueilli encore par les professeurs et les élèves.

Premières notions d'algèbre, par C. Bergmans, Dr Math., professeur à l'Athénée royal de Gand, etc. (avec texte flamand en regard du texte français). Gand. Hoste, 1889. (Un vol. in-12, cartonné de 104 pages.). Prix : 1,25 fr.

Sommaire : I. 1. Définitions préliminaires (égalité, équation numérique). 2. Mise en équation des problèmes (du premier degré à une inconnue). 3. Résolution des équations. II. Généralisation de la théorie des nombres (propriétés élémentaires). III. Formules (intérêt, escompte, partages, mélanges). IV. Calcul algébrique

(jusqu'à la division, exposée sans démonstration). Définition de l'algèbre. *Appendice.* Étude complète des proportions.

Comme on le voit, l'auteur emploie la méthode historique dans l'enseignement des premières notions d'algèbre. Une longue expérience lui a prouvé que cette méthode est la meilleure pour initier les enfants à cette science, si abstraite et si difficile, quand on l'expose dans l'ordre logique. Autant que nous pouvons en juger, son petit livre atteindra complètement son but. Nous signalons spécialement aux jeunes professeurs le procédé exposé dans le chapitre I, pour apprendre aux enfants la mise en équation des problèmes, c'est-à-dire ce qu'il est certainement le plus difficile de leur enseigner d'une manière systématique. La page est divisée en deux colonnes : dans l'une, l'auteur indique la suite des opérations et des raisonnements à faire pour examiner si un nombre choisi au hasard est une solution de la question; en regard, le même essai est fait avec l'inconnue x, dans les mêmes termes, de manière que l'élève est conduit, pas à pas, à l'équation du problème. Quatorze exemples gradués sont ainsi traités minutieusement. Le livre est rédigé conformément aux programmes officiels; il contient plus d'une centaine d'exercices intercalés dans le texte. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 355(*).

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 159 et t. VIII, p. 202.)

Construire une conique, connaissant trois tangentes a, b, c et la tangente d en l'un des sommets. (Montesano.)

Solution par M. Déprez. Un premier lieu du centre O de la conique est la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère *abcd*.

Pour en trouver un autre, désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les distances de O aux tangentes données, par λ, μ, ν les inclinaisons de a, b, c sur d. Appliquant la formule

$$p^2 = A^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi,$$

qui donne le carré de la distance du centre d'une conique à l'une de ses tangentes en fonction des demi-axes A, B et de l'inclinaison φ de la normale correspondante sur l'axe A, nous aurons

$$\alpha^2 = \delta^2 \cos^2 \lambda + B^2 \sin^2 \lambda, \quad \beta^2 = \delta^2 \cos^2 \mu + B^2 \sin^2 \mu,$$
$$\gamma^2 = \delta^2 \cos^2 \nu + B^2 \sin^2 \nu. \qquad (1)$$

(*) Cette solution nous a été adressée le 28 juillet 1888.

Si nous éliminons δ et B, il vient

$$\alpha^2 \sin(\mu+\nu)\sin(\mu-\nu)+\beta^2 \sin(\nu+\lambda)\sin(\nu-\lambda)$$
$$+\gamma^2 \sin(\lambda+\mu)\sin(\lambda-\mu)=0;$$

la conique représentée par cette équation est le lieu des centres des courbes du second ordre qui touchent a, b, c et dont l'un des axes est parallèle à d.

Si l'on élimine B entre les deux premières équations (1), on trouve

$$\alpha^2 \sin^2\mu-\beta^2 \sin^2\lambda+\delta^2 \sin(\lambda+\mu)\sin(\lambda-\mu)=0.$$

On conclut de là que les centres des courbes du second ordre inscrites au triangle abd et ayant un sommet sur d sont situés sur une hyperbole équilatère conjuguée avec le triangle et passant par les centres des quatre cercles qui touchent a, b, d; les tangentes menées à cette hyperbole par le point d'intersection de a avec b sont la médiane du triangle abd et une parallèle à d; cette parallèle est même une asymptote.

Question 435.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 94.)

Soient DM, DM' *deux droites rectangulaires tangentes à une ellipse aux points* M, M'. *Chercher le maximum et le minimum des longueurs* DM, DM', *et déterminer les normales communes à l'ellipse et à sa développée.*

(H. Brocard.)

Solution par M. W. Mantel (La Haye). Soit P le point de rencontre des normales en M et M'; P est le centre instantané de rotation dans le mouvement de l'angle droit MDM' autour de l'ellipse. Faisons tourner cette figure d'un angle infiniment petit; si DM est maximum ou minimum, il sera égal à sa valeur voisine, de sorte que le point M n'aura pas cessé de se trouver sur l'ellipse et sur la tangente; la normale voisine de MP passe par P, et P est un point de la développée. On voit par là que les maxima et les minima des longueurs DM et DM' sont aussi les longueurs des normales communes à l'ellipse et à sa développée.

Il suffit de déterminer la position de P. Prenons pour axes de coordonnées les axes de l'ellipse. P étant sur la développée, nous pouvons poser pour ses coordonnées

$$x=\frac{c^2}{a}\cos^3\alpha, \quad y=\frac{c^2}{b}\sin^3\alpha.$$

Soit m le coefficient angulaire d'une normale; l'équation de cette normale sera

$$Y = mx \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{(a^2 + b^2 m^2)}}.$$

Substituons pour x et y les coordonnées de P; nous aurons pour déterminer m l'équation

$$(m^2b^2 + 2mab\,\mathrm{tg}\,\alpha + a^2\,\mathrm{tg}^2\alpha)\,(m^2b^2 - 2mab\,\mathrm{tg}\,\alpha[1 + \mathrm{tg}^2\alpha] + a^2\mathrm{tg}^4\alpha) = 0.$$

Il y a deux racines égales à $-\frac{a}{b}\mathrm{tg}\,\alpha$, correspondant à PM; l'une des autres racines doit être le coefficient angulaire de PM', donc le second facteur doit s'annuler pour $m = \frac{b}{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. La substitution conduit à l'équation

$$a^4\,\mathrm{tg}^6\,\alpha - 2a^2b^2\,\mathrm{tg}^4\,\alpha - 2a^2b^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + b^4 = 0.$$

On en tire

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{2b^2}{3a^2} - \frac{2b}{3a^2}(6a^2 + 4b^2)^{\frac{1}{2}} \sin\frac{1}{3}\left[\arcsin\frac{b(9a^2 + 16b^2)}{2(6a^2 + 4b^2)^{\frac{3}{2}}} + 2k\pi\right],$$

k étant un entier quelconque.

La construction des maxima et des minima de DM dépend de la trisection d'un angle et parait très compliquée.

Note. On peut présenter le raisonnement sous une forme un peu différente, mieux appropriée à d'autres questions du même genre.

Lorsqu'une droite MN *glisse* le long d'une courbe plane S, de manière que le point de contact M soit un point fixe de la droite, le centre instantané de rotation de son mouvement est le centre de courbure ω au point M de S. Il résulte de là qu'*un point* N, *fixe sur la droite, décrit une courbe* S' *telle que sa normale en* N *passe par* ω (*).

Soit MP le segment déterminé sur la droite mobile par S et une autre courbe donnée S''. Lorsque ce segment passe par un maximum ou un minimum, on peut le considérer comme restant invariable de cette position à la position infiniment voisine; donc la normale en P à S'' passe par le centre de courbure ω de S en M.

Dans la question 435, la courbe S'' est la circonférence orthoptique de l'ellipse.

(J. N.)

(*) M. Catalan propose, pour désigner la courbe (N), la dénomination de *pseudo-parallèle de* S. Lorsqu'il s'agit d'une ligne gauche S le plan normal à la pseudo-parallèle passe par l'axe du cercle osculateur correspondant de S (*Mélanges mathématiques*. Note CXXXIII).

×Question 626.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 240.)

Soit $\alpha+\beta+\gamma+\delta=(2n+1)\pi$. *Démontrer l'égalité des expressions suivantes :*

$(\sin\alpha\sin\beta+\sin\gamma\sin\delta)(\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin\delta)(\sin\alpha\sin\delta+\sin\beta\sin\gamma)$,
$(\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma\cos\delta)(\cos\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\delta)(\cos\alpha\cos\delta+\cos\beta\cos\gamma)$,
$\frac{1}{4}(-\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta)(\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta)(\cdots)(\cdots)$,
$\frac{1}{4}(-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta)(\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta)(\cdots)(\cdots)$,
$\frac{1}{16}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma+\sin 2\delta)^2$,
$\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2(\alpha+\gamma)\sin^2(\alpha+\delta)$. (Wolstenholme.)

Solution par M. l'abbé E. Gelin. On a, en désignant les six expressions à considérer par A, B, C, D, E, F et en désignant par P un produit de facteurs analogues à ceux qui suivent ce signe,

1° $A = P(\sin\alpha\sin\beta+\sin\gamma\sin\delta)$
$= \frac{1}{16}P[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\gamma-\delta)-\cos(\gamma+\delta)]$
$= \frac{1}{16}P[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\gamma-\delta)]$
$= P\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma-\delta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta-\gamma+\delta)$
$= P\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta) = F.$

2° Pour l'expression B, même calcul que pour A.

3° $C = \frac{1}{4}P(-\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta)$
$= 4P[-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\delta)]$
$= 4P\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)[-\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\pm\cos\frac{1}{2}(\gamma-\delta)]$
$= 4P\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)[\pm\cos\frac{1}{2}(\gamma-\delta)-\cos\frac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)]$
$= \begin{cases} 64P\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{4}(\pi-\alpha+\beta+\gamma-\delta)\sin\frac{1}{4}(\pi-\alpha+\beta-\gamma+\delta) \\ 64P\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{4}(\pi-\alpha+\beta+\gamma-\delta)\cos\frac{1}{4}(\pi-\alpha+\beta-\gamma+\delta) \end{cases}$
$= 64P\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\delta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) = F.$

4° Pour l'expression D, même calcul que pour C.

5° $E = \frac{1}{16}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma+\sin 2\delta)^2$
$= \frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\gamma+\delta)\cos(\gamma-\delta)]^2$
$= \frac{1}{4}\sin^2(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\gamma-\delta)]^2$
$= \sin^2(\alpha+\beta)\sin^2(\alpha+\gamma)\sin^2(\alpha+\delta) = F.$

Cette question a été résolue de la même manière par MM. C. J. François (La Haye) et Dépaz (Dinant).

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**356.** (*Mathesis*, t. IV, p. 159). Soit $S_{n,p}$ la somme des produits p à p des n premiers nombres entiers. Démontrer la relation

$$\sum_{i=0}^{i=p} C_{n+1,\alpha+i} S_{\alpha+i-1,i} \cdot S_{n-\alpha-i,p-i} = C_{n-p+1,\alpha} S_{n,p}. \quad \text{(E. Cesáro.)}$$

×**357.** (*Mathesis*, t. IV, p. 159). Dans le développement de

$$\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots\right)^m$$

le coefficient de x^p est

$$\frac{S_{m+p-1,p}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+p)} \quad \text{(E. Cesáro.)}$$

×**358.** (*Mathesis*, t. IV, p. 231). On partage une demi-circonférence en n parties égales, et l'on joint les points de division à l'une des extrémités de la demi-circonférence. Démontrer que la somme des produits p à p des carrés des cordes, ainsi obtenues, égale autant de fois la $2p^{ième}$ puissance du rayon, qu'il y a de manières de combiner $2n-p-1$ objets, p à p(*). (E. Cesáro.)

×**384** (*Mathesis*, t. IV, p. 231). Si α est la $n^{ième}$ partie d'un quadrant, on a

$$\sin^{2p}\alpha+\sin^{2p}2\alpha+\sin^{2p}3\alpha+\cdots+\sin^{2p}n\alpha=\tfrac{1}{2}+n.\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p},$$

pourvu que $p<2n$(**). (E. Cesáro.)

385. (*Mathesis*, t. IV, p. 231). Soit $p_r=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^r)$. Démontrer l'identité

$$\frac{1}{p_n}-\frac{x}{p_1p_{n-1}}+\frac{x^3}{p_2p_{n-2}}-\cdots\pm\frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{p_n}=1. \quad \text{(E. Cesáro.)}$$

(*) Voir Question 262, *proposée*, t. III, p. 160 résolue, t. IV, p. 41.

(**) Pour n indéfiniment croissant, on obtient, sans recourir au Calcul Intégral, la valeur de $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2p}x.dx$.

*386. (*Mathesis*, t. IV, p. 231). Démontrer l'identité

$$1 - C_{2n,1}^{2} + C_{2n,2}^{2} - C_{2n,3}^{2} + \cdots + 1 = (-1)^n C_{2n,n}.$$

(E. Cesáro.)

387. (*Mathesis*, t. IV, p. 231). Ayant posé

$$u_p = \frac{\sin 2nx \cdot \sin(2n-1)x \cdot \ldots \sin(2n-p+1)x}{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \ldots \sin px},$$

on a

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \cdots = -1.9.25\ldots(2n-1)^2$$

si v_p est le coefficient de x^{2n} dans le développement de u_p. (E. Cesáro.)

*388. On donne un cercle O, deux diamètres rectangulaires OX, OY, et une perpendiculaire CL en un point C de OX. La tangente menée au point P de la circonférence rencontre OX en A, OY en B; la perpendiculaire élevée en A sur AB coupe CL en R. Démontrer que le lieu géométrique du point d'intersection des droites OP, BR est la circonférence décrite sur OC comme diamètre. (Mandart.)

389. Dans tout triangle ABC,

$$c^n - n a b c^{n-2} \cos(A-B) + \frac{n(n-3)}{1.2} a^2 b^2 c^{n-4} \cos 2(A-B)$$

$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} a^3 b^3 c^{n-6} \cos 3(A-B) + \cdots = a^n \cos nB + b^n \cos nA.$$

(Brill.)

*390. Si m est un nombre entier, on a

$$\frac{1.3.5\ldots(2m+1)}{2.4.6\ldots(2m+2)} = \frac{1}{2} - m \cdot \frac{1}{2.4} + \frac{m(m-1)}{1.2} \cdot \frac{1.3}{2.4.6} - \cdots;$$

$$\frac{2.4.6\ldots 2m}{3.5.7\ldots(2m+1)} = 1 - m \cdot \frac{1}{3} + \frac{m(m-1)}{1.2} \cdot \frac{1}{5} - \cdots \quad \text{(Cl. Servais.)}$$

*391. 1° Si deux triangles ABC, A'B'C' sont doublement orthologiques, ils le sont triplement.

2° Construire deux triangles ABC, A'B'C' qui soient triplement homologiques et triplement orthologiques.

Nous disons que ABC et A'B'C' sont *orthologiques*, si les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur B'C', C'A', A'B' (ou sur C'A', A'B', B'C', ou encore sur

A'B', B'C', C'A') concourent en un même point; on sait qu'alors les perpendiculaires abaissées de A', B', C' sur BC, CA, AB concourent également. (E. Lemoine.)

Sur les triangles qui admettent plusieurs centres d'homologie, on peut consulter : *Mathematische Annalen*, t. II, pp. 540 et 553 (Rosanes, Schröter); *Archives de Grunert*, t. LXX, p. 105 (Valyi); *Mathesis*, t. III, p. 226; J. M. S., 1887, p. 103 (Rogier).

M. Lemoine considère des *triangles circulairement homologiques* : ABC est homologique avec A'B'C', B'C'A', C'A'B'. (J. N.)

636. Si A, B sont des points fixes, P, Q des points variables de la droite AB, mais tels que PQ est de grandeur constante, deux cercles décrits des centres P, Q et passant respectivement par A, B, se rencontrent en un point R, dont le lieu est une ellipse. (R. W. Genese.)

***637.** Les n premiers nombres sont dans une urne. On en tire au hasard trois. Quelle est la probabilité que l'un des nombres extraits est égal à la somme des deux autres ou égal à leur demi-somme.

(de Rocquigny.)

638. On divise un arc de cercle AB, de rayon égal à l'unité, en m parties égales AC, CD, etc. Sur la corde AC, on construit un triangle ACG, semblable à un triangle donné. Trouver la limite de $\overline{OG}^m$, lorsque m croît indéfiniment.

639. Les coniques issues de P, osculant en un point Q une même ligne, ont leurs centres sur une conique dont le centre est aux trois quarts de PQ. (E. Cesàro.)

***640.** En un point quelconque de la base BC d'un triangle isoscèle ABC, on élève une perpendiculaire, qui rencontre AC en D, AB en E. Étudier géométriquement le lieu du point de rencontre des droites BD, CD. (G. Russo.)

Rectifications.

Questions d'examen. 1° 370, p. 147, au lieu de tang 82°50', lire tang 82°30'; 2° 354, p. 55, lire : joignant C au point d'intersection de la hauteur AH avec la médiatrice de AC rencontre, etc.

Questions proposées. 1° 628, p. 240, ligne 3, lire ON au lieu de OX; 2° 631, p. 262, ligne 4, lire Bözóky au lieu de Bözóby.

TABLE DES MATIÈRES(*).

(Pour les rectifications, voir pages 28, 44, 94, 104, 166, 176, 280.)

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

×Sur les nombres parfaits; par MM. Sylvester, Servais, Catalan .57, 92, 113, 135
Sur un théorème de M. Oltramare, par MM. E. Cesáro et E. Catalan . . . 129
×Sur un problème de Léonard de Pise; par M. E. Fauquembergue. . . . 135
×Questions d'arithmologie 157, 192
×Sur un théorème de MM. Laisant et Beaujeux (J. N.) 227
Question 459; solution par M. Fauquembergue 21
Question 503; solution par M. Fauquembergue 75
×Question 600; solution par MM. Brocard, E. Gelin, etc. 103
×Question 595; solution par MM. Brasseur, Emmerich, etc. 145
×Question 612; solution par MM. Beyens, Bruyr, etc 213
×Question 242; solution par M. Laisant. 252

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Sur le maximum du produit de plusieurs facteurs positifs dont la somme est constante; d'après MM. Darboux, Goursat, etc. 10, 69
×Note d'Algèbre; par M. Verniory 13
×Essai d'une nouvelle théorie élémentaire des logarithmes; d'après M. V. Jamet; note de M. Lefrançois 40, 89, 158
×Questions de Géométrie et de Trigonométrie 133
×Théorème sur les maxima et minima; par M. E. Gelin 246
×Question 554; solutions par MM. Emmerich, Beyens, etc. 22
Question 585; solution par MM. Beyens, Déprez, etc. 25
×Question 545; solution par MM. Beyens, Déprez, etc. 52
×Question 580; solutions par MM. Beyens, Falisse, etc. 54
×Question 588; solution par MM. Beyens et Déprez. 78

(*) On a renvoyé, pour chaque question traitée, à tous les passages où l'on s'occupe de cette question. Plusieurs articles sont indiqués dans deux ou trois subdivisions de la table des matières. Les articles marqués d'une croix n'exigent, pour être compris, que la connaissance des mathématiques élémentaires. (P. M.)

Pages.

Question 589; solution par M. Emmerich 102
Question 323; solution par MM. Neuberg et Mosnat 116
Question 562; solution par M. Stuyvaert 124
Question 602; solution par MM. Mosnat, Pisani, etc. 147
Question 493; solution par M. E. Gelin 172
Question 3; solutions par MM. Van den Broeck et P. Mansion 195
Question 591; solution par MM. Emmerich et G. Russo 209
Question 607; solution par MM. François, Déprez 211
Question 626; solution par M. E. Gelin 277
Solution de la question d'algèbre de l'école normale (1888); par M. V. Jamet . 228

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE; GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Sur les aires de quelques triangles; par M. Barbarin 15
Conséquences du théorème de Stewart; d'après M. Simart et par M. Thiry. 17, 93
Théorème sur les transversales; par MM. Laurens et Neuberg 17, 69
Questions de géométrie. 39
Note sur les points complémentaires; par M. d'Ocagne 62
Exercices sur les cercles tangents; par M. J. Déprez. 91
A propos d'une note récente sur le triangle; par M. d'Ocagne 131
Questions de géométrie et de trigonométrie. 133
Sur la mesure de la simplicité dans les constructions mathématiques; par M. E. Lemoine. 217, 241
Moment d'inertie du triangle (P. M.). 227
Sur quelques espèces particulières de triangles; d'après Reuschle (J. N.). . 245
Question 577; solution par M. Emmerich 24
Question 545; solutions par MM. Beyens, Déprez, etc. 52
Question 559; solution par MM. Campbell et Emmerich. 53
Question 580; solutions par MM. Beyens, Falisse, etc. 54
Question 472; solutions par MM. Farisano, Déprez, etc.. 73
Question 578; solution par MM. Gerondal, Meurice, etc. 77
Question 588; solution par M. Emmerich 102
Question 592; solution par MM. Emmerich, Beyens, etc. 103
Question 586; solution par MM. Thiry, Meurice, etc. 127
Question 456; solutions par MM. Jeřábek et Verniory 139
Question 596; solution par MM. Déprez, Molenbroek, etc. 146
Question 34; solution par M. Droz 166
Question 537; solution par M. Lemoine. 173
Question 206; solutions par MM. Laurens, Beyens, etc. 204
Question 604; solution par MM. Droz, François, etc.. 209
Question 498; solution par M. Victor Jamet 232
Question 608; solution par M. Déprez 237

Problèmes sur la droite de profil; par M. Barbarin 265

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

Pages.

Théorèmes sur la parabole; par M. Bergmans 63
Sur l'hyperbole inverse de la droite d'Euler; par MM. Jeřábek, Neuberg et Fuhrmann 81, 115
Sur les normales à la parabole; par M. d'Ocagne 94
Sur les normales aux coniques; par M. de Longchamps 110
Questions de géométrie analytique; par M. Thiry 189
Détermination en grandeur et en direction, des axes d'une section diamétrale de l'ellipsoïde; par M. Ph. Gilbert. 247
Questions de géométrie analytique; par M. F. Pisani. 269
Interprétation géométrique d'un système d'équations; par M. M'Cay . . . 271
Question 410; solutions par MM. Jeřábek, Déprez, etc. 18
Question 445; solutions par MM. Jeřábek, Mosnat, etc. 47
Question 454; solutions par MM. Meurice et Van Dorsten 50
Question 433; solutions par MM. S. B., Mosnat, etc. 71
Question 472; solutions par MM. Farisano, Déprez, etc. 73
Question 452; solutions par MM. Gob, Meurice, etc. 95
Question 491; solution par M. Mosnat 97
Question 539; solution par M. Boedt. 99
Question 446; solutions par MM. Gob, Meurice, etc. 119
Question 564; solution par M. Emmerich 126
Question 490; solutions par MM. Brocard et Boubals. 170
Question 355; solutions par MM. Mantel et Déprez 202, 274
Question 473; solutions par MM. Déprez et Schoute 203
Question 206; solutions de MM. Laurens, Beyens, etc. 204
Question 396; solution par M. Déprez 231
Question 563; solution par M. Ed. Lucas 233
Question 606; solutions par MM. Brocard et Pisani 259
Composition de l'école polytechnique en 1888 (J. N.) 162, 226

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Sur une trisectrice remarquable; par M. de Longchamps 5
Applications de la quasi-inversion linéaire aux courbes osculatrices; par M. Cl. Servais 28
Sur la théorie des transformations; par M. Cl. Servais 105
Sur les transformations quadratiques involutives; par M. J. Neuberg . . . 177
Question 405; solution par M. Brocard, Déprez, etc. 45
Question 433; solutions par MM. S. B., Mosnat, etc. 71
Question 452; solutions par MM. Gob, Meurice, etc. 95
Question 539; solution par M. Boedt 99
Question 446; solutions par MM. Gob, Meurice, etc. 119
Question 462; solution par MM. Brocard, Pisani, etc. 121
Question 546; solution par MM. Derousseau, Déprez, etc. 122

Pages.
Question 463; solutions par MM. Pisani et Brocard 143
Question 603; solutions par MM. de Longchamps, Brocard, etc. . . . 164, 224
Question 209; solution par M. Brocard 167
Question 428; solutions par MM. Gob, Verniory, etc. 254
Question 535; solutions par MM. Minoliti, Verniory, etc. 258
Question 435; solution par M. Mantel 275

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

Développantes du point; par M. E. Cesàro 86
Question de licence; par M. H. Brocard 130
×Méthode des infiniments petits (P. M.) 149
Moments d'inertie du triangle et du tétraèdre; par MM. E. Cesàro et Mansion . 183, 227
Sur le théorème de Viviani; par M. E. Wasteels 186
Sur la longueur d'une courbe (P. M.). 262
Question 325; solutions par MM. Mineur et d'Ocagne 70
Question 440; solution par M. Meurice 117
Question 208; solution par M. Mantel 208

BIBLIOGRAPHIE; VARIÉTÉS.

Note sur le supplément : *le Monnaie*. 16
Faifofer. Aritmetica 44
Verhelst. Questions mathématiques 68
Koehler. Exercices de géométrie analytique, etc. (J. N.) 113
Milne. Companion to the Weekly Problem Papers (J. N.) 114, 249
Casey. Plane Trigonometry (J. N.) 114, 222
Henin. Sections coniques (J. N.). 136
Guimaraes. Arcos ellipticos (Cl. S.) 137
Hanumanta Rau. First Lessons in Geometry (P. M.). 138
Faifofer. Geometria (P. M.) 138
Gelin. Trigonométrie (J. N.) 138, 223
Annuaire scientifique du cercle des normaliens (P. M et J. N.) 159
Casey. A sequel to Euclid (P. M.) 252
Gelin. Traité d'Arithmétique (P. M.) 272
Gelin. Précis d'Arithmétique (P. M.) 273
Bergmans. Premières notions d'algèbre (P. M.) 274

SUPPLÉMENTS.

E. Gelin. La Monnaie 1-16
C. Le Paige et Fr. Deruyts. Sur les théorèmes fondamentaux de la géométrie projective 1-15

Pages.

E. Gelin. Calcul des lignes trigonométriques des arcs du premier quadrant de trois en trois degrés 1-7

E. Gelin. Questions diverses de trigonométrie 1-15

E. Gordseels. De la longueur d'une courbe 1-13

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions d'examen (351 à 385) . . 20, 55, 79, 104, 127, 147, 175, 214, 229, 260

Ecole polytechnique (juin 1888) 162, 226

Ecole normale supérieure ; question d'algèbre par M. V. Jamet 228

QUESTIONS (*).

	POSÉE T. I (ou VIII)	RÉSOL. T. VIII, p.
3	12 (27)	195
17	30 (27)	
26	48	R
32	62 (56)	R
×34	62 (56)	166
95	206 (80)	
T. II (ou VIII)		
119	71	R
120	71 (80)	
160	159	R
162	159	R
195	231 (104)	
196	231 (148)	R
T. III (ou VIII)		
×203	23	R
206	23 (148)	
209	24	167
×242	95 (148)	252
×243	118 (148)	R
252	143 (176)	
267	175, 192 (176)	
273	192 (215)	
×281	216 (216)	R
283	231 (261)	
293	232	
294	248	R
296	248	R
T. IV (ou VIII)		
310	48	R
317	71 (261)	R

	POSÉE T. IV (ou VIII)	RÉSOL. T. VIII, p.
×318	71 (262)	R
323	94	116
325	94	70
×333	119 (262)	
×346	143	R
353	159	R
×355	159, 202, 274	
×356	159 (278)	
×357	159 (278)	
×383	231 (278)	
×384	231 (278)	
×385	231 (279)	
×386	231 (279)	
387, 2°	231 (279)	
390	247	R
391	247	R
394	247	R
396	248	231
T. V		
402	22	R
405	22	45
410	22	18
411	23	
412	23	
414	46	34
415	46	34
416	46	R
418	47	
428	70	254
429	94	R
430	94	170
433	94	71

	POSÉE T. V	RÉSOL. T. VIII, p.
435	94	275
436	94	R
439	119	R
440	119	117
445	143	47
446	144	119
452	167	95
454	167	50
455	167	R
×456	167	139
457	192	R
459	192	21
462	192	121
463	192	143
472	215	73
473	238	203
490	264	R
491	264	97
493	280	172
494	280	R
497	280	
×498	280	232
T. VI		
503	23	75
×504	23	204
505	23	R
508	47	R
509	47	R
×513	71	
517	96	R
519	119	
521	119	R

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions marquées de la lettre R; elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur les autres questions.

	POSÉE T. VI	RÉSOL. T. VIII, p.
522	144	R
525	144	R
531	192	208
532	192	
535	216	258
539	240	99
×543	264	R
×545	264	52
546	280	122
×548	280	R
×549	280	R
	T. VII	
552	24	R
×554	24	22
×557	56	173
558	56, 75	R
×559	56	53
×561	76, 87	R
×562	76	124
563	76	233
564	76	126
565	104	R
566	104	R
569	126	R
×571	126	
572	126	R
×574	148	
575	148	R
576	169	R
×577	170	24
×578	170	77
579	170	R
×580	206	54
581	207	R
×582	207	R
583	207	R
584	207	R
×585	207	25
×586	207	127
587	207	R
×588	240	78
×589	240	102
590	240	R
×591	240	209
×592	240	103
593	264	R
594	2?4	
×595	264	145
×596	264	146
597	280	
598	280	
×599	280	R
×600	280	103
	T. VIII	
×601	27	R
×602	28	147
603	28	164, 234
×604	56	209
×605 (2e p.ie)	56	
606	56	259
×607	80	211
×608	80	237
609	80	R
×610	104	
×611	104	R
×612	104	213
613	128	
×614	128	R
×615	128	
×616	148	R
×617	148	R
×618	149	R
×619	176	R
620	176	R
621	176	R
622	216	
×623	216	R
×624	216	R
×625	216	R
×626	240	277
×627	240	R
628	240	R
×629	240	R
×630	262	R
×631	262	R
×632	279	
633	279	
×634	279	
×635	279	
636	280	
×637	280	
638	280	
639	280	
×640	280	

TABLE DES NOMS.

Apollonius, 136, 160.
Baker, 53.
Barbarin, 15, 26, 116, 120, 137, 170, 239, 240, 254, 265
Barbelenet, 71, 226.
Barisien, 20.
Bastin, 172.
Beaujeux, 226.
Bérard, 169.
Bergmans, 63, 273.
Bernoulli, 176, 223
Bertrand (de l'Institut), 11, 117.
Beyens, 22, 25, 40, 52, 54, 77, 78, 102, 103, 146, 206, 213, 216.
Blondeel, 119, 120.
Bobillier, 24.
Boedt, 71, 73, 95, 96, 99, 258, 259.
Bonnet, 23, 54.
Boubals, 171, 172.
Bouquet, 222.
Boutin, 40.
Bézóky (de), 262.
Brasseur, 146.
Bretschneider, 238.
Brianchon, 136.
Brill, 102, 279.
Briot, 222.
Brisse, 230
Brocard, 23, 25, 40, 45, 54, 85, 103, 104, 115, 116, 121, 130, 133, 141, 144, 148, 167, 170, 172, 173, 203, 210, 213, 234, 236, 250, 259, 275.
Bruyr, 213, 260.
Cailler, 79.
Cambier, 26.
Campbell, 53.
Cantor, 133.
Casey, 86, 114, 222, 251, 268.
Catalan, 25, 28, 49, 80, 112, 127, 128, 129, 138, 147, 148, 154, 157, 176, 191, 192, 276, 279.
Cauchy, 149, 216.
Césaro (E), 36, 56, 75, 92, 103, 104, 129, 133, 148, 166, 167, 183, 208, 228, 232, 278, 280.
Choisis, 23, 173.
Clarke, 77.
Collin (Jules), 48.
Comberousse (de), 136, 220.
Convert, 210.
Côtes, 223.
Couturiaux, 126, 233.
Cremona, 1, 31, 33.
Cresswell, 250.
Darboux, 10.
Davis, 249.
Dawson, 78.
Dedekind, 272.
Demoulin, 52, 160, 161.
Denys, 147, 211.
Déprez, 20, 23, 25, 45, 49, 52, 54, 55, 56, 71, 73, 78, 80, 91, 96, 101, 102, 120, 121, 122, 127, 140, 146, 147, 148, 173, 174, 176, 203, 210, 211, 213, 231, 234, 236, 239, 258, 259, 274, 277.
Derousseau, 122, 124.
Deruyts (Fr.), 2e suppl.
Desboves, 69.
Dewulf, 31, 33, 34.
Dostor, 238.
Droz, 166, 210.
Duhamel, 151, 156, 157.
Elliot, 250.
Emmerich, 22, 24, 25, 53, 55, 77, 79, 102, 103, 104, 126, 127, 146, 210, 213.
Euclide, 61, 138, 252.
Euler, 22, 25, 58, 61, 81, 161, 216, 245.
Even, 70.
Fagnano, 137.
Faifofer, 44, 138.
Falisse (Fr.), 20, 26, 45, 48, 54, 169, 213.
Farisano, 48, 71, 74, 140.
Farkas, 27, 195.
Fauquembergue, 21, 75, 97, 135.
Fermat, 59, 226.
François, 210, 211, 213, 277.
Feuerbach, 249.
Frégier, 49.
Fuhrmann, 115.
Geiser, 136.
Gelin, 16, 18, 44, 48, 80, 103, 138, 172, 211, 212, 223, 246, 272, 273, 277; 1er, 3e et 4e supplément.
Genese, 249, 280.
Gergonne, 169, 241, 246.
Gerondal, 77, 78, 133, 134.
Gérono, 49.
Ghuys, 103, 127.
Gilbert (Ph.), 247, 264.
Gillet, 262.
Glashan 56.
Gob, 49, 73, 95, 99, 119, 122, 123, 159, 161, 254, 258.
Goedseels, 262, et 5e suppl.
Goursat, 10.
Graves, 22, 137.
Guimarães, 137.
Hart, 249.
Haton de la Goupillière, 10, 69.
Henin, 136.
Heyne, 25.
Hirst 109.
Hoekstra, 30.
Hudson, 147.

James, 258.
Jamet, 40, 89. 121, 143, 176, 184, 209, 228, 230, 232.
Jelábek, 18, 28, 48, 74, 81, 139, 164, 164, 165, 204, 234.
Jordan, 263.
Kiepert, 81, 85, 115, 207.
Knowles, 54.
Koehler, 113.
Kramp, 169.
Laisant, 28, 102, 213, 223, 226, 240, 253.
Langley, 249.
Lambotte, 23, 127.
Laurens, 17, 69, 204, 259.
Lebesgue, 112.
Lefrançois, 159.
Leibniz, 149.
Lemoine, 116, 128, 140, 141, 161, 173, 203, 204, 217, 226, 240, 241, 246, 250, 280.
Léonard de Pise, 135.
Le Paige, 2e suppl.
Lisleferme (de), 160.
Lhuilier, 250.
Longchamps (de), 5, 56, 110, 124, 160, 164, 177, 210, 236, 251.
Lucas (Éd.), 21, 61, 124, 176, 233.
M'Cay, 81, 85, 116, 262, 271.
Mac Cullagh, 137.
Malfatti, 223.
Mandart, 100, 104, 127, 140, 279.
Mannheim, 8, 71, 131.
Mansion, 11, 43, 137, 138, 149, 157, 161, 177, 202, 223, 228, 230, 252, 264, 274, et 5e supplément.
Mantel, 39, 202, 208, 275.
Menelaüs, 133
Meurice, 45, 50, 51, 55, 74, 77, 95, 104, 117, 119, 122, 127, 160.
Milne, 114, 240, 249.
Mineur, 18, 70, 127, 146, 159, 161, 258.
Minoliti, 258, 259.
Mister, 137, 188.
Moivre, 223.
Molenbroeck, 103, 146, 211.
Montesano, 202, 274.
Mosnat, 47, 71, 79, 96, 97, 103, 147.
Nagel, 141.
Neuberg, 17, 18, 24, 28, 47, 49, 50, 62, 69, 70, 81, 95, 103, 110, 111, 114, 116, 117, 119, 123, 128, 132, 137, 139, 140, 143, 144, 158, 161, 164, 177, 198, 203, 205, 206, 215, 216, 223, 225, 226, 227, 231, 238, 239, 246, 251, 252, 254, 257, 260, 261, 276, 280.
Newton, 136, 149.
Nicolaïdès, 9.
Ocagne (d'), 8, 9, 55, 62, 70, 94, 131, 149.
Oltramare, 129.
Pascal, 59, 101, 136.
Peaucellier, 131, 249.
Peirce, 148.
Peyrard, 154.
Pisani, 20, 95, 96, 121, 143, 147, 172, 259, 269.
Poilvache, 73.
Ramschundra, 250.
Rau (Hanumanta), 138.
Realis, 80, 261.
Reuschle, 246.
Rochetti, 25, 54.
Rocquigny (de), 45, 128, 145, 148, 158, 193, 194, 195, 216, 252, 258, 280.
Rogier, 280.
Rosanes, 280.
Rouché, 136, 220.
Rowe, 262.
Russo, 55, 258, 280.
Salmon, 30, 108, 144.
Saltel, 107.
Schoute, 94, 110, 203.
Schröter, 177, 205, 280.
Serret (J. A.), 223, 226.
Servais (Cl.), 28, 57, 58, 92, 105, 135, 137, 177, 206, 234, 279.
Simart, 17, 94.
Simmons, 114, 133, 249, 252.
Simson, 111.
Steiner, 50, 136, 173, 175, 177, 205, 250.
Stern, 58.
Sturm, 230.
Stuyvaert, 22, 45, 124.
Sylvester, 57.
Talbot, 137.
Tarry, 115, 252.
Taylor (H. M.), 251, 262.
Teach, 39.
Thiry (A.), 93, 127, 133, 160, 161, 189.
Tucker, 251.
Umpfenbach, 131.
Valyi, 280.
Van Aubel (H.), 40, 104.
Van den Broeck, 195.
Van Dorsten, 50.
Van Laer, 161.
Verhelst, 68.
Verniory, 13, 49, 71, 73, 74, 82, 96, 121, 122, 140, 172, 173, 174, 234, 254, 258, 259.
Viète, 223, 242.
Vigarié, 62, 85, 146.
Viviani, 186.
Vuibert, 35, 67, 192.
Wasteels (Éd.), 160, 161, 186.
Weierstrass, 264.
Weill, 18.
Willem, 161.
Wilson, 192, 226.
Wolstenholme, 113, 240, 277.
Zeuthen, 136.

LA MONNAIE

PAR

l'abbé E. GELIN

DOCTEUR EN PHILOSOPHIE ET EN THÉOLOGIE
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES AU COLLÉGE SAINT-QUIRIN A HUY

PARIS

LIBRAIRIE GUILLAUMIN & Cie

RUE RICHELIEU, 14

NAMUR

LIBRAIRIE A. WESMAEL-CHARLIER

RUE DE FER, 51

IMPRIMERIE POLLEUNIS, CEUTERICK ET LEFÉBURE
35, rue des Ursulines, Bruxelles.

LA MONNAIE

On appelle *monnaie* un objet que la loi a constitué *mesure commune de la valeur des choses* (1).

Les monnaies sont soit en métal précieux, or ou argent, soit en métal vil, cuivre, bronze ou nickel.

Pour diminuer le *frai* ou usure des monnaies d'or et d'argent (2), on les allie d'un peu de cuivre, et l'on appelle *titre* le rapport du poids de l'or ou de l'argent au poids total de l'alliage (3).

(1) M. V. Jacobs ajoute, d'après l'article 1142 du Code civil : *et moyen de se libérer de tous les engagements. (Le double étalon monétaire,* dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, première année, 2e partie, page 75.)

« Il est certain, dit Ch. Coquelin, que la monnaie remplit dans la pratique les fonctions de mesure de la valeur. C'est ainsi que, pour donner l'idée de la valeur d'une chose, on a coutume de la comparer à une quantité déterminée d'or ou d'argent. On la prend donc réellement pour une sorte d'étalon auquel toutes les autres richesses se rapportent. » *(Le crédit et les banques.)*

(2) Le frai des monnaies a lieu par voie mécanique ou par frottement, et non, comme quelques-uns l'ont pensé, par l'action de l'acide acétique, dû à la transpiration de la main, sur le cuivre des monnaies. (Feer-Herzog, *La France et ses alliés monétaires,* Paris 1870, page 92.)

Outre la raison de conservation et de dureté, la nécessité de l'alliage résulte aussi de l'extrême difficulté de la préparation de l'or pur. (Feer-Herzog, *op. cit.,* page 93.)

(3) Les alliages monétaires sont le plus souvent au titre de 0,9 ou de $\frac{11}{12}$.

L'alliage d'or au titre de 0,9 est des plus stables et des plus homogènes, comme s'écartant peu de la combinaison chimique Au^3Cu, à laquelle, — les poids atomiques de l'or et du cuivre étant respectivement 196,5 et 63,5, — correspond le titre $196{,}5 \times 3 : (196{,}5 \times 3 + 63{,}5) = 0{,}903$. (Levol, *Sur les alliages d'or et de cuivre,* dans les ANNALES DE CHIMIE, tome 39, page 170.) Il n'est nullement certain, comme on l'a quelquefois affirmé, que l'alliage au douzième soit préférable à l'alliage au dixième. (Feer-Herzog, *op. cit.,* page 95.)

On distingue les monnaies en *monnaies principales,* aussi appelées *monnaies pleines, monnaies de payement* ou *monnaies courantes,* et en *monnaies auxiliaires,* aussi appelées *monnaies divisionnaires, monnaies d'appoint* ou *billon.*

Il importe de bien saisir les caractères qui distinguent les monnaies principales des monnaies auxiliaires (1).

Les monnaies principales ont la valeur du métal, or ou argent, qu'elles contiennent. En le monnayant, on pèse et on titre le métal sous le contrôle de l'État, mais on n'ajoute ni ne retranche rien à sa valeur propre.

« En devenant monnaie, dit Condillac (2), les métaux n'ont pas cessé d'être marchandise ; ils ont une empreinte de plus et une nouvelle dénomination ; mais ils sont toujours ce qu'ils étaient, et ils n'auraient pas une valeur comme monnaie s'ils ne continuaient d'en avoir une comme marchandise. »

« Toute marchandise, dit Turgot (3), a les deux propriétés essentielles de la monnaie de mesurer et de représenter toute valeur, et, dans ce sens, toute marchandise est monnaie. Réciproquement, toute monnaie est essentiellement marchandise (4). »

Aussi *la frappe des monnaies principales est libre* dans la plupart des pays, c'est-à-dire que toute personne a le droit de porter aux hôtels des monnaies des lingots pour en obtenir des

(1) *Annales parlementaires de Belgique,* séance du 11 août 1885, discours de M. E. Pirmez.

(2) *Le commerce et le gouvernement considérés relativement l'un à l'autre,* livre I, chap. XIV.

(3) *Sur la formation et la distribution des richesses,* §§ 41 et 42.

(4) D'après l'avocat Dana Horton, délégué des États-Unis à la Conférence monétaire internationale de 1878, *la loi humaine est le facteur prépondérant dans le mouvement et dans la valeur des métaux précieux. (La monnaie et la loi,* Washington 1879, page 741, ou Paris 1881, page 8.) D'après le comte Rusconi, délégué de l'Italie à la même conférence, *la loi seule fait la monnaie.* « Le métal est une chose, dit-il, mais la monnaie en est une autre. *La nature fait le métal, la loi seule fait la monnaie.* Si le métal non monnayé est soumis comme marchandise à tous les accidents de l'offre et de la demande, le métal monnayé, — le cours légal étant donné, — a un prix qui ne varie pas. Dans la monnaie, la loi s'est en quelque sorte incarnée ; elle lui donne une force libératoire, une vertu, un prix que le métal marchandise ne saurait avoir. Donc, si le métal change de valeur, la pièce de monnaie n'en change pas : elle a réellement et effectivement la valeur que révèle son empreinte. » *Il est clair,* répond Feer-Herzog, délégué de la Suisse, *que cette manière de voir s'appliquerait aux anciennes pratiques des princes faux-monnayeurs et au papier-monnaie, et qu'elle suppose que le crédit de l'État domine tout événement, la confiance publique et les fluctuations du marché. (Rapport au Conseil fédéral suisse,* Berne 1878, page 54.)

monnaies principales, soit gratuitement, comme en Angleterre, soit moyennant une taxe fixe très légère, qui est touchée par l'entrepreneur du monnayage pour prix de son travail. Cette liberté de la frappe est le premier caractère des monnaies principales.

Le second caractère des monnaies principales, c'est *leur force libératoire illimitée.* On peut effectuer tout payement, à quelque somme qu'il s'élève, avec les monnaies principales.

Enfin, le troisième caractère des monnaies principales, c'est qu'elles n'entraînent pour l'État dont elles portent l'empreinte d'autre responsabilité que *la garantie de leur poids et de leur titre*, et nullement du maintien de la valeur du métal dont elles sont formées. Il serait absurde, en effet, qu'ouvrant son hôtel des monnaies à toute personne qui veut y faire monnayer des lingots, l'État prît l'obligation de garantir que ce métal, sujet, comme toute marchandise, aux fluctuations de l'offre et de la demande, ne subira pas de dépréciation, et qu'il s'engageât, s'il en survient, à échanger les monnaies fabriquées contre d'autres valant plus, ou à compenser de quelque autre manière la perte subie par les détenteurs de ces pièces.

Bien plus, l'État n'est pas même responsable de l'usure des monnaies, en sorte que, lorsqu'une pièce a perdu de son poids une certaine partie déterminée par la loi, elle peut être refusée, et la pièce reste au porteur, sans qu'il puisse forcer à la recevoir en payement (1).

Tout autres sont les caractères des *monnaies auxiliaires.* Ces monnaies, qui sont en métal vil, ou en métal précieux d'un titre ou d'un poids relativement faibles (2), *ont une valeur intrinsèque inférieure à leur valeur nominale.* Elles ne peuvent donc être livrées à la fabrication libre ; c'est l'État qui s'en réserve le monopole. Il n'en frappe toutefois qu'une quantité très limitée, de manière qu'elles ne puissent remplacer les monnaies à valeur pleine dans la circulation. De plus, la loi ne leur accorde qu'une force libératoire très restreinte. Elles ne peuvent servir, entre les citoyens de l'État qui les a émises, qu'à payer de faibles sommes, et c'est pour cette raison qu'on les appelle *monnaies d'appoint.* Enfin, l'État, qui, à son grand bénéfice (3), émet ces

(1) A la Banque d'Angleterre, si quelqu'un présente un souverain d'or qui n'ait plus le poids requis, on coupe la pièce et on lui en rend les morceaux.

(2) Cette réduction du titre ou du poids dans les monnaies auxiliaires a reçu le nom de *faiblage.*

(3) Si, par exemple, comme dans les pays de l'Union monétaire latine, les

monnaies pour une valeur nominale supérieure à leur valeur intrinsèque, en est entièrement responsable. Il est obligé de garantir leur valeur nominale, et, par suite, de les accepter en payement sans limitation de quantité, de les échanger même contre une égale valeur de monnaie principale, et, enfin, quand elles sont usées, de les retirer de la circulation, sans aucune perte pour les détenteurs.

D'après ce qui précède, *les monnaies principales seules sont des monnaies proprement dites*, c'est-à-dire pouvant servir de mesure commune de la valeur des choses, puisqu'elles seules ont la valeur du métal qu'elles contiennent et ont une force libératoire illimitée.

On appelle *étalon monétaire* le métal, or ou argent, avec lequel sont fabriquées les monnaies *principales*.

L'Angleterre, le Portugal, le Brésil, l'Allemagne, les États scandinaves, les Pays-Bas, le Japon, etc., ont l'étalon unique d'or.

La Russie et l'Empire indien ont l'étalon unique d'argent.

La France, la Belgique, l'Italie, la Suisse, la Grèce, l'Espagne, l'Autriche, la Roumanie, la Serbie, les États-Unis d'Amérique, la Colombie, le Vénézuéla, le Pérou, etc., ont le régime du double étalon.

On appelle *monométallisme* le système de l'étalon unique, or ou argent, et *bimétallisme* le système du double étalon, or et argent (1).

Le système du double étalon n'est pas rationnel (2); car, quand on veut constituer une mesure commune de la valeur des choses, c'est évidemment à une seule et même chose qu'il faut ramener toutes les autres. Deux métaux ne peuvent coexister comme mesures de la valeur des choses que grâce à un rapport légal établi entre eux. Or le rapport fixé par la loi est, dans la réalité, sujet à varier sans cesse, à cause de la différence de production et de consommation des deux métaux dans les diffé-

monnaies principales d'argent sont au titre de 0,900, et les monnaies divisionnaires au titre de 0,835, le bénéfice pour cent de l'État se monte à

$$100\left(1-\frac{0{,}835}{0{,}900}\right)=7\ \frac{2}{9}.$$

(1) Ces deux mots sont dus à M. Cernuschi, qui les a employés pour la première fois dans *le Temps*, n° du 25 novembre 1875.

(2) Voir le *Rapport de la commission monétaire française de 1869*, page 30 et *passim*; Feer-Herzog, *La France et ses alliés monétaires*, Paris 1870, page 55; Menier, *L'unité de l'étalon monétaire*, Paris 1873; Bamberger, *L'or de l'em-*

ren'es parties du monde (1). Dès lors, quand l'un des deux métaux fait prime, on importe, dans les pays à double étalon, pour les faire monnayer, des lingots du métal dont la valeur légale est, dans ces pays, supérieure à sa valeur marchande, et l'on en exporte les monnaies du métal dont la valeur marchande est supérieure à la valeur légale. A chaque changement de la valeur relative des deux métaux, les pays à double étalon subissent donc, sur leur capital monétaire, des pertes successives de grande importance. De plus, comme c'est le métal déprécié qui reste dans la circulation, il en résulte que le double étalon n'est, en réalité, que l'étalon alternatif, et que c'est le métal déprécié qui devient la mesure commune de la valeur, en sorte que le prix de toutes choses tend à s'élever. C'est ainsi que le rapport de l'or à l'argent, qui, vers le commencement de ce siècle, montait à environ $15\frac{1}{2}$, s'est élevé, vers 1840, à $15\frac{3}{4}$, puis est descendu, de 1850 à 1860, jusqu'à $15\frac{1}{4}$, à la suite des découvertes des mines d'or de la Californie et de l'Australie. Depuis 1860, ce rapport a repris sa marche ascendante, et l'argent semble en voie de dépréciation continue. Aussi les pays à double étalon ont dû limiter, puis suspendre la frappe de l'argent, se mettant ainsi sur la voie de l'adoption du pur étalon d'or (2).

pire, Bruxelles 1877, chap. x, xi, xii, xiii; Mannequin, *Question monétaire*, Paris 1881; V. Jacobs, *Le double étalon monétaire*, dans les Annales de la Société scientifique de Bruxelles, première année, page 78; etc.

(1) « Les pièces monétaires d'or et d'argent sont soumises aux mêmes variations de valeur que les métaux précieux dont elles sont formées: leur valeur change dans le cours des âges en raison de la richesse ou de l'appauvrissement des gîtes exploités, en raison de l'extension plus ou moins grande donnée au travail des extractions, en raison des perfectionnements introduits dans le traitement des minerais. Leur valeur change encore en raison du nombre et de l'importance des besoins, en raison du concours plus ou moins étendu, plus ou moins efficace que leur prêtent les agents fiduciaires, les institutions et les procédés de crédit. Enfin, leur valeur change encore en raison des circonstances générales au milieu desquelles ces pièces sont placées, et, de plus, en raison d'une foule de circonstances particulières, qui leur impriment des oscillations de hausse et de baisse pareilles à celles que subissent les autres objets doués de valeur. » Dabos, *Théorie et plan d'un étalon invariable de la valeur*, Paris 1878, page 18.

(2) Aujourd'hui, le double étalon n'a guère de partisans que les banquiers, naturellement intéressés à un état de choses qui multiplie les changes et ouvre un vaste champ à la spéculation, et les marchands de métaux précieux, pour lesquels le rapport légal entre les deux métaux est *une assurance gratuite contre la baisse au delà d'une certaine limite.* (Feer-Herzog, *La France et ses alliés monétaires*, page 61.)

Quant au choix à faire entre l'or et l'argent pour étalon monétaire, il n'est pas douteux qu'on doive préférer l'or.

Les nations avancées, dont le mouvement commercial est le plus développé, possèdent l'étalon d'or, comme l'Angleterre et l'Allemagne; ou, par la suppression du libre monnayage de l'argent, tendent à s'en rapprocher, comme les pays de l'Union latine et les États-Unis. Si d'autres pays, comme l'Autriche, la Russie et la plupart des États de l'Amérique du Sud, ne passent pas à l'étalon d'or, c'est à raison de leur mauvaise situation financière, ces pays ayant le cours forcé du papier-monnaie (1).

Cette marche du monde vers l'adoption de l'or est la conséquence de la baisse progressive de l'argent, qui perd de plus en plus sa qualité de métal précieux (2). En effet, depuis la découverte de l'Amérique, le rapport de l'or à l'argent n'a cessé de suivre une courbe ascendante, et, s'il y a eu quelques points de rebroussement, ils ont été bientôt redressés. Ce rapport était 10,5 en 1500, 11,6 en 1600, 14,9 en 1700, 15,4 en 1800; depuis lors, si l'on excepte la période de 1850 à 1860, il a encore augmenté, jusqu'à devenir égal, en ces dernières années, à 17 et à 18, chiffres qui ont même été dépassés par moments (3).

L'étalon d'or s'appuie d'ailleurs sur un réservoir considérable; car les existences actuelles en or monnayé paraissent monter à environ dix-huit milliards (4), dont la plus grande partie est aux mains des principales nations commerçantes, la France, l'Angleterre, l'Allemagne et les États-Unis.

Il faut du reste remarquer qu'*on peut effectuer beaucoup*

(1) Lors de la conclusion de la Convention monétaire latine, en 1865, la Belgique, la Suisse et l'Italie s'étaient déjà prononcées pour l'étalon d'or unique. La Conférence monétaire internationale, tenue à Paris en 1867, et la Commission monétaire française de 1869 se sont aussi prononcées pour l'étalon d'or.

(2) Cette baisse de l'argent a eu pour conséquence la suspension de la frappe de ce métal dans les pays de l'Union latine, aux États-Unis et en Russie, et sa démonétisation en Hollande et en Allemagne, lors de l'adoption de l'étalon d'or dans ces pays ; mais il est évident que cette suspension de la frappe de l'argent et cette démonétisation ont contribué à leur tour à augmenter l'avilissement de ce métal.

(3) Feer-Herzog, *La France et ses alliés monétaires*, page 53. Lorsque, par exemple, le rapport monte de 15 $\frac{1}{2}$ à 16; 17; 18; 19; 20, la dépréciation de l'argent est respectivement de 3,23; 9,68; 16,23; 22,58; 29,03 pour cent.

(4) D'après M. Broch, délégué de la Norwège à la Conférence monétaire internationale de 1881.

d'échanges avec peu de monnaie (1). C'est le crédit, en effet, qui engage presque toutes les affaires commerciales. Dans la plupart des opérations de commerce extérieur, on s'oblige à payer par des traites et non par du numéraire. Sur toutes les places où une nation opère des achats, elle fait aussi des ventes; toutes ces opérations se balancent en fin de compte par un échange de traites, et il n'y a que le solde qui soit payé en métal : il suit de là que des affaires commerciales d'un chiffre énorme sont le plus souvent liquidées par une proportion de numéraire qui ne dépasse pas cinq ou six pour cent du chiffre total des transactions (2). Il n'y a donc pas à se préoccuper, pour le commerce international, de l'insuffisance de l'or.

L'étalon d'argent n'est pas non plus nécessaire pour le commerce avec l'extrême Orient, Indes et Chine (3). Il est bien vrai, en effet, que l'Orient est le grand consommateur de l'argent, — qu'il enfouit ou manufacture, — et qu'il est presque toujours le créancier de l'Europe, à laquelle il vend beaucoup et achète très peu. Mais il faut observer qu'il reçoit l'argent comme marchandise plutôt que comme monnaie, en sorte qu'il importe peu qu'on le lui livre sous forme de lingots ou de monnaies. Bien plus, pour que l'action du commerce oriental laisse intacte la circulation monétaire du monde civilisé, il importe que l'argent n'existe que comme marchandise ou comme monnaie divisionnaire frappée à valeur conventionnelle.

Enfin, l'or se recommande par ses qualités physiques et chimiques (4). A poids égal, il vaut dix-sept à dix-huit fois autant que l'argent; à volume égal, il vaut trente fois autant (5). L'or est donc une monnaie plus commode que l'argent, plus facile à compter et à transporter.

De plus, le faux monnayage de l'or est très difficile, son poids spécifique, qui est 19, étant notablement plus élevé que celui des autres métaux, le platine excepté.

(1) *Rapport de la Commission monétaire française de 1869*, page 23.

(2) L'Angleterre fait chaque année pour dix milliards d'affaires au dehors avec trois milliards au plus de numéraire.

(3) *Rapport de la Commission monétaire française de 1869*, pages 21 et 31 ; Feer-Herzog et Hardy, *Rapport au Conseil fédéral suisse*, Berne 1878, page 40.

(4) *Rapport de la Commission monétaire française de 1869*, page 33 : Feer-Herzog, *La France et ses alliés monétaires*, Paris 1870, page 50.

(5) En supposant que l'alliage monétaire soit au titre de 0,9, qu'il se fasse sans contraction de volume, et que les densités de l'or, de l'argent et du cuivre soient respectivement 19,26; 10,512; 8,85 et en appelant r le rapport, à poids égal, de l'or à l'argent, le rapport, à volume égal, sera

$$\left(\frac{0,9}{10,512} + \frac{0,1}{8,85}\right) : \frac{1}{r}\left(\frac{0,9}{19,26} + \frac{0,1}{8,85}\right) = 1,67r.$$

La monnaie d'or est aussi moins altérable que celle d'argent Elle s'use environ quatre fois moins vite, et elle résiste à la plus grande partie des réactifs qui sont à la portée de tout le monde. Or, le minimum du frai est la condition la plus essentielle pour le maintien de l'intégrité d'un système monétaire (1).

Enfin, l'or coûte trois fois moins en frais de fabrication.

Il serait trop long d'exposer ici les systèmes monétaires en vigueur dans les divers pays. Nous ne ferons connaître, d'une manière détaillée, que le système monétaire, aujourd'hui si chancelant, de l'Union latine, et nous nous bornerons, pour les autres pays, à une simple nomenclature de leurs unités monétaires.

UNION LATINE.

La France, la Belgique, l'Italie, la Suisse et la Grèce ont conclu, le 23 décembre 1865, une convention monétaire, dite de l'*Union latine*, renouvelée le 5 novembre 1878, puis le 6 novembre 1885, sur les bases suivantes :

1° *L'unité principale de monnaie est le* franc, *monnaie d'argent du poids de cinq grammes, au titre de neuf dixièmes* (2);

2° *L'or monnayé vaut, à poids égal et à titre égal, quinze fois et demie* (3) *autant que l'argent* (4) ;

(1) Le frai moyen annuel de la pièce d'or de vingt francs peut être estimé à environ 0,0002. (Feer-Herzog, *La France et ses alliés monétaires*, pages 46 et 99.) La perte annuelle sur les cinq milliards d'existences actuelles en pièces d'or de vingt francs est donc d'environ un million. L'usure du souverain d'or d'Angleterre est plus considérable encore. On obvie, jusqu'à un certain point, au frai des monnaies, par la création de billets de banque, *payables à vue*.

(2) Cette définition est celle des lois du 18 germinal an III (7 avril 1795), du 28 thermidor an III (15 août 1795) et du 7 germinal an XI (28 mars 1803), qui portent que *cinq grammes d'argent, au titre de neuf dixièmes de fin, constituent l'unité monétaire sous le nom de franc.*

(3) Ce rapport résulte de la loi du 7 germinal an XI (28 mars 1803), qui porte que *la pièce d'or de vingt francs est au titre de neuf dixièmes de fin et un dixième d'alliage, et à la taille de cent cinquante-cinq au kilogramme.*

En 1726, le rapport légal avait été fixé, en France, à raison de quatorze marcs cinq onces d'argent pour un marc d'or. Mais, en 1785, comme l'or devenait plus rare, *parce que sa valeur légale était restée toujours la même, tandis que sa valeur métallique augmentait d'année en année,* de Calonne, ministre des finances de Louis XVI, proposa et exécuta le projet de la refonte des monnaies d'or à $15\frac{1}{2}$ au lieu de $14\frac{5}{6}$. (De Calonne, *Développement sur l'opération de la refonte des monnaies d'or*, page 16.)

(4) Le franc d'argent, au titre de 0,9, pesant 5 gr., le franc d'or, au même titre, pèse 5^{g} : $15\frac{1}{2} = \frac{10}{31}$ ou 0^{g},322581.

3° *Les monnaies principales sont les pièces d'argent de* 5 fr., *au titre de* 0,9, *et les pièces d'or de* 5 fr., *de* 10 fr., *de* 20 fr., *de* 50 fr. *et de* 100 fr., *aussi au titre de* 0,9.

La frappe de ces monnaies est libre, sauf retenue de 1f,50 pour frais de fabrication par kilogramme d'argent au titre de 0,9 et de 6f,70 par kilogramme d'or au même titre (1). Toutefois, par suite de la dépréciation de l'argent, l'Union latine a dû *limiter*, en 1873, et même *suspendre* entièrement, en 1876, la frappe des pièces d'argent de 5 fr. (2).

Les pièces d'argent de 5 fr. et toutes les pièces d'or ont une *force libératoire illimitée*. Toutefois, les pièces dont les empreintes auraient disparu, ou dont le poids aurait été réduit par le frai d'un pour cent, pour les pièces d'argent de 5 fr., ou d'un demi pour cent, pour les pièces d'or, au-dessous de la *tolérance*,

Le gramme d'argent monnayé, au titre de 0,9, valant 1 fr. : 5 = 0f,20, le gramme d'or, au même titre, vaut $0^f,20 \times 15\frac{1}{2} = 3^f,10$.

L'adoption de l'étalon d'or unique paraissant inévitable dans un avenir prochain, l'unité monétaire sera alors *le franc d'or, du poids de* $\frac{10}{31}$ gr., *au titre de* 0,9. Il est évident qu'une pareille unité ne se rattache plus au système décimal des poids et mesures. Si, lors de l'adoption de l'unique étalon d'or, on veut créer une monnaie vraiment métrique, il conviendra de prendre pour unité *le gramme d'or, au titre de* 0,9, monnaie qui serait frappée dans ses multiples de 2 gr., 5 gr., 10 gr., 20 gr., correspondant respectivement à 6f,20, 15f,50, 31 fr., 32 fr. de la monnaie actuelle. (Léon, *Notes présentées à l'Académie des sciences sur le système métrique considéré dans son application aux monnaies*, Paris 1876.)

(1) Si l'on tient compte des frais de fabrication, on trouve que le rapport de l'or à l'argent est, en réalité,

$$\frac{3100-6,70}{200-1,50} = 15\ \frac{7}{12}$$

au lieu de $15\frac{1}{2}$.

Le rapport des frais de monnayage de l'argent aux frais de monnayage de l'or est

$$\frac{1,50}{200} : \frac{6,70}{3100} = 3,47.$$

(2) On passerait au pur étalon d'or en décrétant que la pièce d'argent de cinq francs, dont la frappe a déjà cessé d'être libre, n'aura plus qu'une force libératoire limitée, soit, par exemple, de cent francs pour chaque payement, et en en démonétisant une partie, soit, par exemple, la moitié sur les douze à quinze cents millions d'existences actuelles. (*Rapport de la Commission monétaire française de 1869*, page 37 ; Feer-Herzog, *La France et ses alliés monétaires*, page 74.)

peuvent être refusées, et restent, dans l'un et l'autre de ces cas, à la charge des porteurs (1);

4° *Les monnaies divisionnaires sont les pièces d'argent de* 0f,20, *de* 0f,50, *de* 1 fr. *et de* 2 fr., *au titre de* 0,835 (2).

La fabrication de ces pièces est réservée aux divers États, qui toutefois ne peuvent en frapper que pour une valeur correspondant à 6 fr. par habitant, et qui doivent les retirer, sans perte pour les détenteurs, lorsque leurs empreintes ont disparu, ou que leur poids a été réduit par le frai de cinq pour cent au-dessous de la *tolérance*.

Elles ont cours légal, entre les particuliers de l'État qui les a fabriquées, jusqu'à concurrence de cinquante francs pour chaque payement; les autres États les reçoivent dans leurs caisses jusqu'à concurrence de cent francs; mais l'État qui les a émises les reçoit de ses nationaux sans limitation de quantité; il doit même les échanger contre une égale valeur de monnaie principale, pourvu que la somme présentée à l'échange ne soit pas inférieure à cent francs;

5° *Quant à la monnaie de cuivre ou de billon, chaque État conserve son système particulier.*

En France, il y a des pièces de bronze de 10 centimes, de 5 centimes, de 2 centimes et de 1 centime (3). Ces pièces pèsent autant de grammes qu'elles valent de centimes. Elles renferment 95 parties de cuivre, 4 d'étain et 1 de zinc. D'après le décret du 18 août 1810, elles n'ont cours obligatoire, entre les particuliers, que pour l'appoint de la pièce de cinq francs.

En Belgique, il y a des pièces de nickel de 10 centimes et de

(1) La tolérance de poids pour la pièce d'or de vingt francs étant de deux millièmes et le frai pouvant monter jusqu'à un demi pour cent au-dessous de la tolérance, on voit que la perte totale de poids peut s'élever à

$$0{,}002 + (1 - 0{,}002)\ 0{,}005 = 0{,}00699.$$

Comme le frai moyen annuel de la pièce d'or de vingt francs est d'environ 0,0002, la durée moyenne de la circulation légale de cette pièce est donc de

$$0{,}00699 : 0{,}0002 = 35 \text{ ans.}$$

(2) La pièce d'argent d'un franc n'est donc pas le franc unité de monnaie. Le franc, unité de monnaie, n'existe que dans la pièce de cinq francs.

En France, les nouvelles monnaies divisionnaires d'argent renferment 835 parties de métal fin, 93 de cuivre et 72 de zinc. Cet alliage présente l'avantage d'être plus blanc que l'alliage au cuivre pur, et de ne pas être noirci par les vapeurs sulfhydriques.

(3) Les monnaies de bronze ont une valeur nominale environ quatre fois supérieure à leur valeur intrinsèque.

5 centimes, renfermant 3 parties de cuivre et 1 de nickel, et des pièces de cuivre de 2 centimes et de 1 centime, renfermant soit du cuivre pur, soit 1 partie de cuivre et 2 d'alliage (1). D'après la loi du 20 décembre 1860, ces pièces n'ont cours obligatoire, entre les particuliers, que jusqu'à concurrence de cinq francs en nickel ou de deux francs en cuivre pour chaque payement.

Le tableau suivant indique les poids, titres et diamètres des monnaies d'or et d'argent de l'Union latine.

Les tolérances de titre et de poids, indiquées dans ce tableau, sont tant en dehors qu'en dedans.

NATURE DES PIÈCES.		TITRE		POIDS		DIAMÈTRE OU MODULE.
		TITRE DROIT.	TOLÉRANCE.	POIDS DROIT.	TOLÉRANCE.	
	francs	millièmes	millièmes	grammes	millièmes	millimèt.
Or	100	900	1	32,25806	1	35
	50	900	1	16,12903	1	28
	20	900	1	6,45161	2	21
	10	900	1	3,22580	2	19
	5	900	1	1,61290	3	17
Argent.	5	900	2	25	3	37
	2	835	3	10	5	27
	1	835	3	5	5	23
	0,50	835	3	2,5	7	18
	0,20	835	3	1	10	16

MONNAIES DE COMPTE DES PRINCIPAUX PAYS.

Le tableau suivant fait connaître les poids, titres et valeurs au pair des monnaies de compte des principaux pays. La plupart de ces monnaies n'existent que dans leurs multiples. Les lettres O et A indiquent si elles sont en or ou en argent. On a calculé leurs valeurs en admettant que cinq grammes d'argent, au titre de neuf dixièmes, valent un franc, et en adoptant $15\frac{1}{2}$ pour le rapport de l'or à l'argent.

Comme on le voit par ce tableau, divers pays, tels que l'Espagne, la Roumanie, la Serbie et la plupart des républiques de l'Amérique du Sud, ont le même système monétaire que l'Union latine.

(1) Les monnaies de cuivre et de nickel ont une valeur nominale de deux à trois fois supérieure à leur valeur intrinsèque.

		TITRE.	POIDS en grammes.	VALEUR en francs.
Allemagne.	Marc de 100 pfennig .	0,900	0,39825	1,2346 O
Angleterre.	Livre sterling de 20 shillings ou 240 pence .	11 : 12	7,98806	25,2215 O
Autriche-Hongrie.	Florin de 100 kreutzers .	0,900	12,34500	2,4691 A
		0,900	0,80645	2,5000 O
Belgique.	Franc de 100 centimes .	0,900	5,00000	1,0000 A
		0,900	0,32258	1,0000 O
Brésil.	Milreis, 1000 reis . .	11 : 12	0,89648	2,8306 O
Chili.	Piastre ou peso de 100 centavos . . .	0,900	25,00000	5,0000 A
Colombie.	Piastre ou peso de 10 décimos	0,900	25,00000	5,0000 A
		0,900	1,61290	5,0000 O
Danemark.	Couronne ou krone de 100 ore. . . .	0,900	0,44803	1,3889 O
Espagne.	Peseta de 4 réaux . .	0,900	5,00000	1,0000 A
		0,900	0,32258	1,0000 O
États-Unis.	Dollar de 100 cents . .	0,900	1,67181	5,1826 O
		0,900	26,72957	5,3459 A
Finlande.	Markka de 100 penni . .	0,900	0,32258	1,0000 O
France.	Franc de 100 centimes .	0,900	5,00000	1,0000 A
		0,900	0,32258	1,0000 O
Grèce.	Drachme de 100 lepta .	0,900	5,00000	1,0000 A
		0,900	0,32258	1,0000 O
Hollande.	Florin de 100 cents . .	0,900	0,67200	2,0832 O
Indes anglaises.	Roupie de 16 annas ou 192 pices . . .	11 : 12	11,66381	2,3760 A
Italie.	Lira de 100 centesimi .	0,900	5,00000	1,0000 A
		0,900	0,32258	1,0000 O
Japon.	Yen de 100 sen . .	0,900	1,66667	5,1667 O
Mexique.	Piastre ou peso de 100 centavos . . .	0,9027	27,073 (1)	5,4308 A
Norvège.	Couronne ou krone de 100 ore. . . .	0,900	0,44803	1,3889 O
Pérou	Sol de 10 dineros ou 100 centavos . . .	0,900	25,00000	5,0000 A
		0,900	1,61290	5,0000 O
Portugal.	Milreis, 1000 reis . .	11 : 12	1,77350	5,5997 O
Roumanie.	Ley de 100 banis . .	0,900	5,00000	1,0000 A
		0,900	0,32258	1,0000 O
Russie.	Rouble de 100 kopecks .	0,868	20,735 (1)	3,9996 A
Serbie.	Dinar de 100 paras . .	0,900	5,00000	1,0000 A
		0,900	0,32258	1,0000 O
Suède.	Couronne ou krona de 100 ore. . . .	0,900	0,44803	1,3889 O
Suisse.	Franc de 100 centimes .	0,900	5,00000	1,0000 A
Turquie.	Piastre de 40 paras . .	11 : 12	0,07216	0,2279 O
Uruguay.	Piastre ou peso de 100 centavos . . .	0,900	25,00000	5,0000 A
Venezuela.	Venezolano de 100 centavos	0,900	25,00000	5,0000 A
		0,900	1,61290	5,0000 O

(1) D'après l'Annuaire de la Bourse des changes de Paris

L'étalon d'or a été adopté en Allemagne par la loi du 24 novembre 1871. L'unité monétaire est le marc d'or, à la taille de 2790 au kilogramme d'or fin. 80 marcs valent 81 francs. La monnaie d'argent n'a cours libératoire que jusqu'à concurrence de 20 marcs.

En Angleterre, le système monétaire actuel remonte à 1816. La livre sterling ou souverain d'or est à la taille de $46\frac{39}{40}$ à la livre troy (1) au titre de $\frac{11}{12}$. La monnaie d'argent n'a cours libératoire que jusqu'à concurrence de 2 livres sterling.

Le milreis d'or du Brésil est à la taille de 256 à l'ancien marc de Portugal (2) au titre de $\frac{11}{12}$.

Les trois États scandinaves, Suède, Norwège et Danemark, ont adopté, le 18 décembre 1872, un système monétaire commun. L'unité de monnaie est la couronne d'or, à la taille de 2480 au kilogramme d'or fin. Le pouvoir libératoire des monnaies d'argent est limité à 20 couronnes pour les pièces de deux couronnes et d'une couronne, et à 5 couronnes pour les pièces d'une valeur inférieure à une couronne.

Les États-Unis avaient adopté comme unités monétaires, en 1792, un dollar d'argent et un dollar d'or liés l'un à l'autre par le rapport de 1 à 15. Cette première loi eut pour conséquence la disparition de l'or. En 1834 et en 1837, deux nouvelles lois établirent le rapport de 1 à 16, et eurent pour conséquence la disparition de l'argent. La loi du 25 février 1862 décréta le cours forcé du papier-monnaie. Le 12 février 1873, une nouvelle loi abolit le double étalon, et adopta le dollar d'or comme unité légale. Enfin, la loi du 28 février 1878 a rétabli le double étalon. Le nouveau dollar d'or, au titre de 0,9, pèse 25,8 grains troy; le dollar d'argent, au même titre, pèse 412,5 grains troy, en sorte que le rapport de l'or à l'argent est maintenant $15\frac{85}{86}$ (3).

Par la loi du 26 novembre 1847, la Hollande avait adopté l'étalon simple d'argent, et l'unité monétaire était le florin d'argent, du poids de 10 grammes, au titre de 0,945 (4). En 1874,

(1) La livre troy, de 5760 grains, vaut 373,24195 grammes.

(2) Le marc de Portugal, de 4608 grains, vaut 229,5 grammes.

(3) Feer-Herzog et Lardy, *Rapport au Conseil fédéral suisse* sur la Conférence monétaire américaine de 1878, Berne 1878, page 6.

(4) Le florin d'argent de Hollande vaut 2f,10.

elle suspendit la frappe de l'argent. Enfin, par la loi du 6 juin 1875, elle adopta l'étalon unique d'or.

Dans l'empire des Indes, l'unité légale est la roupie d'argent, du poids de 180 grains troy, au titre de $\frac{11}{12}$. Le mohur, monnaie d'or du poids de 180 grains troy, au titre de $\frac{11}{12}$, est nominalement taxée à 15 roupies, mais n'a pas de pouvoir libératoire.

Au Japon, l'unité monétaire, depuis 1871, est le yen, monnaie d'or du poids de $1\frac{5}{7}$ gramme, dont $1\frac{1}{2}$ d'or fin. 6 yen valent 31 francs. La monnaie d'argent n'a cours libératoire que jusqu'à concurrence de 10 yen.

Plusieurs États n'ont pas ou n'ont guère de monnaies indigènes, par exemple, le Portugal, la Turquie, l'Égypte, la Chine, etc. La circulation se compose, dans ces pays, de monnaies étrangères, lesquelles sont principalement les souverains anglais, les pièces d'or de vingt francs, les pièces d'argent de cinq francs, les piastres mexicaines, etc.

Enfin, beaucoup d'États, tels que l'Autriche, l'Italie, la Grèce, la Russie, la Turquie, le Brésil et la plupart des États de l'Amérique du Sud, ont le cours forcé du papier-monnaie.

SUR

LES THÉORÈMES FONDAMENTAUX

DE

LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

PAR

C. LE PAIGE et Fr. DERUYTS.

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, ETC.,
ET DE L'ACAD. ROYALE DE MÉDECINE DE BELGIQUE,
rue de Louvain, 108.

—

1888

Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*,
3e série, tome XV, no 2; 1888.

SUR
LES THÉORÈMES FONDAMENTAUX
DE
LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

C'est à VON STAUDT, comme on le sait, que revient l'honneur d'avoir débarrassé la géométrie de position de toute relation métrique. Cependant la façon dont il établit les théorèmes fondamentaux de la géométrie projective n'a pas été à l'abri de critiques fondées, et de savants géomètres, tels que MM. KLEIN, DARBOUX, LUROTH, ZEUTHEN, SCHUR, REYE, THOMAE, DE PAOLIS, se sont attachés à introduire une rigueur plus grande dans ses démonstrations (*).

Les vérités essentielles qu'il s'agit d'établir pour édifier toute la géométrie de position sont peu nombreuses : on pourrait presque dire qu'elles se réduisent à ces deux propriétés des séries projectives : *d'être déterminées par trois couples d'éléments, et de posséder, quand elles sont placées sur un même support, au plus deux éléments unis.* Encore ces propriétés n'en font-elles qu'une seule.

Les démonstrations qu'on en a données s'appuient, en résumé, sur ces théorèmes :

I. *En partant de trois éléments d'une série, on peut, par des constructions répétées de groupes harmoniques, atteindre un élément quelconque de la série, ou en approcher autant qu'on le veut.*

(*) Voir *Math. Annal.*, t. VI, VII, XVII et XVIII, REYE, *Geometrie der Lage*, 2e et 3e éd. *Mem. della R. Accad. dei Lincei*, 1881.

II. *Lorsque deux séries d'éléments sont projectives, à une suite continue d'éléments dans l'une, correspond une suite continue dans l'autre.*

Ce dernier théorème découle immédiatement de l'existence d'un couple harmonique commun à deux couples qui n'empiètent pas l'un sur l'autre.

Peut-être pourrait-on objecter qu'il est difficile de définir rigoureusement un point comme limite d'une série d'éléments, ou la continuité d'une pareille série, sans rien emprunter à l'idée de mesure.

En outre, on est obligé de faire usage du point à l'infini de la droite, ou de considérations de mouvement.

Le but de la présente note est d'exposer les propriétés fondamentales des séries projectives en suivant une autre marche, complètement dégagée de toute considération de mouvement, de continuité, etc.

Nous avons abandonné la définition que VON STAUDT donne des séries projectives. Il les regarde comme des séries liées de telle façon, qu'à des groupes de quatre éléments harmoniques correspondent toujours quatre éléments harmoniques.

Nous avons pris, comme point de départ, la notion des couples en involution.

Outre que cette marche rappelle peut-être davantage le développement historique de la géométrie moderne, elle permet de traiter tout d'abord un cas spécial, d'une grande importance, des séries projectives.

En général, celles-ci se déduisent alors des groupes en involution, en prenant, comme définition de ces séries, une

propriété qui avait été signalée, en quelque sorte incidemment, par Chasles (*).

Il est facile de montrer que ces séries jouissent de la propriété que von Staudt a prise comme définition.

En résumé, nous n'avons fait usage que du célèbre théorème de Desargues (**) sur les triangles homologiques et de ses conséquences immédiates.

Définition. — *Des couples de points* AB, CD, EF,..., *situés sur une droite, sont en involution lorsque, par trois couples arbitraires, on peut faire passer les couples de côtés opposés d'un quadrangle.*

Il est tout d'abord nécessaire de faire voir que de pareils groupes existent.

Supposons que l'on se donne les deux couples AB, CD. Par la méthode connue, déterminons un nouveau

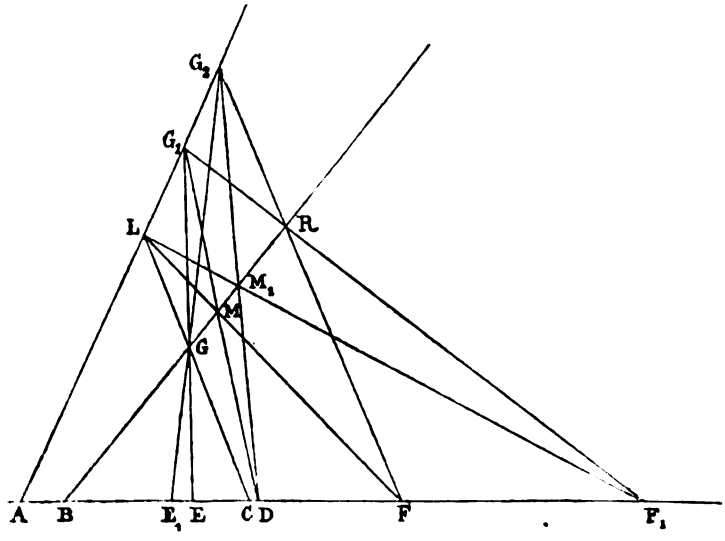
---

(*) *Traité des sections coniques*, p. 148.

(**) Ce théorème fut publié pour la première fois, comme on sait, à la suite de la perspective de Desargues, rédigée par A. Bosse (Paris, 1647-1648, pp. 340 et ss.). On sait moins communément que cette perspective fut traduite en néerlandais par J. Bara et publiée à Amsterdam, en 1664, par les soins du libraire anversois Dancker Dankerts. Une seconde édition fut imprimée en 1686, également à Amsterdam, par le fils de Dancker, Justus Dankerts. Aucun biographe de Desargues n'a, pensons-nous, signalé cette particularité. C'est par la traduction néerlandaise que les méthodes de Desargues purent se répandre dans les pays de langue germanique. (V. Ch. Wolf, De præcipuis scriptis mathematicis, t. III, p. 1048 des *Éléments de math.*, 1re éd.)

Le théorème de Desargues lui fut évidemment inspiré par les méthodes de la perspective : on en trouve comme une première ébauche dans l'Optique, justement célèbre, du P. Fr. d'Aiguillon (Anvers, Typ. Plant, 1613, p. 664).

couple EF. Pour cela menons arbitrairement trois droites par A, B et E; la droite menée par E coupe les deux autres en deux points G, G_1; les droites CG, DG_1 donnent de nouveaux points L, M de façon que



$EGG_1 = 0$, $CGL = 0$, $DG_1M = 0$, cette notation indiquant que les trois points sont en ligne droite. LM coupe la droite ABCD en F. Ce point est d'ailleurs unique, comme on peut le faire voir, en appliquant le théorème de Desargues sur les quadrangles perspectifs.

Supposons maintenant que l'on prenne un point E_1; la droite E_1G donne le point G_2, et la droite DG_2 le point M_1; LM_1 coupe la droite ABCD au point F_1.

Maintenant, au lieu d'employer AB, CD, faisons usage

de AB, EF, et essayons de déterminer le point correspondant à E_1. Nous aurons :

$$E_1GG_2 = 0, \quad EGG_1 = 0 :$$

menons FG_2 qui détermine R, de sorte que

$$FG_2R = 0.$$

Or, si nous considérons les deux quadrangles $G_1M_1G_2R$; LMG_1M_1, les cinq couples de côtés G_1M_1, G_1M_1; G_1G_2, LG_1; M_1R, M_1M; G_1M, G_2M_1; LM, G_2R, se coupant en des points de AB, le sixième couple LM_1, G_1R donne aussi un point de AB; par suite M_1L et G_1R coupent EF au même point F_1.

Maintenant, convenons d'exprimer par la notation

$$(AB, CD, EF) = 0,$$

que l'on peut par les trois couples de points AB, CD, EF, faire passer les côtés opposés d'un quadrangle.

Il résulte de ce qui vient d'être démontré que de

$$(AB, CD, EF) = 0,$$
$$(AB, CD, E_1F_1) = 0,$$

on peut conclure,

$$(AB, EF, E_1F_1) = 0.$$

De même si l'on a un nouveau groupe E_2F_2, de

$$(AB, CD, EF) = 0,$$

$$(AB, CD, E_2F_2) = 0,$$

on conclut

$$(AB, EF, E_2F_2) = 0.$$

Mais alors, on a, car les groupes sont évidemment permutables,

$$(EF,\ AB,\ E_1F_1) = 0,$$
$$(EF,\ AB,\ E_2F_2) = 0,$$

d'où

$$(EF,\ E_1F_1,\ E_2F_2) = 0.$$

Il résulte immédiatement de là ce théorème :

THÉORÈME I. *Deux couples déterminent complètement deux séries en involution.*

COROLLAIRE I. *Deux involutions placées sur un même support ont au plus un couple commun.*

COROLLAIRE II. *Les éléments d'un même couple sont permutables ; il en est de même des couples.*

On voit aisément que si $A \equiv B$, $C \equiv D$, on obtient le cas particulier de l'involution de quatre points, suivant la dénomination de DESARGUES, ou un groupe harmonique.

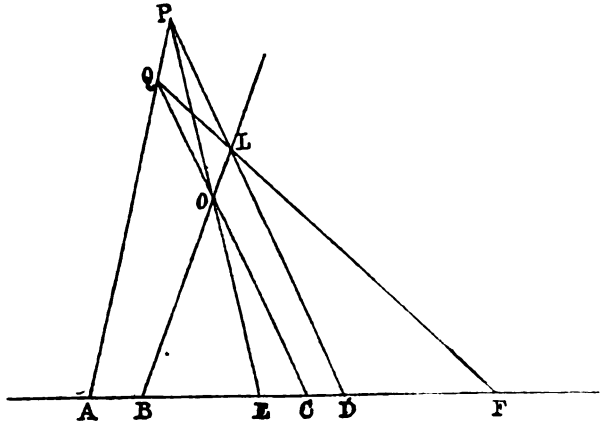
THÉORÈME II. *Si d'un point* O, *on projette sur une droite* u *les points* AB, CD, EF,... *en involution sur une droite* v, *les projections,* A_1B_1, C_1D_1, E_1F_1... *sont elles-mêmes en involution.*

En effet, imaginons par u et v deux plans α et β. Puisque AB, CD, EF,... sont en involution, par trois de ces couples on peut faire passer les côtés d'un quadrangle LMNP situé dans le plan α. Or si l'on projette le système sur le plan β, on voit qu'à LMNP correspond un quadrangle $L_1M_1N_1P_1$ dont les côtés passent par A_1B_1, C_1D_1, E_1F_1.

COROLLAIRE. *La projection de quatre points harmoniques est un groupe harmonique.*

THÉORÈME III. *Dans une involution, à quatre éléments harmoniques correspondent quatre éléments harmoniques.*

Remarquons, en effet, que l'on peut, quand le point E varie, laisser fixe le point O, alors le point Q reste fixe.



Par suite, si nous considérons quatre points E, E_1, E_2 E_3, il leur correspond des points P, P_1, P_2, P_3 ; ceux-ci, projetés du point D, donnent L L_1, L_2, L_3 qui, projetés à leur tour de Q, donnent $FF_1F_2F_3$. Si le premier groupe est harmonique, il en est de même du dernier, en vertu du corollaire du théorème II.

DÉFINITION. — *Soient sur une droite deux involutions que nous désignerons, pour abréger le langage, par* J *et* J'. *A un point* M *correspond dans* J *un point* M' ; *à* M' *correspond dans* J' *un point* M_1. *Nous dirons que les deux points* M *et* M_1 *appartiennent à deux séries projectives superposées.*

THÉORÈME IV. — *Deux séries projectives superposées ont, au plus, deux éléments unis.*

En effet, si M_1 coïncide avec M, le couple MM' est commun à J et à J', et réciproquement. Or, J et J' ont, au plus, un couple commun. Mais si M coïncide avec M_1 on voit que M' est aussi un élément uni, car, en partant de M', on aurait eu M dans J puisque les éléments sont permutables, et M aurait donné M' dans J'.

COROLLAIRE. — *Deux séries projectives superposées qui ont trois éléments unis ont tous leurs éléments unis.*

En effet, il n'en pourrait être ainsi que si J et J' avaient deux couples communs.

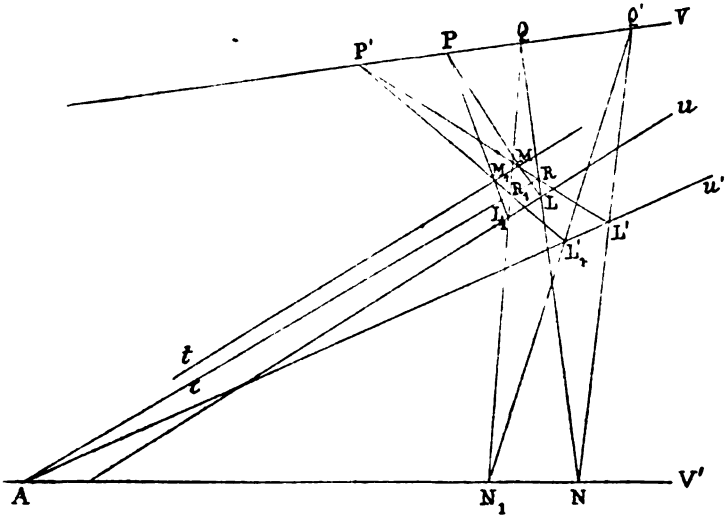
THÉORÈME V. — *Dans deux séries projectives superposées, à quatre éléments harmoniques d'une série correspondent quatre éléments harmoniques de l'autre série.*

En effet, considérons quatre éléments P, Q, R, S, il leur correspond dans J, les éléments P', Q', R', S', et à ceux-ci dans J' les points homologues P_1, Q_1, R_1, S_1. Donc, d'après le théorème III, si les quatre premiers éléments sont harmoniques, il en est de même des quatre derniers.

COROLLAIRE. — *Si quatre éléments* P Q R S *ne sont pas harmoniques, il est impossible que les quatre autres le soient.*

LEMME. — On se donne quatre points P, P', Q, Q' situés sur une droite v et deux droites u et u'. Soit N_1 un point quelconque. Les droites QN, Q'N, coupent u et u' respectivement en des points L et L'; soit M le point

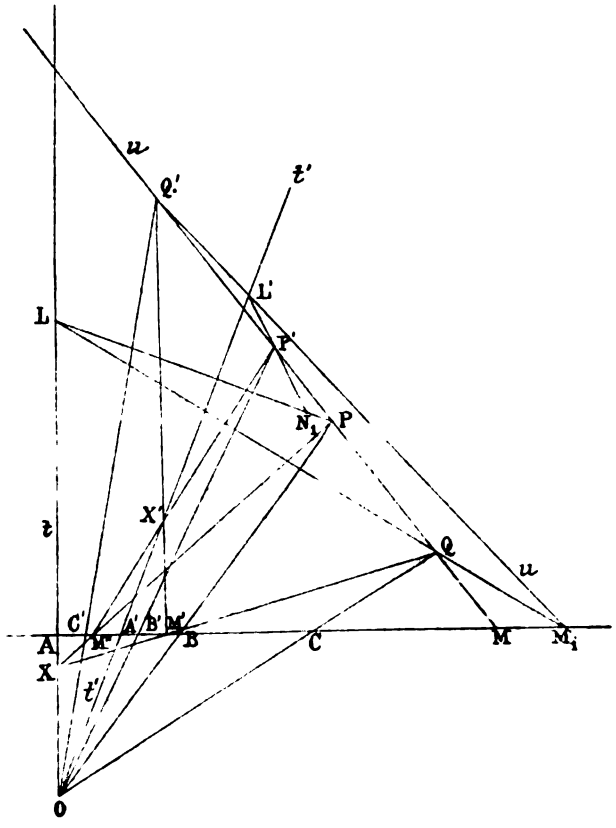
d'intersection des droites PL et P'L'. Si le point N reste sur une droite v', le point M restera sur une droite t.



Considérons, en effet, deux positions quelconques N et N_1 du point N. Soient R et R_1 les points d'intersection des droites P'L', QL; P'L'$_1$ et QL_1. Les deux triangles RL'N, $R_1L'_1N_1$, sont homologiques puisque leurs côtés se coupent en trois points P',Q,Q' de la droite v, donc RR_1 L'L', NN_1, sont trois droites passant par un même point fixe A de V'. Le lieu des points R est, par suite, une droite r. D'un autre côté, les deux triangles MRL, $M_1R_1L_1$ sont homologiques puisque leurs côtés se coupent en trois points P, P', Q de v; donc les droites MM_1, RR_1, LL_1, concourent en un même point. Ce point est fixe, car il est l'intersection des droites u et r; il s'ensuit que le lieu des points M est une droite t.

THÉORÈME VI. — *Il est toujours possible d'associer trois points* A, B, C *d'une droite à trois autres points arbitraires* A', B', C' *de la même droite dans deux séries projectives superposées.*

Soit v la droite qui contient les couples AA', BB', CC'. Sur v prenons un point arbitraire M, par lequel nous menons une droite arbitraire u.



Par A et A′ menons deux droites arbitraires t et t' qui se coupent en un point O. Les droites BO, B′O, CO, C′O déterminent sur u des points P, P′, Q, Q′.

Par le lemme précédent nous savons que si l'on joint un point M_1 de v à Q et à Q′ de façon à déterminer sur t et t' des points L et L′, le point N_1 d'intersection des droites PL, P′L′ est sur une droite donnée de position.

Soit M″ le point où cette droite rencontre u, et soit M′ la position correspondante de M'_1.

Il en résulte que PM″, P′M″ coupent t et t' en des points X et X′ tels que QX, Q′X′ concourent en M′.

Maintenant considérons les deux quadrangles

PQXO; P′Q′X′O.

Les côtés du premier coupent v aux points

M, A; M″, C; B, M′;

Ceux du second en

M, A′; M″, C′; B′, M′;

par suite les deux systèmes de trois couples sont en involution. Il en résulte que A, A′; B, B′; C, C′ sont associés dans deux séries projectives superposées.

Théorème VII. — *Deux séries projectives superposées sont déterminées par trois couples d'éléments.*

En effet, on peut toujours associer trois couples arbitraires, mais il est impossible d'en associer quatre. Car si nous choisissons les quatre points A, B, C, D de la première série, de sorte qu'ils forment un groupe harmonique, nous ne pourrons prendre les quatre points A′, B′, C′, D′ d'une manière arbitraire.

Séries projectives en général.

Si l'on se donne des éléments A_1, A_2, A_3,..., d'une ponctuelle, on pourra toujours les projeter d'un centre O. Le faisceau a_1, a_2, a_3..., ainsi obtenu, coupé par une transversale, donne une nouvelle ponctuelle B_1, B_2, B_3,..., sur laquelle on pourra renouveler la même opération et ainsi de suite.

Imaginons maintenant deux séries projectives superposées, A, A'; B, B'; C, C';.... Si des séries A, B, C,...; A', B', C'..., on déduit, par un nombre quelconque de projections et de sections, deux séries L, M, N,...; L', M', N', nous dirons que ces nouvelles séries forment deux séries projectives.

Réciproquement nous dirons que deux séries L, M, N...; L', M', N'..., sont projectives quand on peut les ramener par un nombre fini de projections et de sections à deux séries projectives superposées.

Alors nous pourrons énoncer immédiatement les théorèmes suivants :

THÉORÈME VIII. — *Deux séries projectives sont déterminées par trois couples d'éléments.*

THÉORÈME IX. — *Dans deux séries projectives, à quatre points harmoniques correspondent quatre éléments harmoniques.*

THÉORÈME X. — *Si l'on projette d'un point* O *deux séries projectives* L, M, N,...; L', M', N',... *les rayons* l, m, n,...; l', m', n',... *forment deux faisceaux projectifs superposés.*

Il est inutile de poursuivre plus loin cette énumération.

Les théorèmes VIII et IX suffisent pour établir toute la théorie des systèmes projectifs.

Les constructions dont nous avons fait usage pour démontrer le théorème VI permettraient de résoudre les problèmes fondamentaux des séries projectives; mais il est bien évident qu'en nous appuyant sur les théorèmes VIII et IX, nous reviendrons, sans peine, aux constructions ordinairement employées. Ces dernières sont plus simples que celles qui résultent du théorème VI.

Par exemple, on peut considérer tous les points d'une droite comme formant deux séries projectives superposées dont tous les éléments coïncident deux à deux. (Théor. IV. Coroll.)

Il en résulte que si l'on joint deux points O, O′ aux points d'une droite, on obtient deux faisceaux projectifs : autrement dit, en nous appuyant sur notre définition, *deux faisceaux perspectifs sont projectifs.*

Or, il est bien visible que ce résultat, combiné avec le théorème VIII, nous ramène aux procédés ordinaires.

CALCUL DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES DES ARCS DU PREMIER QUADRANT, DE TROIS EN TROIS DEGRÉS,

par M. l'Abbé E. GELIN, professeur au Collège Saint-Quirin, à Huy.

1. Nous nous proposons de calculer ici les lignes trigonométriques des arcs du premier quadrant, *de trois en trois degrés :* ces arcs sont les seuls, *en nombres entiers de degrés,* dont les lignes puissent être exprimées *sous forme finie,* et calculées *par de simples extractions de racines carrées* (*).

Il est évident que ce calcul se ramène à celui des sinus et des cosinus, ou même seulement à celui des sinus, d'arcs moindres que 45°. Car, connaissant l'une quelconque des six lignes trigonométriques, on peut en déduire les cinq autres; de plus, les lignes trigonométriques d'un arc supérieur à 45° sont égales aux lignes complémentaires du complément de cet arc.

2. *Le sinus d'un arc est la moitié de la corde qui sous-tend un arc double.* Or on a calculé, en Géométrie, les côtés des polygones réguliers de 3, 4, 5, 6, 10, 12... côtés, inscrits dans un cercle de rayon R, ou les cordes des arcs de 120°, 90°, 72°, 60°, 36°, 30°... En prenant les moitiés de ces cordes, et en faisant R = 1, on aura donc les sinus des arcs de 60°, 45°, 36°, 30°, 18°, 15°... On peut ensuite, de la connaissance des sinus et des cosinus de ces arcs, déduire celle des sinus et des cosinus des autres arcs du premier quadrant, de trois en trois degrés. Mais on peut aussi établir ces calculs d'une manière indépendante.

(*) Connaissant les lignes trigonométriques d'un arc a, on peut, par de simples extractions de racines carrées, calculer celles de tous les arcs compris dans la formule

$$x = \frac{ma}{2^n},$$

m et n étant deux nombres entiers quelconques.

1° L'arc de 45° étant égal à son complément, on a

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ.$$

Par suite, la relation

$$\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$$

donne

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

2° On a

$$2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ = \sin 60^\circ,$$

d'où, en observant que $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$,

$$\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2},$$

puis

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

3° On a encore

$$2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = \sin 36^\circ,$$
$$2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ = \sin 72^\circ,$$

d'où, en multipliant membre à membre, et en observant que $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ$,

$$4 \sin 18^\circ \cos 36^\circ = 1, \qquad (1)$$

équation qui peut s'écrire

$$\sin 54^\circ - \sin 18^\circ = \tfrac{1}{2},$$

ou

$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \tfrac{1}{2}. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent

$$\sin 18^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1), \qquad \cos 36^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1).$$

On a ensuite

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$
$$\sin 36^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

4° Connaissant les sinus et les cosinus des arcs de 18°, 30°, 36°, 45°, on peut calculer ceux des arcs de

6°=36°−30°, 9°=45°−36°, 12°=30°−18°, 15°=45°−30°, 27°=45°−18°.

On a, par exemple,

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}), \text{ etc.}\end{aligned}$$

5° On calculera ensuite les sinus et les cosinus des arcs de

$$3^\circ = 18^\circ - 15^\circ, \quad 21^\circ = 36^\circ - 15^\circ, \quad 33^\circ = 45^\circ - 12^\circ, \quad 39^\circ = 45^\circ - 6^\circ.$$

On a, par exemple,

$$\begin{aligned}\sin 3^\circ &= \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ \\ &= \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \cdot \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ &= \tfrac{1}{16}(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - 1) - \tfrac{1}{8}(\sqrt{3} - 1)\sqrt{5 + \sqrt{5}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3^\circ &= \cos 18^\circ \cos 15^\circ + \sin 18^\circ \sin 15^\circ \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \cdot \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ &= \tfrac{1}{8}(\sqrt{3} + 1)\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \tfrac{1}{16}(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{5} - 1), \text{ etc.}\end{aligned}$$

6° Enfin, on calculera les sinus et les cosinus des arcs de

$$24^\circ = 45^\circ - 21^\circ, \qquad 42^\circ = 45^\circ - 3^\circ.$$

Connaissant les sinus et les cosinus des arcs de 0° à 45°, de trois en trois degrés, on calculera les autres lignes des mêmes arcs au moyen des formules

$$\text{séc}\,a = \frac{1}{\cos a}, \quad \text{cosséc}\,a = \frac{1}{\sin a}, \quad \text{tg}\,a = \sin a\,\text{séc}\,a, \quad \text{cot}\,a = \frac{1}{\text{tg}\,a}.$$

3. Nous donnons ici les résultats de tous les calculs que nous venons d'indiquer (*) :

(*) C'est la première fois, pensons-nous, que l'on donne les valeurs, *à dénominateurs rationalisés*, des sécantes, des cosécantes, des tangentes et des cotangentes de tous les arcs multiples de 3°.

$$\sin 3^\circ = \cos 87^\circ = \tfrac{1}{16}\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right],$$

$$\cos 3^\circ = \sin 87^\circ = \tfrac{1}{16}\left[2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{5}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right],$$

$$\text{séc } 3^\circ = \text{cosséc } 87^\circ = \tfrac{1}{2}(\sqrt{10}-\sqrt{6})\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}-2+\sqrt{3}\right),$$

$$\text{cosséc } 3^\circ = \text{séc } 87^\circ = \tfrac{1}{2}(\sqrt{10}+\sqrt{6})\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right),$$

$$\text{tg } 3^\circ = \cot 87^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1\right),$$

$$\cot 3^\circ = \text{tg } 87^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right);$$

$$\sin 6^\circ = \cos 84^\circ = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1\right),$$

$$\cos 6^\circ = \sin 84^\circ = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$\text{séc } 6^\circ = \text{cosséc } 84^\circ = \sqrt{3}-\sqrt{5}-2\sqrt{5+\sqrt{5}},$$

$$\text{cosséc } 6^\circ = \text{séc } 84^\circ = \sqrt{15}+6\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{5}+2,$$

$$\text{tg } 6^\circ = \cot 84^\circ = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right),$$

$$\cot 6^\circ = \text{tg } 84^\circ = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{50+22\sqrt{5}}+3\sqrt{3}+\sqrt{15}\right);$$

$$\sin 9^\circ = \cos 81^\circ = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{10+\sqrt{2}}-2\sqrt{5}-\sqrt{5}\right),$$

$$\cos 9^\circ = \sin 81^\circ = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{10+\sqrt{2}}+2\sqrt{5}-\sqrt{5}\right),$$

$$\text{séc } 9^\circ = \text{cosséc } 81^\circ = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{2}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}\right),$$

$$\text{cosséc } 9^\circ = \text{séc } 81^\circ = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{2}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}\right),$$

$$\text{tg } 9^\circ = \cot 81^\circ = \sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}},$$

$$\cot 9^\circ = \text{tg } 81^\circ = \sqrt{5}+1+\sqrt{5+2\sqrt{5}};$$

$$\sin 12^\circ = \cos 78^\circ = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right),$$

$$\cos 12^\circ = \sin 78^\circ = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right),$$

$$\text{séc } 12^\circ = \text{cosséc } 78^\circ = \sqrt{15}-6\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{5}+2,$$

$$\text{cosséc } 12^\circ = \text{séc } 78^\circ = \sqrt{5}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3},$$

$$\text{tg } 12^\circ = \cot 78^\circ = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{50-22\sqrt{5}}\right),$$

$$\cot 12^\circ = \text{tg } 78^\circ = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right);$$

$$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}),$$
$$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}),$$
$$\text{séc}\, 15^\circ = \text{cosec}\, 75^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{2},$$
$$\text{cosec}\, 15^\circ = \text{séc}\, 75^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2},$$
$$\operatorname{tg} 15^\circ = \cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3},$$
$$\cot 15^\circ = \operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3};$$

$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1),$$
$$\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$
$$\text{séc}\, 18^\circ = \text{cosec}\, 72^\circ = \tfrac{1}{5}\sqrt{50 - 10\sqrt{5}},$$
$$\text{cosec}\, 18^\circ = \text{séc}\, 72^\circ = \sqrt{5} + 1,$$
$$\operatorname{tg} 18^\circ = \cot 72^\circ = \tfrac{1}{5}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}},$$
$$\cot 18^\circ = \operatorname{tg} 72^\circ = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}};$$

$$\sin 21^\circ = \cos 69^\circ = \tfrac{1}{16}\Big[2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5} - \sqrt{5} - (\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\Big],$$
$$\cos 21^\circ = \sin 69^\circ = \tfrac{1}{16}\Big[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1) + 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5 - \sqrt{5}}\Big],$$
$$\text{séc}\, 21^\circ = \text{cosec}\, 69^\circ = \tfrac{1}{2}(\sqrt{10} - \sqrt{6})\Big(2 + \sqrt{3} - \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\Big),$$
$$\text{cosec}\, 21^\circ = \text{séc}\, 69^\circ = \tfrac{1}{2}(\sqrt{10} + \sqrt{6})\Big(\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} + 2 - \sqrt{3}\Big),$$
$$\operatorname{tg} 21^\circ = \cot 69^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{3}+1)\Big(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1\Big),$$
$$\cot 21^\circ = \operatorname{tg} 69^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{3}-1)\Big(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1\Big);$$

$$\sin 24^\circ = \cos 66^\circ = \tfrac{1}{8}\Big(\sqrt{15} + \sqrt{3} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\Big),$$
$$\cos 24^\circ = \sin 66^\circ = \tfrac{1}{8}\Big(\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{5} + 1\Big),$$
$$\text{séc}\, 24^\circ = \text{cosec}\, 66^\circ = \sqrt{15 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 2,$$
$$\text{cosec}\, 24^\circ = \text{séc}\, 66^\circ = \sqrt{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{5},$$
$$\operatorname{tg} 24^\circ = \cot 66^\circ = \tfrac{1}{2}\Big(\sqrt{50 + 22\sqrt{5}} - 3\sqrt{3} - \sqrt{15}\Big),$$
$$\cot 24^\circ = \operatorname{tg} 66^\circ = \tfrac{1}{2}\Big(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{15} - \sqrt{3}\Big);$$

$$\sin 27^\circ = \cos 63^\circ = \tfrac{1}{8}\left(2\sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{10} + \sqrt{2}\right),$$
$$\cos 27^\circ = \sin 63^\circ = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{5} + \sqrt{10} - \sqrt{2}\right),$$
$$\text{séc}\,27^\circ = \text{cosséc}\,63^\circ = \tfrac{1}{2}\left(2\sqrt{5-\sqrt{5}} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}\right),$$
$$\text{cosséc}\,27^\circ = \text{séc}\,63^\circ = \tfrac{1}{2}\left(2\sqrt{5-\sqrt{5}} + 3\sqrt{2} - \sqrt{10}\right),$$
$$\text{tg}\,27^\circ = \cot 63^\circ = \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5-2\sqrt{5}},$$
$$\cot 27^\circ = \text{tg}\,63^\circ = \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5-2\sqrt{5}};$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \tfrac{1}{2},$$
$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$
$$\text{séc}\,30^\circ = \text{cosséc}\,60^\circ = \tfrac{2}{3}\sqrt{3},$$
$$\text{cosséc}\,30^\circ = \text{séc}\,60^\circ = 2,$$
$$\text{tg}\,30^\circ = \cot 60^\circ = \tfrac{1}{3}\sqrt{3},$$
$$\cot 30^\circ = \text{tg}\,60^\circ = \sqrt{3};$$

$$\sin 33^\circ = \cos 57^\circ = \tfrac{1}{16}\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) + 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right],$$
$$\cos 33^\circ = \sin 57^\circ = \tfrac{1}{16}\left[2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}} - (\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right],$$
$$\text{séc}\,33^\circ = \text{cosséc}\,57^\circ = \tfrac{1}{2}(\sqrt{10}-\sqrt{6})\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}} + 2 - \sqrt{3}\right),$$
$$\text{cosséc}\,33^\circ = \text{séc}\,57^\circ = \tfrac{1}{2}(\sqrt{10}+\sqrt{6})\left(2 + \sqrt{3} - \sqrt{5} + 2\sqrt{5}\right),$$
$$\text{tg}\,33^\circ = \cot 57^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)\left(\sqrt{10}+2\sqrt{5}+\sqrt{5}+1\right),$$
$$\cot 33^\circ = \text{tg}\,57^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{10}+2\sqrt{5}-\sqrt{5}-1\right);$$

$$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$
$$\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1),$$
$$\text{séc}\,36^\circ = \text{cosséc}\,54^\circ = \sqrt{5} - 1,$$
$$\text{cosséc}\,36^\circ = \text{séc}\,54^\circ = \tfrac{1}{5}\sqrt{50+10\sqrt{5}},$$
$$\text{tg}\,36^\circ = \cot 54^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}},$$
$$\cot 36^\circ = \text{tg}\,54^\circ = \tfrac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}};$$

$$\sin 39^\circ = \cos 51^\circ = \tfrac{1}{16}\Big[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\Big],$$

$$\cos 39^\circ = \sin 51^\circ = \tfrac{1}{16}\Big[2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}} + (\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\Big],$$

$$\text{séc } 39^\circ = \text{cosec } 51^\circ = \tfrac{1}{2}(\sqrt{10}+\sqrt{6})\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}} - 2 + \sqrt{3}\right),$$

$$\text{cosec } 39^\circ = \text{séc } 51^\circ = \tfrac{1}{2}(\sqrt{10}-\sqrt{6})\left(2 + \sqrt{3} + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\right),$$

$$\text{tg } 39^\circ = \cot 51^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1\right),$$

$$\cot 39^\circ = \text{tg } 51^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1\right);$$

$$\sin 42^\circ = \cos 48^\circ = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1\right),$$

$$\cos 42^\circ = \sin 48^\circ = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{15} - \sqrt{3}\right),$$

$$\text{séc } 42^\circ = \text{cosec } 48^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}} - \sqrt{3},$$

$$\text{cosec } 42^\circ = \text{séc } 48^\circ = \sqrt{15-6\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 2,$$

$$\text{tg } 42^\circ = \cot 48^\circ = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{15} + \sqrt{3} - \sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$

$$\cot 42^\circ = \text{tg } 48^\circ = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - \sqrt{15} + \sqrt{50-22\sqrt{5}}\right);$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\text{séc } 45^\circ = \text{cosec } 45^\circ = \sqrt{2},$$

$$\text{tg } 45^\circ = \cot 45^\circ = 1 \text{ (*)}.$$

(*) En général, étant donnée l'une quelconque des six lignes trigonométriques d'un arc multiple de 3°, on peut se proposer de déterminer les cinq autres.

On peut aussi former les équations, à coefficients entiers, dont chacune de ces lignes est racine.

Par exemple, les huit lignes

$$\sin 3^\circ,\ \sin 21^\circ,\ \sin 33^\circ,\ \sin 39^\circ,\ \cos 3^\circ,\ \cos 21^\circ,\ \cos 33^\circ,\ \cos 39^\circ,$$

sont racines de l'équation

$$65536x^{16} - 262144x^{14} + 430080x^{12} - 372736x^{10} + 182784x^8 - 50176x^6 + 7040x^4 - 384x^2 + 1 = 0.$$

De même, les huit lignes

$$\text{tg } 3^\circ,\ \text{tg } 21^\circ,\ \text{tg } 33^\circ,\ \text{tg } 39^\circ,\ \cot 3^\circ,\ \cot 21^\circ,\ \cot 33^\circ,\ \cot 39^\circ,$$

sont racines de l'équation

$$x^8 - 16x^7 - 60x^6 + 16x^5 + 134x^4 + 16x^3 - 60x^2 - 16x + 1 = 0.$$

QUESTIONS DIVERSES

DE

TRIGONOMÉTRIE

PAR

L'ABBÉ E. GELIN

Professeur au Collège Saint-Quirin à Huy (*)

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES ENTRE LES TROIS ANGLES D'UN TRIANGLE RECTILIGNE.

1. On sait que l'on a, entre les trois angles A, B, C d'un triangle rectiligne, la relation

$$A + B + C = \pi.$$

On déduit, de cette relation, un grand nombre de formules remarquables, parmi lesquelles nous signalerons les suivantes :

$$[1] \quad \begin{aligned} &\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C, \\ &\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C, \\ &\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C, \\ &\cos A + \cos B - \cos C = -1 + 4\cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C; \end{aligned}$$

(*) Ces questions sont extraites des *Éléments de Trigonométrie plane et sphérique*, par M. l'abbé E. GELIN, professeur au College Saint-Quirin à Huy, ouvrage dont le manuscrit a été couronné par l'Académie royale de Belgique, sur le rapport de M. E. CATALAN (prix DE KEYN).

[2]
$$\begin{aligned}
&\sin^2\tfrac{1}{2}A + \sin^2\tfrac{1}{2}B + \sin^2\tfrac{1}{2}C = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C,\\
&\sin^2\tfrac{1}{2}A + \sin^2\tfrac{1}{2}B \quad \sin^2\tfrac{1}{2}C = 1 - 2\cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C,\\
&\cos^2\tfrac{1}{2}A + \cos^2\tfrac{1}{2}B + \cos^2\tfrac{1}{2}C = 2 + 2\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C,\\
&\cos^2\tfrac{1}{2}A + \cos^2\tfrac{1}{2}B - \cos^2\tfrac{1}{2}C = 2\cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C;
\end{aligned}$$

[3]
$$\begin{aligned}
&\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C,\\
&\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4\cos A \cos B \sin C,\\
&\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C,\\
&\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4\sin A \sin B \cos C;
\end{aligned}$$

[4]
$$\begin{aligned}
&\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C,\\
&\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A \sin B \cos C,\\
&\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C,\\
&\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2\sin A \sin B \cos C;
\end{aligned}$$

[5]
$$\begin{aligned}
&\sin\tfrac{1}{2}A + \sin\tfrac{1}{2}B + \sin\tfrac{1}{2}C = -1 + 4\sin\tfrac{1}{4}(\pi - A)\sin\tfrac{1}{4}(\pi - B)\sin\tfrac{1}{4}(\pi - C),\\
&\sin\tfrac{1}{2}A + \sin\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}C = -1 + 4\cos\tfrac{1}{4}(\pi - A)\cos\tfrac{1}{4}(\pi - B)\sin\tfrac{1}{4}(\pi - C),\\
&\cos\tfrac{1}{2}A + \cos\tfrac{1}{2}B + \cos\tfrac{1}{2}C = 4\cos\tfrac{1}{4}(\pi - A)\cos\tfrac{1}{4}(\pi - B)\cos\tfrac{1}{4}(\pi - C),\\
&\cos\tfrac{1}{2}A + \cos\tfrac{1}{2}B - \cos\tfrac{1}{2}C = 4\sin\tfrac{1}{4}(\pi - A)\sin\tfrac{1}{4}(\pi - B)\cos\tfrac{1}{4}(\pi - C);
\end{aligned}$$

[6]
$$\begin{aligned}
&\sin^2\tfrac{1}{4}A + \sin^2\tfrac{1}{4}B + \sin^2\tfrac{1}{4}C = \tfrac{3}{2} - 2\cos\tfrac{1}{4}(\pi - A)\cos\tfrac{1}{4}(\pi - B)\cos\tfrac{1}{4}(\pi - C),\\
&\sin^2\tfrac{1}{4}A + \sin^2\tfrac{1}{4}B - \sin^2\tfrac{1}{4}C = \tfrac{1}{2} - 2\sin\tfrac{1}{4}(\pi - A)\sin\tfrac{1}{4}(\pi - B)\cos\tfrac{1}{4}(\pi - C),\\
&\cos^2\tfrac{1}{4}A + \cos^2\tfrac{1}{4}B + \cos^2\tfrac{1}{4}C = \tfrac{3}{2} + 2\cos\tfrac{1}{4}(\pi - A)\cos\tfrac{1}{4}(\pi - B)\cos\tfrac{1}{4}(\pi - C),\\
&\cos^2\tfrac{1}{4}A + \cos^2\tfrac{1}{4}B - \cos^2\tfrac{1}{4}C = \tfrac{1}{2} + 2\sin\tfrac{1}{4}(\pi - A)\sin\tfrac{1}{4}(\pi - B)\cos\tfrac{1}{4}(\pi - C);
\end{aligned}$$

[7]
$$\sum \sin kA \quad \begin{cases} -4\sin\tfrac{1}{2}kA \sin\tfrac{1}{2}kB \sin\tfrac{1}{2}kC, & k = 4m\\ 4\cos\tfrac{1}{2}kA \cos\tfrac{1}{2}kB \cos\tfrac{1}{2}kC, & k = 4m+1\\ 4\sin\tfrac{1}{2}kA \sin\tfrac{1}{2}kB \sin\tfrac{1}{2}kC, & k = 4m+2\\ 4\cos\tfrac{1}{2}kA \cos\tfrac{1}{2}kB \cos\tfrac{1}{2}kC, & k = 4m+3 \end{cases};$$

[8]
$$\sum \cos kA \quad \begin{cases} 1 + 4\cos\tfrac{1}{2}kA \cos\tfrac{1}{2}kB \cos\tfrac{1}{2}kC, & k = 4m\\ 1 + 4\sin\tfrac{1}{2}kA \sin\tfrac{1}{2}kB \sin\tfrac{1}{2}kC, & k = 4m+1\\ 1 + 4\cos\tfrac{1}{2}kA \cos\tfrac{1}{2}kB \cos\tfrac{1}{2}kC, & k = 4m+2\\ 1 + 4\sin\tfrac{1}{2}kA \sin\tfrac{1}{2}kB \sin\tfrac{1}{2}kC, & k = 4m+3 \end{cases};$$

[9] $\sin^2 kA + \sin^2 kB + \sin^2 kC = 2 - 2(-1)^k \cos kA \cos kB \cos kC,$
$\cos^2 kA + \cos^2 kB + \cos^2 kC = 1 + 2(-1)^k \cos kA \cos kB \cos kC;$

[10] $\Sigma \sin(A + \tfrac{1}{2}B) = -1 + 4\cos\tfrac{1}{4}(A - B)\cos\tfrac{1}{4}(B - C)\cos\tfrac{1}{4}(C - A),$
$\Sigma \cos(A + \tfrac{1}{2}B) = -4\sin\tfrac{1}{4}(A - B)\sin\tfrac{1}{4}(B - C)\sin\tfrac{1}{4}(C - A);$

[11] $\Sigma \sin A \cos B \cos C = \sin A \sin B \sin C,$
$\Sigma \sin A \cos(B - C) = 4 \sin A \sin B \sin C,$
$\Sigma \cos A \sin B \sin C = 1 + \cos A \cos B \cos C,$
$\Sigma \cos A \cos(B - C) = 1 + 4 \cos A \cos B \cos C;$

[12] $\Sigma \sin^3 A \sin(B - C) = 0,$
$\Sigma \sin^3 A \cos(B - C) - 3 \sin A \sin B \sin C = 0,$
$\Sigma \cos^3 A \sin(B - C) + \sin(A - B)\sin(B - C)\sin(B - A) = 0,$
$\Sigma \cos^3 A \cos(B - C) + \cos(A - B)\cos(B - C)\cos(C - A)$
$- 3 \cos A \cos B \cos C - 1 = 0;$

[13] $\Sigma \sin 3A \sin(B - C) = 0,$
$\Sigma \sin 3A \cos(B - C) = 0,$
$\Sigma \cos 3A \sin(B - C) + 4 \sin(A - B)\sin(B - C)\sin(C - A) = 0,$
$\Sigma \cos 3A \cos(B - C) + 4 \cos(A - B)\cos(B - C)\cos(C - A) - 1 = 0;$

[14] $\Sigma \sin 3A \sin^3(B - C) = 0,$
$\Sigma \sin 3A \cos^3(B - C) - \sin 3A \sin 3B \sin 3C = 0,$
$\Sigma \cos 3A \sin^3(B - C) + 3 \sin(A - B)\sin B(- C)\sin(C - A) = 0,$
$\Sigma \cos 3A \cos^3(B - C) - 3 \cos(A - B)\cos B - C)\cos(C - A)$
$+ \cos 3A \cos 3B \cos 3C + 1 = 0;$

[15] $\Sigma \sin^3 A \sin^3(B - C) - 3 \Pi \sin A \sin(B - C) = 0,$
$\Sigma \sin A \sin^3(B - C) - 4 \Pi \sin A \sin(B - C) = 0,$
$\Sigma \sin A \sin 3(B - C) + 16 \Pi \sin A \sin(B - C) = 0,$
$\Sigma \sin^5 A \sin(B - C) + \Pi \sin A \sin(B - C) = 0;$

[16] $\Sigma \sin^3 A = 3 \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C + \cos\tfrac{3}{2}A \cos\tfrac{3}{2}B \cos\tfrac{3}{2}C,$
$\Sigma \cos^3 A = 1 + 3 \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C - \sin\tfrac{3}{2}A \sin\tfrac{3}{2}B \sin\tfrac{3}{2}C;$

[17] $\Sigma \sin^4 A = \tfrac{3}{2} + 2\cos A \cos B \cos C + \tfrac{1}{2}\cos 2A \cos 2B \cos 2C,$
$\Sigma \cos^4 A = \tfrac{1}{2} - 2\cos A \cos B \cos C + \tfrac{1}{2}\cos 2A \cos 2B \cos 2C;$

$$1 + \cos A \cos B \cos C$$

$$= \sin^2 A + \sin B \sin C \cos A - \frac{\sin^3 A \cos B - \sin^3 B \cos A}{\sin(A - B)}$$

[18] $$- \sin^2 B + \sin C \sin A \cos B = \frac{\sin^3 B \cos C - \sin^3 C \cos B}{\sin(B - C)}$$

$$- \sin^2 C + \sin A \sin B \cos C = \frac{\sin^3 C \cos A - \sin^3 A \cos C}{\sin(C - A)};$$

$$\operatorname{tg} kA + \operatorname{tg} kB + \operatorname{tg} kC = \operatorname{tg} kA \operatorname{tg} kB \operatorname{tg} kC,$$

[19] $$\operatorname{tg} kA - \cot kB - \cot kC = \operatorname{tg} kA \cot kB \cot kC,$$

$$\cot kA \cot kB + \cot kB \cot kC + \cot kC \cot kA = 1;$$

$$\cot \tfrac{1}{2} A + \cot \tfrac{1}{2} B + \cot \tfrac{1}{2} C = \cot \tfrac{1}{2} A \cot \tfrac{1}{2} B \cot \tfrac{1}{2} C,$$

[20] $$\cot \tfrac{1}{2} A - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \cot \tfrac{1}{2} A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C,$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = 1;$$

[21]
$$\cot kA + \cot kB + \cot kC = \frac{-(-1)^k + \cos kA \cos kB \cos kC}{\sin kA \sin kB \sin kC},$$

$$\cot kA - \operatorname{tg} kB - \operatorname{tg} kC = \frac{(-1)^k + \cos kA \sin kB \sin kC}{\sin kA \cos kB \cos kC},$$

$$\Sigma \operatorname{tg} kA \operatorname{tg} kB = 1 - (-1)^k \operatorname{séc} kA \operatorname{séc} kB \operatorname{séc} kC;$$

[22]
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{1 + \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C}{\cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C},$$

$$\cot \tfrac{1}{2} A + \cot \tfrac{1}{2} B - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{1 - \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C}{\sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C},$$

$$\Sigma \cot \tfrac{1}{2} A \cot \tfrac{1}{2} B = 1 + \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2} A \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2} B \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2} C.$$

Dans ces formules, k représente un nombre entier quelconque, positif ou négatif [*].

[*] Plusieurs des formules précédentes sont nouvelles. On en obtient d'autres, si, au lieu de A, B, C, on met $\frac{\pi}{2} - A$, $\frac{\pi}{2} - B$, $\frac{\pi}{2} - C$, ou $\frac{1}{2}\pi - A$, $\frac{1}{2}\pi - B$, $\frac{1}{2}\pi - C$, ou, plus généralement,

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - A, \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - B, \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - C,$$

k étant un nombre quelconque.

COMMENT, DES FORMULES DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE, ON PEUT DÉDUIRE CELLES DE LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

2. Soient a, b, c les côtés d'un triangle sphérique ABC, évalués en parties de la circonférence; soient a', b', c' les longueurs des mêmes côtés, évaluées au moyen d'une unité linéaire quelconque, et soit R le rayon de la sphère, évalué au moyen de la même unité. Si l'on suppose que le rayon R de la sphère augmente indéfiniment, *les longueurs* a', b', c' *des côtés du triangle restant constantes,* les arcs $a = \frac{a'}{R}$, $b = \frac{b'}{R}$, $c = \frac{c'}{R}$ tendront vers zéro, et le triangle sphérique ABC se rapprochera de plus en plus d'un certain triangle rectiligne A'B'C', qui aurait pour côtés a', b', c'. Les formules relatives au triangle sphérique ABC seront donc applicables, pour R infini, au triangle rectiligne A'B'C'.

Or on a

$$\lim(R\sin a) = \lim\left(R a.\frac{\sin a}{a}\right) = a'\left(\lim\frac{\sin a}{a}\right) = a';$$

$$\lim(R\operatorname{tg} a) = \lim\left(R a.\frac{\operatorname{tg} a}{a}\right) = a'\left(\lim\frac{\operatorname{tg} a}{a}\right) = a';$$

$$\lim(R\sin\tfrac{1}{2}a) = \frac{a'}{2}, \text{ etc.}$$

Cela posé, les formules

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A,$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C'}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)'}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}p\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p-a)\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p-b)\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p-c)}, \text{ etc.,}$$

ou

$$(R\sin\tfrac{1}{2}a)^2 = (R\sin\tfrac{1}{2}b)^2 + (R\sin\tfrac{1}{2}c)^2 - \frac{2}{R^2}\cdot(R\sin\tfrac{1}{2}b)^2\cdot(R\sin\tfrac{1}{2}c)^2$$
$$- \tfrac{1}{2}(R\sin b)\cdot(R\sin c)\cdot\cos A,$$
$$\frac{R\sin a}{\sin A} = \frac{R\sin b}{\sin B} = \frac{R\sin c}{\sin C},$$
$$\frac{R\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{R\operatorname{tg}\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{R\sin(p-b)\cdot R\sin(p-c)}{R\sin b\cdot R\sin c}},$$
$$\frac{ABC}{4}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{ABC}{4R^2}}{\frac{ABC}{4R^2}} = \sqrt{R\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}p\cdot R\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p-a)\cdot R\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p-b)\cdot R\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p-c)},\ \text{etc.},$$

donnent, pour R infini,

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c'\cos A,$$
$$\frac{a'}{\sin A} = \frac{b'}{\sin B} = \frac{c'}{\sin C'}$$
$$\frac{a'+b'}{c'} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p'-b')(p'-c')}{b'c'}},$$
$$A'B'C' = \sqrt{p'(p'-a')(p'-b')(p'-c')},\ \text{etc.}\ (*).$$

(*) Soient encore a, b, c, d les côtés, m, n les diagonales et τ l'angle des diagonales d'un quadrilatère sphérique convexe. On a

$$\cos a\cos c - \cos b\cos d = \sin m\sin n\cos\tau.$$

Si l'on écrit cette relation sous la forme

$$2(R\sin\tfrac{1}{2}b)^2 + 2(R\sin\tfrac{1}{2}d)^2 - \frac{4}{R^2}(R\sin\tfrac{1}{2}b)^2(R\sin\tfrac{1}{2}d)^2$$
$$- 2(R\sin\tfrac{1}{2}a)^2 - 2(R\sin\tfrac{1}{2}c)^2 + \frac{4}{R^2}(R\sin\tfrac{1}{2}a)^2(R\sin\tfrac{1}{2}c)^2,$$
$$= (R\sin m)\cdot(R\sin n)\cos\tau,$$

et que l'on suppose R infini, on obtient la relation

$$b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = 2mn\cos\tau$$

entre les côtés a, b, c, d, les diagonales m, n et l'angle τ des diagonales d'un quadrilatère rectiligne convexe (*Mathesis*, tome VIII, page 52).

RÉSOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ (*).

3. Si, dans l'équation générale du troisième degré

$$X^3 + AX^2 + BX + C = 0,$$

on pose $X = x - \frac{1}{3}A$, on est ramené à une équation de la forme

$$x^3 + px + q = 0, \qquad (E)$$

où $p = B - \frac{1}{3}A^2$, $q = C - \frac{1}{3}AB + \frac{2}{27}A^3$. Il suffira donc de considérer cette dernière équation, dans laquelle les coefficients p et q seront supposés réels. Il est évident que cette équation sera résolue, si, après avoir multiplié l'inconnue x par un facteur convenable, on peut l'identifier avec une équation du troisième degré, *dont les racines soient connues.*

4. Considérons, en premier lieu, l'équation

$$z^3 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{4}\sin\alpha = 0, \qquad (A)$$

qui donne le sinus du tiers d'un arc α, quand on connaît le sinus de cet arc. On sait que cette équation admet les trois racines réelles

$$z_1 = \sin\tfrac{1}{3}\alpha, \qquad z_2 = \sin\tfrac{1}{3}(\pi - \alpha), \qquad z_3 = -\sin\tfrac{1}{3}(\pi + \alpha).$$

Pour identifier l'équation (E) avec l'équation (A), changeons, dans l'équation (E), x en λz; il viendra

$$z^3 + \frac{p}{\lambda^2}z + \frac{q}{\lambda^3} = 0,$$

équation qui devient identique avec l'équation (A), si l'on pose

$$\frac{p}{\lambda^2} = -\frac{3}{4}, \qquad \frac{q}{\lambda^3} = \frac{\sin\alpha}{4},$$

ou

$$[1] \qquad \lambda = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad \sin\alpha = \frac{q}{2}\sqrt{\left(-\frac{3}{p}\right)^3}.$$

(*) Nous avons simplifié cette résolution, dans le cas d'une racine réelle et de deux racines imaginaires, en la rendant indépendante de la considération des racines imaginaires de l'unité.

On voit que l'identification n'est possible que si l'on a $p < 0$, et $\sin^2\alpha < 1$, ou $4p^3 + 27q^2 < 0$. Cette dernière condition entraîne la première. Si elle est remplie, l'équation [E] admet les trois racines

[2] $$x_1 = \lambda \sin \tfrac{1}{3}\alpha, \quad x_2 = \lambda \sin \tfrac{1}{3}(\pi - \alpha), \quad x_3 = -\lambda \sin \tfrac{1}{3}(\pi + \alpha),$$

λ et α étant déterminés par les formules [1] (*).

5. Considérons, en second lieu, l'équation

$$z = \operatorname{tg}\alpha + \cot\alpha.$$

Si l'on élève cette équation au cube, on a

$$z^3 = \operatorname{tg}^3\alpha + \cot^3\alpha + 3(\operatorname{tg}\alpha + \cot\alpha),$$

ou

$$z^3 - 3z - (\operatorname{tg}^3\alpha + \cot^3\alpha) = 0. \qquad (B)$$

(*) Soit proposé, par exemple, de résoudre l'équation

$$x^3 - 499x + 599 = 0.$$

On a :

$$\sin\alpha = \frac{599}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{499}\right)^3}, \qquad \lambda = 2\sqrt{\frac{499}{3}},$$

$$x_1 = \lambda \sin \tfrac{1}{3}\alpha, \quad x_2 = \lambda \sin \tfrac{1}{3}(\pi - \alpha), \quad x_3 = -\lambda \sin \tfrac{1}{3}(\pi + \alpha).$$

$\log 3$	$0{\cdot}4771213$
$\log 499$	$2{\cdot}6981005$ —
$\log \frac{3}{499}$	$\bar{3}{\cdot}7790208$
$\log \sqrt{\frac{3}{499}}$	$\bar{2}{\cdot}8895104$
$\log \sqrt{\left(\frac{3}{499}\right)^3}$	$4{\cdot}6085312$
$\log 599$	$2{\cdot}7774268$
$\log 2$	$0{\cdot}3010300$ —
$\log \sin\alpha$	$\bar{1}{\cdot}1449280$
α	$8^\circ\ 1'31{\cdot}77''$
$\frac{1}{3}\alpha$	$2^\circ 40'30{\cdot}59''$
$\frac{1}{3}(\pi - \alpha)$	$57\ 19\ 29{\cdot}41$
$\frac{1}{3}(\pi + \alpha)$	$62\ 40\ 30{\cdot}59$

$\log 2$	$0{\cdot}3010300$
$\log \sqrt{\frac{3}{499}}$	$\bar{2}{\cdot}8895104$ —
$\log \lambda$	$1{\cdot}4115196$
$\log \sin \frac{1}{3}\alpha$	$\bar{2}{\cdot}6690700$
$\log \sin \frac{1}{3}(\pi - \alpha)$	$\bar{1}{\cdot}9251805$
$\log \sin \frac{1}{3}(\pi + \alpha)$	$1{\cdot}9486175$
$\log x_1$	$0{\cdot}0805896$
$\log x_2$	$1{\cdot}3367001$
$\log x_3$	$1{\cdot}3601371$ n

$$x_1 = 1{\cdot}20390$$
$$x_2 = 21{\cdot}71201$$
$$x_3 = -22{\cdot}91591$$

Cette dernière équation, divisée par $z - (\operatorname{tg}\alpha + \cot\alpha)$, donne

$$z^2 + (\operatorname{tg}\alpha + \cot\alpha)\, z + (\operatorname{tg}^2\alpha + \cot^2\alpha - 1) = 0,$$

en sorte qu'elle admet les trois racines, la première réelle et les deux autres imaginaires,

$$z_1 = \operatorname{tg}\alpha + \cot\alpha, \quad z_2 \text{ et } z_3 = -\tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha + \cot\alpha) \pm \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha - \cot\alpha)\sqrt{-3},$$

ou, sous une autre forme,

$$z_1 = 2\operatorname{cosec} 2\alpha, \quad z_2 \text{ et } z_3 = -\operatorname{cosec} 2\alpha \mp i\sqrt{3}\cot 2\alpha.$$

Pour identifier l'équation (E) avec l'équation (B), changeons, dans l'équation (E), x en λz; il viendra

$$z^3 + \frac{p}{\lambda^2} z + \frac{q}{\lambda^3} = 0,$$

équation qui devient identique avec l'équation (B), si l'on pose

$$\frac{p}{\lambda^2} = -3, \qquad \frac{q}{\lambda^3} = -(\operatorname{tg}^3\alpha + \cot^3\alpha),$$

ou

$$\lambda = \sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad \operatorname{tg}^3\alpha + \cot^3\alpha = -q\sqrt{\left(-\frac{3}{p}\right)^3},$$

ou, en posant $\operatorname{tg}^3\alpha = \operatorname{tg}\varphi$,

[3] $$\lambda = \sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad \sin 2\varphi = -\frac{2}{q}\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}.$$

On voit que l'identification n'est possible que si l'on a $p < 0$, et $\sin^2\varphi < 1$, ou $4p^3 + 27q^2 > 0$. Si ces deux conditions sont remplies, l'équation (E) admet les trois racines, la première réelle et les deux autres imaginaires,

[4] $$x_1 = 2\lambda \operatorname{cosec} 2\alpha, \quad x_2 \text{ et } x_3 = -\lambda \operatorname{cosec} 2\alpha \mp \lambda i\sqrt{3}\cot 2\alpha,$$

λ et α étant déterminés par les formules [354] (*).

(*) Par exemple, l'équation

$$x^3 - x + 1 = 0$$

a pour racines

$$x_1 = -1{\cdot}324718, \qquad x_2 \text{ et } x_3 = 0{\cdot}662359 \pm 0{\cdot}562280\, i.$$

6. Considérons, en troisième lieu, l'équation

$$z = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cot}\alpha.$$

Si l'on élève cette équation au cube, on a

$$z^3 = \operatorname{tg}^3\alpha - \operatorname{cot}^3\alpha - 3(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cot}\alpha),$$

ou

$$z^3 + 3z - (\operatorname{tg}^3\alpha - \operatorname{cot}^3\alpha) = 0. \qquad (C)$$

Cette dernière équation, divisée par $z - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cot}\alpha)$, donne

$$z^2 + (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cot}\alpha)\, z + (\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{cot}^2\alpha + 1) = 0,$$

en sorte qu'elle admet les trois racines, la première réelle et les deux autres imaginaires,

$$z_1 = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cot}\alpha, \quad z_2 \text{ et } z_3 = -\tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cot}\alpha) \pm \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cot}\alpha)\sqrt{-3},$$

ou, sous une autre forme,

$$z_1 = -2\operatorname{cot} 2\alpha, \quad z_2 \text{ et } z_3 = \operatorname{cot} 2\alpha \pm i\sqrt{3}\operatorname{cosec} 2\alpha.$$

Pour identifier l'équation (E) avec l'équation (C), changeons, dans l'équation (E), x en λz; il viendra

$$z^3 + \frac{p}{\lambda^2} z + \frac{q}{\lambda^3} = 0,$$

équation qui devient identique avec l'équation (C), si l'on pose

$$\frac{p}{\lambda^2} = +3, \qquad \frac{q}{\lambda^3} = -(\operatorname{tg}^3\alpha - \operatorname{cot}^3\alpha),$$

ou

$$\lambda = \sqrt{\frac{p}{3}}, \qquad \operatorname{tg}^3\alpha - \operatorname{cot}^3\alpha = -q\sqrt{\left(\frac{3}{p}\right)^3},$$

ou, en posant $\operatorname{tg}^3\alpha = \operatorname{tg}\varphi$,

[5] $$\lambda = \sqrt{\frac{p}{3}}, \qquad \operatorname{cot} 2\varphi = \frac{q}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{p}\right)^3}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}.$$

On voit que l'identification est toujours possible si l'on a $p > 0$.

Si cette condition est remplie, l'équation (E) admet les trois racines, la première réelle et les deux autres imaginaires,

[6] $$x_1 = -2\lambda\cot 2\alpha, \quad x_2 \text{ et } x_3 = \lambda\cot 2\alpha \pm \lambda i\sqrt{3}\,\operatorname{cosec} 2\alpha,$$

λ et α étant déterminés par les formules [5] (*).

7. Toute la discussion qui précède peut être résumée dans le tableau suivant :

Équation : $x^3 + px + q = 0$.

$p < 0$	$4p^3 + 27q^2 < 0$. . .	Trois racines réelles.
	$4p^3 + 27q^2 > 0$. . .	Une racine réelle et deux racines imaginaires.
$p > 0$		Une racine réelle et deux racines imaginaires (**).

On peut, dans chaque cas, vérifier que les racines x_1, x_2, x_3 satisfont aux relations

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p,$$
$$x_1x_2x_3 = -q.$$

THÉORÈMES SUR LES MAXIMUMS ET LES MINIMUMS.

8. THÉORÈME I. *Si plusieurs arcs variables, positifs et moindres qu'une demi-circonférence, ont une somme constante, le produit ou la somme des sinus de ces arcs est maximum, et le produit ou la somme des cosécantes est minimum, lorsque tous ces arcs sont égaux.*

(*) Par exemple, l'équation

$$x^3 + x + 1 = 0$$

a pour racines

$$x_1 = -0{\cdot}682328, \quad x_2 \text{ et } x_3 = 0{\cdot}341164 \pm 1{\cdot}161541\,i.$$

(**) Si $4p^3 + 27q^2 = 0$, on a

$$x_1 = x_2 = -\frac{3q}{2p}, \quad x_3 = \frac{3q}{p}.$$

Si $p = 0$, on a

$$x_1 = \sqrt[3]{-q}, \quad x_2 \text{ et } x_3 = \tfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{-q}.$$

et a − k *sont deux arcs positifs*

$\sin(a + h)\sin(a - k)$.

$\sin(a + h) + \sin(a - k)$.

$\text{cosec}(a + h)\,\text{cosec}(a - k)$.

$\text{cosec}(a + h) + \text{cosec}\,a - k)$.

$\cos(h + k) - \cos(2a + h - k)$,

$\cos(h + k)$,

$2\sin\tfrac{1}{2}(2a + h - k)\cos\tfrac{1}{2}(h + k)$,

$2\sin\tfrac{1}{2}(2a + h - k)$, qui est positif,

$\cos\tfrac{1}{2}(h + k)$,

conséquence de l'inégalité (1); car la
verse du sinus de cet arc.
écrire :

$$\frac{\sin(a + h) + \sin(a - k)}{\sin(a + h)\sin(a - k)},$$

$$\frac{2\sin\tfrac{1}{2}(2a + h - k)\cos\tfrac{1}{2}(h + k)}{\cos^2\tfrac{1}{2}(h + k) - \cos^2\tfrac{1}{2}(2a + h - k)},$$

$2\sin\tfrac{1}{2}(2a + h - k)$, qui est positif,
leurs, qui sont aussi positifs,

$\cos\tfrac{1}{2}(h+k)[\cos^2\tfrac{1}{2}(h-k) - \cos^2\tfrac{1}{2}(2a+h-k)]$,

$\cos\tfrac{1}{2}(h-k) + \cos^2\tfrac{1}{2}(2a+h-k)] < 0$,

$\cos\tfrac{1}{2}(h + k)$,

Cela posé, soient x_1, x_2, x_3,... x_m m arcs variables, positifs et moindres qu'une demi-circonférence, ayant une somme constante ma. Je dis que le produit P des sinus de ces arcs est inférieur à $\sin^m a$, si tous les arcs ne sont pas égaux à a.

En effet, si tous les arcs ne sont pas égaux à a, il y a au moins un arc $a + h$ supérieur à a, et un arc $a - k$ inférieur à a. Or, si, sans changer les autres arcs, on remplace les arcs $a + h$ et $a - k$ par a et $a + h - k$, la somme de tous les arcs reste la même, tandis que, d'après l'inégalité (1), le produit P devient plus grand.

Si l'on opère sur le nouveau produit comme sur le premier, sur le troisième comme sur le second, et ainsi de suite, on arrive à un produit de sinus d'arcs tous égaux à a, et plus grand que tous les produits précédents : donc le maximum de P est $\sin^m a$.

On démontrerait de la même manière les autres parties du théorème.

9. THÉORÈME II. *Si plusieurs arcs variables, positifs et moindres qu'un quadrant, ont une somme constante, le produit ou la somme des cosinus de ces arcs est maximum, et le produit ou la somme des sécantes, la somme des tangentes ou des cotangentes est minimum, lorsque tous ces arcs sont égaux.*

Démontrons d'abord que, *si* a + h *et* a — k *sont deux arcs positifs, inférieurs à* $\frac{1}{2}\pi$, *on a les inégalités :*

$$(5)\quad \cos a \cos(a + h - k) > \cos(a + h)\cos(a - k),$$

$$(6)\quad \cos a + \cos(a + h - k) > \cos(a + h) + \cos(a - k),$$

$$(7)\quad \sec a \sec(a + h - k) < \sec(a + h)\sec(a - k),$$

$$(8)\quad \sec a + \sec(a + h - k) < \sec(a + h) + \sec(a - k),$$

$$(9)\quad \operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(a + h - k) < \operatorname{tg}(a + h) + \operatorname{tg}(a - k),$$

$$(10)\quad \cot a + \cot(a + h - k) < \cot(a + h) + \cot(a - k).$$

L'inégalité (5) peut s'écrire :

$$\cos(h - k) + \cos(2a + h - k) > \cos(h + k) + \cos(2a + h - k),$$

ou

$$\cos(h - k) > \cos(h + k),$$

ce qui est évident.

L'inégalité (6) peut s'écrire :

$$2\cos\tfrac{1}{2}(2a + h - k)\cos\tfrac{1}{2}(h - k) > 2\cos\tfrac{1}{2}(2a + h - k)\cos\tfrac{1}{2}(h + k),$$

ou, en supprimant le facteur $2\cos\frac{1}{2}(2a + h - k)$, qui est positif,

$$\cos\tfrac{1}{2}(h - k) > \cos\tfrac{1}{2}(h + k),$$

ce qui est évident.

L'inégalité (7) est une conséquence de l'inégalité (5); car la sécante d'un arc est l'inverse du cosinus de cet arc.

L'inégalité (8) peut s'écrire :

$$\frac{\cos a + \cos(a + h - k)}{\cos a \cos(a + h - k)} < \frac{\cos(a + h) + \cos(a - k)}{\cos(a + h)\cos(a - k)},$$

ou

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}(2a + h - k)\cos\frac{1}{2}(h - k)}{\cos^2\frac{1}{2}(h - k) - \sin^2\frac{1}{2}(2a + h - k)} < \frac{2\cos\frac{1}{2}(2a + h - k)\cos\frac{1}{2}(h + k)}{\cos^2\frac{1}{2}h + k) - \sin^2\frac{1}{2}(2a + h - k)},$$

ou, en supprimant le facteur $2\cos\frac{1}{2}(2a + h - k)$, qui est positif, et en chassant les dénominateurs, qui sont aussi positifs,

$$\cos\tfrac{1}{2}(h-k)[\cos^2\tfrac{1}{2}(h+k) - \sin^2\tfrac{1}{2}(2a+h-k)] < \cos\tfrac{1}{2}h+k)[\cos^2\tfrac{1}{2}(h-k) - \sin^2\tfrac{1}{2}(2a+h-k)],$$

ou

$$[\cos\tfrac{1}{2}h+k) - \cos\tfrac{1}{2}h-k)][\cos\tfrac{1}{2}h+k)\cos\tfrac{1}{2}h-k + \sin^2\tfrac{1}{2}2a+h-k)] < 0,$$

ou

$$\cos\tfrac{1}{2}h - k) < \cos\tfrac{1}{2}h - k,$$

ce qui est évident.

L'inegalité (9) peut s'écrire :

$$\frac{\sin 2a - h - k}{\cos a \cos a - h - k} < \frac{\sin 2a - h - k}{\cos a - h \cos a - k},$$

ou, en supprimant le facteur $\sin 2a - h - k$, qui est positif,

$$\cos a \cos a - h - k < \cos a - h \cos a - k,$$

inegalite déjà demontree.

Enfin, l'inegalite 10 peut s'écrire :

$$\frac{\sin 2a - h - k}{\sin a \sin a - h - k} < \frac{\sin 2a - h - k}{\sin a - h \sin a - k},$$

ou, en supprimant le facteur $\sin(2a + h - k)$, qui est positif,

$$\sin a \sin(a + h - k) > \sin(a + h) \sin(a - k),$$

inégalité déjà démontrée.

Ces inégalités établies, on démontrera le théorème deuxième de la même manière que l'on a démontré le théorème premier.

10. THÉORÈME III. *Si plusieurs arcs variables positifs ont, pris ensemble, une somme constante, et, pris deux à deux, une somme non supérieure à un quadrant, le produit des tangentes de ces arcs est maximum, et le produit des cotangentes est minimum, lorsque tous ces arcs sont égaux.*

Démontrons d'abord que, *si* a + h *et* a — k *sont deux arcs variables positifs, dont la somme est inférieure à* $\frac{1}{2}\pi$, *on a les inégalités :*

$$(11) \qquad \operatorname{tg} a \operatorname{tg}(a + h - k) > \operatorname{tg}(a + h) \operatorname{tg}(a - k),$$

$$(12) \qquad \cot a \cot(a + h - k) < \cot(a + h) \cot(a - k).$$

L'inégalité (11) peut s'écrire :

$$\frac{\cos(h - k) - \cos(2a + h - k)}{\cos(h - k) + \cos(2a + h - k)} > \frac{\cos(h + k) - \cos(2a + h - k)}{\cos(h + k) + \cos(2a + h - k)},$$

ou, en chassant les dénominateurs, qui sont positifs,

$$2\cos(h - k)\cos(2a + h - k) > 2\cos(h + k)\cos(2a + h - k),$$

ou, en supprimant le facteur $\cos(2a + h - k)$, qui est positif,

$$\cos(h - k) > \cos(h + k),$$

ce qui est évident.

L'inégalité (12) est une conséquence de l'inégalité (11); car la cotangente d'un arc est l'inverse de la tangente de cet arc.

Ces inégalités établies, on démontrera le théorème troisième de la même manière que l'on a démontré le théorème premier.

Namur. — Imp. Wesmael-Charlier, rue de Fer. 51.

DE

LA LONGUEUR D'UNE LIGNE

PAR

Le lieutenant E. GOEDSEELS,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE MILITAIRE DE BELGIQUE.

Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*,
3me série, t. XVI, n° 7; 1888.

Bruxelles. — Imprimerie de F. HAYEZ.

RAPPORT DE M. P. MANSION.

« La note que j'ai l'honneur de présenter à la Classe avait été primitivement destinée à *Mathesis* par son auteur. Il m'a semblé qu'elle serait mieux à sa place dans les *Bulletins* de l'Académie, à cause des difficultés que présente la question qui y est traitée par M. Goedseels, d'une manière simple, rigoureuse et complète.

En 1843, comme on le sait, M. Catalan a fait observer, dans ses *Éléments de Géométrie*, qu'on ne peut avoir une idée précise des grandeurs géométriques, *longueur, aire, volume*, relatives aux lignes et aux surfaces courbes, à moins d'introduire, dans leur définition même, la notion de limite (*). Pour lui, par exemple, l'aire d'une courbe plane est la limite de l'aire d'un polygone variable, inscrit à la courbe et dont les côtés diminuent indéfiniment de manière à devenir moindres que toute grandeur donnée. Il définit d'une manière analogue les longueurs des lignes courbes, les aires des surfaces courbes et les volumes compris sous ces surfaces.

Quand il s'agit des aires planes, on démontre assez facilement que la limite de l'aire du polygone variable inscrit à la courbe est toujours la même, quelle que soit la manière dont ses côtés décroissent indéfiniment. Ainsi, pour fixer les idées, supposons que la courbe considérée ait pour équation, en coordonnées rectangulaires, $y = \psi x$, ψx étant une fonction positive, continue, ayant une seule

(*) Comparer Peyrard, Préface de la traduction des *OEuvres d'Archimède*.

valeur pour chaque valeur de x. L'aire de la figure comprise entre l'axe des x, les ordonnées ψx_0, ψX correspondant à x_0 et X, est la limite de l'aire du polygone inscrit variable dont les sommets ont pour abcisses équidifférentes $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = X$, aussi bien dans le cas où n prend les valeurs successives 2, 4, 8, 16,... (puissances successives de 2), que dans celui où $n = 3, 5, 7, 11, 13,...$ (nombres premiers impairs). On observera que dans ce dernier cas, les polygones inscrits successifs n'ont jamais de sommets communs.

Mais quand on veut traiter la question analogue relative à la longueur des lignes courbes, on rencontre des difficultés inattendues. Dans le cas où les polygones inscrits successifs, pour un certain mode défini de décroissement de leurs côtés, ont des sommets qui ne sont pas conservés dans les polygones considérés ultérieurement, on ne voit pas d'abord comment on peut prouver que le périmètre variable a une limite et que cette limite est la même pour un autre périmètre variable.

La plupart des auteurs ont esquivé la difficulté en ne considérant que des courbes ayant, en chaque point, une tangente et telles que cette tangente s'infléchit d'une manière continue quand on passe d'une extrémité de l'arc à l'autre. Dans ce cas, on ramène aisément la rectification des courbes planes ou gauches à la quadrature d'autres courbes et la question peut être regardée comme résolue.

Il y a quelques années, SCHEEFER a essayé de s'affranchir de la restriction relative à l'existence d'une tangente à inflexion continue d'un bout de la courbe à l'autre. Il a démontré que, si la fonction qui représente l'ordonnée de la courbe plane est continue et si la somme de ses oscillations est finie, les périmètres de tous les polygones

variables inscrits à côtés indéfiniment décroissants ont une limite unique et finie, *pourvu, toutefois, que chaque polygone variable varie seulement par addition de nouveaux sommets, sans suppression d'aucun de ceux qui ont servi antérieurement* (*).

M. JORDAN, dans la *Note* qui termine son beau *Cours d'Analyse*, a traité (nos 46-51) la question d'une manière plus générale, aussi pour les courbes planes. Il a montré que la limite des périmètres des polygones inscrits est encore unique, même si ces polygones varient non seulement par addition de nouveaux sommets, mais aussi par suppression d'anciens. Pour étendre à ces polygones la démonstration de Scheeffer, M. Jordan a été amené à introduire, dans son exposé, une quantité L, égale ou supérieure au périmètre de n'importe quel polygone inscrit et telle cependant qu'il y ait des périmètres qui soient plus grands que toute quantité inférieure à L. La considération de cette quantité L (limite supérieure des périmètres, dans le sens de Weierstrass) rend naturellement la démonstration de M. Jordan plus subtile que celle de Scheeffer, mais, comme nous venons de le dire, elle est plus complète.

Dans la Note que nous soumettons à l'Académie, M. Goedseels, sans connaître, semble-t-il, les recherches de

---

(*) *Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven* (Acta mathematica, 1884, t. V, pp. 49-82). Voir pp. 50-51, 54-56. C'est à la dernière ligne de la démonstration du théorème I, que s'introduit nécessairement la restriction que nous signalons dans le texte. Ni SCHEEFFER, ni M. JORDAN, ne s'occupent des courbes gauches auxquelles on peut pourtant étendre leurs démonstrations; en revanche, l'un et l'autre traitent, dans leurs recherches, de celles où l'ordonnée est une fonction discontinue de l'abscisse.

Scheeffer et de M. Jordan, a abordé, par une méthode nouvelle, la question de la longueur des lignes courbes continues, planes ou gauches. Le point de départ de son travail est le théorème suivant, dont il donne une démonstration élémentaire et rigoureuse : *On peut inscrire dans un arc de courbe, un polygone n'aboutissant pas aux extrémités de cet arc et ayant néanmoins un périmètre supérieur à la corde qui joint ces extrémités; tous les polygones inscrits, dont les côtés sont inférieurs à une quantité suffisamment petite, convenablement déterminée, jouissent de la même propriété.*

Au moyen d'un lemme ingénieux, relatif à la limite d'une variable toujours croissante, à part certaines oscillations, l'auteur déduit sans peine du théorème précédent les conséquences suivantes : 1° Le périmètre de tout polygone variable, inscrit à la courbe, a une limite finie ou croît indéfiniment, si ses côtés décroissent indéfiniment, d'après une loi déterminée quelconque; 2° le périmètre de tout autre polygone analogue a la même limite ou croît indéfiniment en même temps que le premier.

Ces théorèmes suffisent évidemment pour définir avec précision ce qu'on entend par longueur finie ou infinie d'un arc de courbe, et ils excluent la possibilité de courbes continues ayant une longueur indéterminée.

Comme on le voit, la petite Note de M. Goedseels élucide, d'une manière simple et complète, une question difficile de géométrie infinitésimale. Je propose donc à la Classe de vouloir bien en voter l'impression au *Bulletin* de la séance. » — Adopté.

DE LA LONGUEUR D'UNE LIGNE (*).

I. — LEMME. *Si, à tout terme u_n d'une suite indéfinie de quantités*

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\ldots u_n,\ldots,$$

en correspond un autre, de rang supérieur, à partir duquel chaque terme de la suite indéfinie surpasse u_n, le terme u_n tend vers une limite déterminée, ou croît au delà de toute limite, lorsque n augmente indéfiniment.

En effet, si, à partir d'un certain rang, chaque terme est supérieur au précédent, le lemme énoncé se confond avec le principe fondamental de la théorie des limites. Il n'en est plus de même, si la suite renferme indéfiniment des termes inférieurs à d'autres de rangs moins élevés.

Dans ce second cas, prenons parmi les termes de la suite u_0, u_1, ... etc., une suite indéfinie et croissante

$$v_0,\quad v_1,\quad v_2,\ldots v_n,\ldots$$

En vertu du principe fondamental déjà rappelé, v_n tend vers une certaine limite L, ou croît au delà de toute limite, lorsque n augmente indéfiniment.

Or, par hypothèse, à tout terme v_n correspond un

(*) Nous espérons examiner prochainement le cas où les coordonnées sont des fonctions discontinues de la variable indépendante t, et étendre à l'aire des surfaces courbes les considérations exposées dans ce petit travail.

terme u_{n+k} à partir duquel les termes de la première série surpassent tous v_n. De même, tout terme u_{n+k+r} est surpassé par un terme v_{n+q}.

Donc, si n, et par suite, $n + k + r$ augmentent indéfiniment, le terme u_{n+k+r}, compris entre v_n et v_{n+q}, converge vers L, ou croît au delà de toute limite, en même temps que v_n et v_{n+q}.

II. — On peut considérer toute ligne comme étant le lieu géométrique d'un point mobile, dont les coordonnées seraient des fonctions continues d'une même variable t,

$$x = F(t), \quad y = f(t), \quad z = \varphi(t),$$

telles, qu'à chaque valeur de t correspond une seule valeur pour x, y, z.

Désignons par a et b deux valeurs particulières de t, et par A et B les points correspondants.

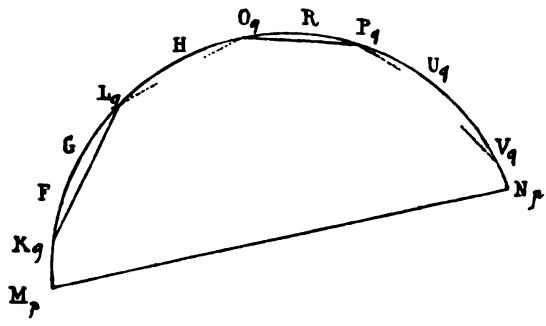
Le lieu géométrique des points de la courbe correspondant aux valeurs de t appartenant à l'intervalle (a, b) s'appelle l'arc AB de cette courbe.

Les points A et B sont appelés les extrémités de cet arc, et tout point de l'arc AB différent des deux extrémités est dit intermédiaire entre A et B.

III. — Ces préliminaires étant posés, inscrivons dans l'arc AB un polygone ACD ... B.

Puisque chaque côté de ce polygone est inférieur à la somme de ses projections sur les trois axes coordonnés, et que l'intervalle (a, b) peut être divisé en intervalles partiels, dans chacun desquels les oscillations des fonctions $F(t)$, $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont inférieures à une longueur $\frac{1}{3}d$ donnée d'avance, quelque petite qu'elle soit, on peut

prendre le polygone ACD ... B tel, que la distance entre deux points choisis arbitrairement sur tout arc sous-tendu par un côté du polygone, soit inférieur à d.



Soit M_pN_p un côté quelconque d'un polygone $AC_pD_p \ldots B$ correspondant à une valeur particulière, p, de d. Prenons arbitrairement sur l'arc M_pN_p un point fixe R, et représentons par δ une longueur inférieure à chacune des trois distances M_pR, RN_p, $(M_pR + RN_p - M_pN_p)$. Opérons de même sur chacun des côtés, et appelons ρ la plus petite des longueurs δ.

Donnons ensuite à d une nouvelle valeur $q < \frac{1}{4}\rho$. Quels que soient les points F, G, H, pris sur un arc quelconque sous-tendu par une corde inférieure à ρ, sur l'arc M_pR par exemple, on a

$$\text{périmètre } M_pFGHR > M_pR > \rho > 4q;$$

donc l'un des quatre côtés au moins de ce périmètre est supérieur à q. Le polygone $AC_qD_q \ldots B$ correspondant à $d = q$, a donc plus de trois sommets sur l'arc M_pR, et sur chacun des arcs analogues.

Partant de là, considérons la partie $K_1L_1 \dots O_1P_1 \dots U_1V_1$ du polygone $AC_1D_1 \dots B$, inscrite dans l'arc M_pN_p. Par hypothèse, deux points quelconques de la courbe, situés sur un arc sous-tendu par un côté de ce polygone, sont distants d'une quantité inférieure à q. On a donc

$$4q > M_pK_1 + O_1R + RP_1 + V_1N_p.$$

D'autre part, on a évidemment

$$\text{périmètre } M_pK_1L_1 \dots O_1RP_1 \dots V_1N_p > M_pR + RN_p,$$

et, d'après les définitions de ρ et de q,

$$M_pR + RN_p - M_pN_p > \rho,$$
$$\rho > 4q.$$

D'où, en additionnant ces quatre inégalités membre à membre, et en supprimant de part et d'autre les parties communes,

$$\text{périmètre } K_1L_1 \dots O_1 + \text{périmètre } P_1 \dots U_1V_1 - M_pN_p > 0,$$

ou

$$\text{périmètre } K_1L_1 \dots O_1 + \text{périmètre } P_1 \dots U_1V_1 > M_pN_p.$$

Ainsi, nous sommes parvenus à démontrer que pour tout polygone correspondant à une valeur de $d < \frac{1}{4}\rho$, le périmètre de la *partie* de ce polygone inscrite dans le segment de la courbe sous-tendu par la corde M_pN_p, est *supérieur à cette corde*. En ajoutant toutes les inégalités analogues à la dernière, puis rétablissant dans le premier membre les côtés manquants du polygone $A_1C_1D_1 \dots B$, il vient, *à fortiori*,

$$\text{périmètre } AC_1D_1 \dots U_1V_1B > \text{périmètre } AC_pD_p \dots B.$$

Remarque. — On sait que, dans la courbe plane dont l'ordonnée est représentée par la fonction de Weierstrass (*Journal de Crelle*, 1874, t. LXXIX, pp. 29-31), on peut diviser tout intervalle (a, b), quelque petit qu'il soit, en un nombre d'intervalles partiels tels, qu'on ait pour chacun de ceux-ci (excepté pour le dernier dont on ne peut rien affirmer), quelque grand que soit G,

$$\frac{k}{h} > \frac{G}{b-a},$$

$$\frac{MN}{h} = \sqrt{1+\frac{k^2}{h^2}} > \sqrt{1+\frac{G^2}{(b-a)^2}} > \frac{G}{b-a},$$

$$MN > h\frac{G}{b-a}$$

d'où l'on déduit facilement

$$\text{périmètre ACD} \ldots \text{B} > \text{G}.$$

La courbe dont l'ordonnée est représentée par la fonction de Weierstrass a donc, entre deux quelconques de ses points, une longueur infinie, dans le sens défini plus haut.

MATHESIS

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liège, Membre de la Société royale des Sciences de Liège, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON.

TOME NEUVIÈME
ANNÉE 1889.

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
49, RUE DES CHAMPS, 49

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1889

ABRÉVIATIONS.

B. B. Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

C. R. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

N. A. M. Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

N. C. M. Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

J. M. E. (ou J. M. S.). Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS et L. LÉVY.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué d'abord par BORCHARDT, puis par KRONECKER et WEIERSTRASS (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

MATHESIS

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE RÉCENTE;

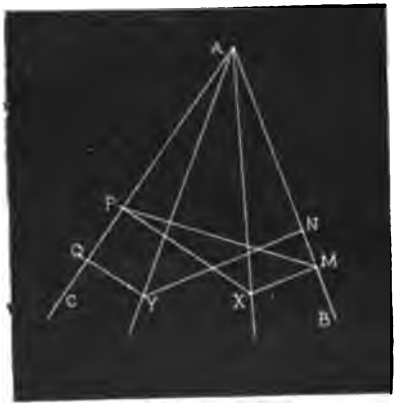
par M. J. Casey, LL. D., F. R. S., professeur à l'Université catholique d'Irlande (*).

SECTION I.

THÉORIE DES POINTS ISOGONAUX ET ISOTOMIQUES, DES LIGNES ANTIPARALLÈLES ET DES SYMÉDIANES.

Définition. *Deux droites* AX, AY *sont dites conjuguées isogonales par rapport à un angle* BAC, *lorsqu'elles font des angles égaux avec la bissectrice de cet angle.*

Proposition 1. *Si de deux points* X *et* Y *de deux droites conjuguées isogonales par rapport à un angle* BAC, *on abaisse des perpendiculaires* XM, YN, XP, YQ *sur les côtés :*



1° *Les rectangles* XM . YN, XP . YQ *sont égaux ;*

2° *Les points* M, N, P, Q *sont concycliques* (**) ;

3° MP *est perpendiculaire à* AY *et* NQ *à* AX.

Démonstration. 1° Évidemment,

$$XM : AX = YQ : AY,$$
$$AX : XP = AY : YN.$$

D'où, par multiplication, XM : XP = YQ : YN, ou XM . YN = XP . YQ.

2° De même, AM : AX = AQ : AY, AX : AP = AY : AN. Par conséquent, AM : AP = AQ : AN, AM . AN = AP . AQ. Donc les points M, N, P, Q sont concycliques.

(*) Chapitre supplémentaire de l'ouvrage intitulé : *A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid*, traduit sur la 5e édition (1888) et annoté par M. Fr. Falisse.

(**) C'est-à-dire, situés sur une même circonférence.

3° Puisque les angles AMX, APX, sont droits, AMXP est un quadrilatère *cyclique*(*); par conséquent, l'angle MAX = MPX. Mais l'angle MAX = YAQ; donc MPX = YAQ et comme PX est perpendiculaire sur AQ, AY est perpendiculaire sur MP. Semblablement, NQ est perpendiculaire sur AX.

Corollaire. *Si le rectangle formé par les perpendiculaires abaissées de deux points donnés sur l'un des côtés d'un angle est égal au rectangle formé par les perpendiculaires abaissées des mêmes points sur l'autre côté, les droites joignant le sommet de l'angle aux deux points, sont conjuguées isogonales par rapport à l'angle.*

Prop. 2. *Les droites conjuguées isogonales de trois droites concourantes* AX, BX, CX, *par rapport aux trois angles d'un triangle* ABC, *sont concourantes.*

Dém. Soient, respectivement, AY et BY les conjuguées isogonales de AX, BX. Joignons CY; il faut démontrer que CY est la droite conjuguée isogonale de CX.

D'après la prop. 1, 1°, les rectangles des perpendiculaires abaissées de X, Y sur les côtés AC, BC sont égaux au rectangle des perpendiculaires abaissées de X, Y sur AB.

Donc, ces rectangles sont égaux l'un à l'autre, et (prop. 1, cor. 1), les droites CX, CY sont isogonales par rapport à l'angle C.

Déf. *Les points* X, Y *sont appelés conjugués isogonaux* (**) *par rapport au triangle* ABC.

Cor. 1. *Si* X, Y *sont conjugués isogonaux par rapport à un triangle, les produits des distances de* X, Y *aux côtés du triangle sont égaux entre eux.*

Cor. 2. *Le point milieu de la droite* XY *est équidistant des projections des points* X, Y *sur les trois côtés du triangle.*

(*) C'est-à-dire, dont les sommets sont situés sur une même circonférence.

(**) Ou *points inverses* (Mathieu, de Longchamps, etc.)

Exercices. 1. La somme des angles BXC, BYC est $180^\circ + A$.

2. La droite joignant deux points quelconques, et la droite joignant leurs conjugués isogonaux par rapport à un triangle, sous-tendent à chaque sommet du triangle des angles qui sont égaux ou supplémentaires.

3. $\overline{AM}^2 : \overline{AN}^2 = BM.MC : BN.NC.$ (STEINER.)

4. Si les droites AX, AY, coupent le cercle circonscrit au triangle ABC en M', N', on a $AB.AC = AM.AN' = AM'.AN$.

5. Le conjugué isogonal du point M' est le point à l'infini sur la droite AN'.

6. Si trois droites menées par les sommets d'un triangle, coupent les côtés opposés en des points collinéaires(*), leurs conjuguées isogonales couperont ces mêmes côtés en des points collinéaires.

7. Si l'on construit intérieurement ou extérieurement sur les côtés d'un triangle ABC, trois triangles équilatéraux ABC', BCA', CAB', le conjugué isogonal du centre de *perspective*(**) de ABC et A'B'C' est un point commun aux trois cercles d'Apollonius(***) de ABC.

8. Si les droites MX, QY (fig. prop. 1) se coupent au point D, et les droites MP, NQ, au point E, les droites AD, AE sont isogonales par rapport à l'angle BAC.

9. Si D, E sont les points où deux droites conjuguées isogonales par rapport à l'angle BAC coupent la base BC du triangle BAC, et si les perpendiculaires menées à AB, AC aux points B et C, coupent les perpendiculaires menées en D et E à BC, respectivement, aux points D' et E', D'' et E'', démontrer que

$$BD'.BE' : CD''.CE'' = \overline{AB}^4 : \overline{AC}^4.$$

10. Dans le même cas, $BD.BE : CD.CE = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$.

DÉF. *Les droites* AB', AC', *sont dites conjugées isotomiques par rapport au côté* BC *du triangle* ABC, *lorsque les segments* BB', CC' *interceptés sur la base* BC *sont égaux* (fig. 1 de la page suivante).

Prop. 3. *Si dans le plan d'un triangle, deux points* X, Y *sont tels que les droites* AX, AY *soient conjuguées isotomiques par rapport au côté* BC; BX, BY, *par rapport au côté* AC; *alors* CX, CY *sont conjuguées isotomiques par rapport à* AB (fig. 2 de la page suivante).

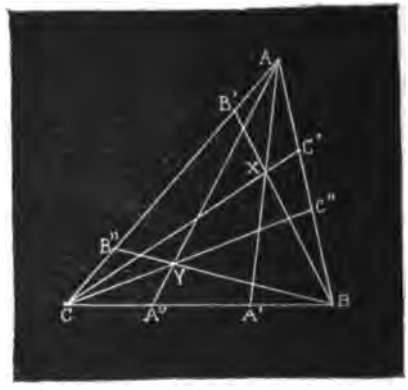
(*) C'est-à-dire, en des points situés en ligne droite.

(**) Deux triangles ABC, A'B'C' sont dits *homologiques* ou *perspectifs* lorsque les droites AA', BB', CC' se coupent en un point S, appelé *centre d'homologie* ou *centre de perspective*; les côtés correspondants AB et A'B', BC et B'C', CA et C'A' se coupent sur une droite, appelée *axe d'homologie* ou *axe de perspective*.

(***) Ces cercles ont pour diamètres les segments des côtés compris entre la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle opposé. Ils se coupent en deux points appelés *centres isodynamiques* du triangle.

Dém. Prolongeons AX, AY qui rencontrent BC en A′ et A″; BX, BY qui rencontrent AC en B′ et B″; CX et CY qui rencontrent AB en C′ et C″. Alors

$$AB'.BC'.CA' = A'B.B'C.C'A, \quad AB''.BC''.CA'' = A''B.B''C.C''A.$$



Multipliant ces équations et négligeant les facteurs communs aux deux membres du résultat, on obtient $BC'.BC'' = AC'.AC''$; donc $AC' = C''B$.

Déf. *Deux points* X, Y *sont dits isotomiques* (*) *par rapport à un triangle* ABC, *quand les couples de droites* AX, AY; BX, BY; CX, CY, *sont isotomiques respectivement par rapport aux côtés* BC, CA, AB.

Exercices. 1. Si le point X est le centre de gravité des masses α, β, γ placées en A, B, C, son isotomique Y est le centre de gravité des masses α^{-1}, β^{-1}, γ^{-1} placées aux mêmes points A, B, C.

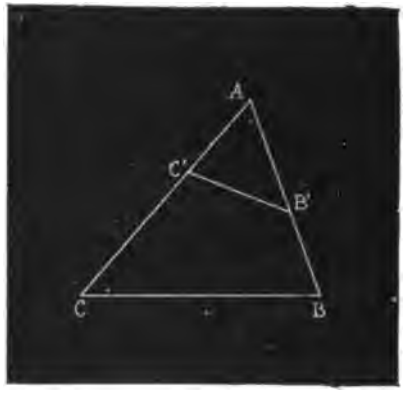
2. Si une droite coupe les côtés d'un triangle aux points A′, B′, C′, démontrer que les points A″, B″, C″ qui résultent de l'intersection des côtés du triangle avec les conjuguées isogonales ou isotomiques de AA′, BB′, CC′, sont collinéaires (**).

Déf. *Deux droites* BC, B′C′ *sont dites antiparallèles par rapport à l'angle* A, *lorsque l'angle* ABC *est égal à* AC′B′.

(*) M. de Longchamps dit que ces points sont *réciproques*, et réserve l'expression de *points isotomiques* pour désigner les couples de points tels que A′ et A″, B′ et B″, C′ et C″, qui sont situés sur un même côté du triangle fondamental ABC, à égale distance du milieu du côté.

(**) Les droites A′B′C′, A″B″C″ sont appelées, respectivement, *transversales isogonales* (*inverses*), *transversales isotomiques* (*réciproques*).

Il y a trois systèmes d'antiparallèles par rapport à un triangle ABC. 1° Les antiparallèles à BC, par rapport à l'angle opposé A; 2° les antiparallèles à CA par rapport à l'angle opposé B; 3° les antiparallèles à AB par rapport à l'angle opposé C.



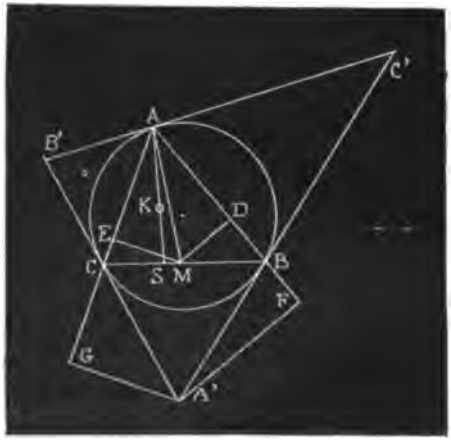
Prop. 4. ***Les antiparallèles aux côtés d'un triangle, sont parallèles aux tangentes menées au cercle circonscrit par les trois sommets.***

Car, si LMN est le triangle formé par les tangentes, l'angle MAC = ABC; par conséquent, l'angle MAC = AC'B' et AM est parallèle à C'B'.

Cor. 1. ***Les points*** B', C', B, C, ***sont concycliques.***

Cor. 2. ***Les droites joignant les pieds des hauteurs d'un triangle sont antiparallèles aux côtés.***

Déf. ***La conjuguée isogonale d'une médiane*** AM ***d'un triangle est appelée symédiane***(*).



Il résulte de la prop. 2 que les trois symédianes d'un triangle sont concourantes. Le point de concours (K) est appelé ***point symédian*** ou ***point de Lemoine du triangle***(**).

Prop. 5. ***Les perpendiculaires abaissées de*** K ***sur les côtés du triangle, sont proportionnelles à ces côtés.***

(*) Cette droite portait primitivement le nom de ***médiane antiparallèle.***

(**) Dans cette traduction, nous employons le dernier terme (***point de Lemoine***), qui est adopté par les géomètres français. M. Lemoine avait proposé la dénomination ***centre des médianes antiparallèles.***

Dém. Soient MD, ME, les perpendiculaires abaissées de M sur les côtés AB et AC, et x, y, z les perpendiculaires abaissées de K sur les trois côtés. Alors (prop. 1, 1°), MD.z = ME.y; mais MD.AB = ME.AC. Donc $y : z = AC : AB$.

Cor. 1. $$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{2S\,(*)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Cor. 2. *Les symédianes d'un triangle sont les médianes de ses antiparallèles.*

Cor. 3. *La symédiane* AK *divise* BC *dans le rapport* $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$.

Cor. 4. K *est le centre de gravité de trois masses proportionnelles à* a^2, b^2, c^2 *et placées en* A, B, C.

Cor. 5. K *est le conjugué isogonal du centre de gravité du triangle.*

Prop. 6. *Les symédianes passent par les pôles des côtés du triangle* ABC *par rapport au cercle circonscrit.*

Dém. Soit A′ le pôle de BC; abaissons les perpendiculaires A′F, A′G sur AB, AC. On a

$$A'F : A'G = \sin A'BF : \sin A'CG = \sin ACB : \sin ABC = AB : AC.$$

Donc A′F et A′G sont dans le rapport des perpendiculaires abaissées de K sur AB et sur AC, et les points A, A′, K sont collinéaires(**).

Cor. 1. *La polaire de* K(***) *est l'axe de perspective du triangle* ABC *et de son polaire réciproque par rapport au cercle circonscrit.*

Cor. 2. *La tangente en* A *au cercle circonscrit et la symédiane* AS *sont conjuguées harmoniques par rapport aux côtés* BA, AC *du triangle.*

Prop. 7. *La somme des carrés des distances de* K *aux côtés de* ABC *est un minimum.*

Dém. Soient x, y, z, les distances d'un point quelconque aux côtés de ABC. Nous avons l'identité

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (ax + by + cz)^2 = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2.$$

(*) a, b, c désignent les côtés du triangle ABC; S, sa surface.

(**) La démonstration suivante évite l'emploi des lignes trigonométriques. Menons par A′ une parallèle à B′C′; soient F′, G′ ses points de rencontre avec AB, AC. On trouve aisément : *angle* A′G′C = CAB′ = ACB′ = A′CG′; donc A′G′ = A′C. De même, A′F′ = A′B. Mais A′C = A′B; donc A′G′ = F′A′, et A′ appartient à la symédiane AK.

(***) Cette droite a reçu le nom de *droite de Lemoine.*

Mais $ax + by + cz = 2S$; par conséquent $x^2 + y^2 + z^2$ devenant minimum lorsque les carrés qui figurent dans le second membre de l'égalité s'annulent, ce qui a lieu quand $x : a = y : b = z : c$.

Cor. K *est le centre de gravité du triangle formé par ses projections sur les côtés de* ABC.

Déf. *Si nous posons*

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \omega,$$

ω *est appelé l'angle de Brocard du triangle.*

Prop. 8. $\quad \cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C.$

Dém. Nous avons (prop. 5, cor. 1),

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

D'où

$$\cot \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \frac{2bc \cos A + 2ca \cos B + 2ab \cos C}{4S}.$$

Mais $$\frac{2bc \cos A}{4S} = \frac{2bc \cos A}{2bc \sin A} = \cot A, \text{ etc.}$$

Donc $$\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C.$$

Cor. *Si la base et l'angle de Brocard sont donnés dans un triangle, le lieu du centre des symédianes est une parallèle à la base.*

Exercices. 1. Si K_a, K_b, K_c, sont les points d'intersection des symédianes avec les côtés du triangle ABC, la surface du triangle $K_a K_b K_c$ est égale à $\frac{12S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$.

2. Si le côté BA du triangle ABC est prolongé au delà du point A d'une longueur $AB' = BA$ et qu'aux points B' et C on élève des perpendiculaires respectivement à BA et AC, lesquelles se couperont en I, la droite AI sera perpendiculaire à la symédiane passant par A.

3. Soient A'' le pôle de la droite BC par rapport au cercle circonscrit, et A''_a, A''_b, A''_c les pieds des perpendiculaires abaissées de A'' sur les côtés du triangle ABC, la surface du triangle $A''_a A''_b A''_c$ sera égale à $\frac{12S^3}{(b^2 + c^2 - a^2)^2}$.

4. Démontrer que la figure $A''A''_b A''_a A''_c$ est un parallélogramme.

SECTION II.

DEUX FIGURES DIRECTEMENT SEMBLABLES.

DÉF. *Étant donné un système de points* A, B, C, D, ..., *si sur chacune des droites joignant ces points à un point fixe* O, *on détermine des points* A′, B′, C′, D′, ... *par les conditions*

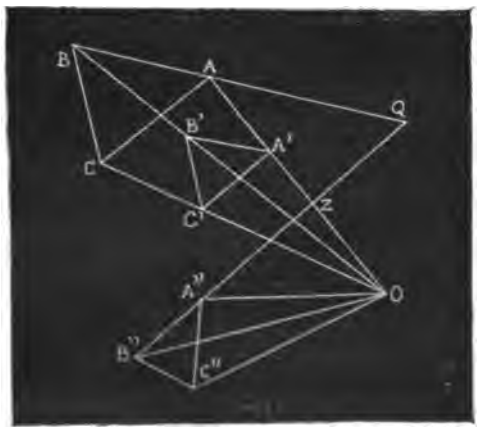
$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \cdots \text{ etc. } \cdots = k,$$

les deux systèmes de points sont dits homothétiques, et O *est appelé leur centre d'homothétie.*

Prop. 1. 1° *La figure homothétique d'une droite est une droite parallèle.*

2° *La figure homothétique d'un cercle est un cercle.*

Prop. 2. *Dans deux figures homothétiques* 1° *Deux droites de la figure sont dans le rapport constant* k; 2° *Deux triangles correspondants sont semblables.* Ces propositions sont évidentes.



Prop. 3. *Étant donnés deux systèmes homothétiques* ABC, ..., A′B′C′, ..., *si l'un d'eux ayant tourné d'un angle* α *autour du centre d'homothétie* O, *occupe une nouvelle position* A″B″C″, *alors :* 1° *Deux droites homologues quelconques* (AB, A″B″) *font entre elles l'angle constant* α; 2° *les triangles* OAA″, OBB″, ..., *sont semblables entre eux.*

Dém. Par hypothèse, l'angle OAB = OA′B′ = OA″B″, et l'angle OZA″ = AZQ. D'où l'angle A″OZ = ZQA et l'angle ZQA = α.

En outre, les triangles OAB, OA′B′ sont équiangles; par suite, OAB et OA″B″ sont équiangles et l'on a OA : OB = OA″ : OB″, d'où OA : OA″ = OB : OB″, et comme l'angle AOA″ = BOB″, les triangles AOA″, BOB″ sont semblables.

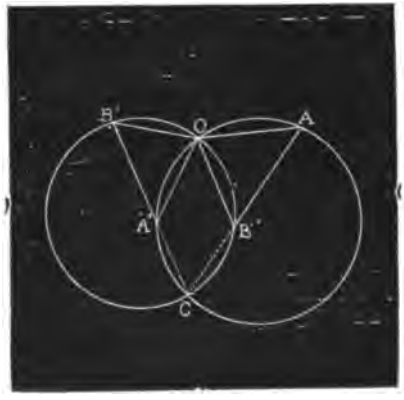
COR. 1. *Réciproquement, si, sur les droites menées d'un point fixe* O *à tous les sommets d'un polygone* ABCD, ..., *on construit des triangles sem-*

blables OAA'', OBB'', OCC'', ..., *le polygone formé par les sommets* A'', B'', C'', ... *est semblable au polygone primitif* ABCD, ...

Cor. 2. *Si* O *est considéré comme un point appartenant à la première figure, il sera son propre homologue dans la seconde figure.*

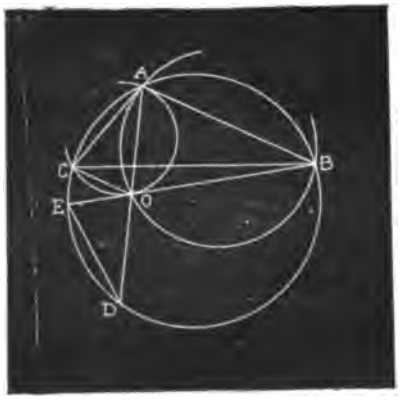
Déf. *Le point* O *est appelé point double des deux figures, il est aussi appelé leur centre de similitude.*

Prop. 4. ***Étant donnés deux polygones directement semblables, on demande de trouver leur point double.***



Soient AB, A'B', deux côtés homologues des figures; C leur point d'intersection. Par les deux triples de points (A, A', C), (B, B', C), faisons passer deux cercles se coupant en un second point O; O sera le point cherché. Car il est évident que les triangles OAB, OA'B' sont semblables et que chacun peut tourner autour du point O de façon que les deux bases AB, A'B' deviennent parallèles.

Remarque. La construction précédente doit être modifiée, lorsque les côtés homologues des deux figures sont des côtés consécutifs BA, AC d'un triangle. Dans ce cas, sur les droites AB, AC décrivons deux segments BOA, AOC, touchant respectivement AC et AB au point A(*).



Alors O, leur second point d'intersection, sera le point double cherché, car il est évident que les triangles BOA, AOC, sont directement semblables.

Cor. 1. *Si* AO *est prolongé jusqu'à son intersection avec le cercle circonscrit en* D, O *est le milieu de* AD.

(*) Les circonférences qui touchent un côté d'un triangle, en l'une de ses extrémités, et passent par le sommet opposé sont appelées *circonférences adjointes* (en allemand *Beikreise*).

Dém. Prolongeons BO qui coupera le cercle circonscrit en E, et menons ED. Puisque les triangles BOA, AOC sont directement semblables, l'angle OAC = ABO et, par conséquent, est égal à ODE. De même, l'angle ACO = DEO. Mais, si l'angle DAC = ADE, l'arc CD = AE. D'où arc DE = arc AC et corde DE = corde AC; donc DO = OA.

Cor. 2. *Les distances du point double à deux points homologues sont dans un rapport donné, car ces distances sont des droites homologues.*

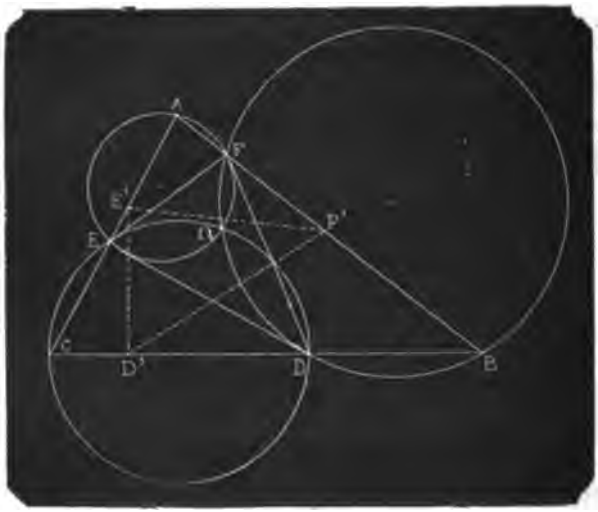
Cor. 3. *Les perpendiculaires abaissées du point double sur deux droites homologues quelconques, sont dans un rapport constant.*

Cor. 4. *L'angle sous-tendu au point double par la droite joignant deux points homologues est constant.*

Cor. 5. *La droite* AO *passe par le point de Lemoine du triangle* ABC; *en effet, les perpendiculaires abaissées de ce point sur les droites* AB, AC *sont proportionnelles à ces droites, et par conséquent proportionnelles aux perpendiculaires menées de* O *sur les mêmes lignes.*

Cor. 6. *Si l'on joint* BD, *on a* $BD.AB : \overline{AO}^2 = BC : CO$.

Prop. 5. *Le centre de similitude d'un triangle donné et d'un triangle équiangle inscrit est l'un ou l'autre de deux points fixes.*



Dém. Soit DFE un triangle inscrit, ayant les angles D, F, E, égaux respectivement aux angles B, A, C. Le point commun aux cercles

BDF, AFE, CED, sera un point donné(*); si nous le désignons par Ω, Ω sera le centre de similitude du triangle ABC, et d'un triangle équiangle inscrit, tel que DFE dont le sommet F, correspondant à A, est sur le côté AB. De même, il existe un autre point Ω′ qui est le centre de similitude de ABC et des triangles inscrits semblables tels que D′E′F′ ayant le sommet correspondant à A sur le côté AC.

Déf. Ω, Ω′ *sont appelés points de Brocard du triangle* ABC.

Cor. 1. *Le cercle circonscrit au triangle* AΒΩ *est tangent à* BC *au point* B.

Dém. Puisque Ω est le point double des triangles ABC, DEF, les triangles ΩBD, ΩFA sont équiangles; donc angle ΩBD = ΩAF. Par conséquent, le cercle AΩB touche BC en B. De même, les cercles circonscrits aux triangles BΩC, CΩA, touchent respectivement CA en C et BA en A.

Cor. 2. *Les trois angles* ΩAB, ΩBC, ΩCA *sont égaux entre eux, et chacun est égal à l'angle de Brocard du triangle.*

Dém. Dans le cercle AΩB, les angles ΩAB, ΩBC ont même mesure. Soit ω leur valeur commune; alors, puisque les droites AΩ, BΩ, CΩ sont concourantes, nous avons, d'après la trigonométrie,

$$\sin^3 \omega = \sin (A - \omega) \sin (B - \omega) \sin (C - \omega);$$

d'où

$$\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C.$$

Par conséquent, ω est l'angle de Brocard du triangle (sect. I, prop. 8).

Exercices. 1. Inscrire, dans un triangle donné ABC, un rectangle semblable à un rectangle donné et ayant un de ses côtés sur le côté BC du triangle. A est le centre d'homothétie du rectangle cherché, et d'un rectangle semblable construit sur le côté BC.

2. Inscrire, dans un triangle donné, un triangle dont les côtés soient parallèles à trois droites données.

3. De ce que le triangle ABC et le triangle A′B′C′, dont les sommets sont les milieux des côtés de ABC, sont homothétiques, il résulte : 1° que les médianes de

---

(*) Car, quel que soit le triangle DEF,

$$\text{angle } B\Omega C = B\Omega D + D\Omega C = BFD + DEC = (180° - ABC - FDB) + (180° - ACB - CDE)$$
$$= (180° - ABC - ACB) + (180° - FDB - CDE) = BAC + FDE.$$

On voit que les angles BΩC, CΩA, AΩB sont égaux aux sommes A + D, B + E, C + F des angles correspondants des triangles ABC, DEF. Lorsque DFE est semblable à ABC, on a angle $B\Omega C = A + D = A + B = 180° - C$.

ABC sont concourantes; 2° que l'orthocentre (point de rencontre des hauteurs), le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité sont collinéaires.

4. Montrer que la proposition suivante est une application de la théorie des figures directement semblables :

Un triangle se meut en restant semblable à lui-même. L'un des sommets étant fixe et un second se déplaçant sur une droite ou une circonférence, le troisième décrit également une droite ou une circonférence.

5. Si des figures directement semblables sont construites sur les hauteurs d'un triangle, démontrer que leurs points doubles sont les pieds des perpendiculaires abaissées de l'orthocentre sur les médianes.

6. Les points de Brocard sont conjugués isogonaux par rapport au triangle BAC.

7. Les masses qui, étant placées en A, B, C, ont pour centre de gravité Ω ou Ω' sont, respectivement proportionnelles à $\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}$ et $\frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$.

8. Si le segment de droite A'B' (fig., prop. 4) tourne autour d'un point quelconque donné dans le plan, tandis que le segment de droite AB reste fixe, le lieu de leur point double O est une circonférence.

9. Si par A (2me fig., prop. 4) on mène une droite AF parallèle à BC et rencontrant la circonférence AOC en un second point F, démontrer que BF rencontre la circonférence AOC en un point de Brocard.

10. Dans la même figure, si BC coupe la circonférence AOC en G, démontrer que les triangles ABC, ABG ont un point de Brocard commun.

SECTION III.

CERCLES DE LEMOINE, DE TUCKER ET DE TAYLOR.

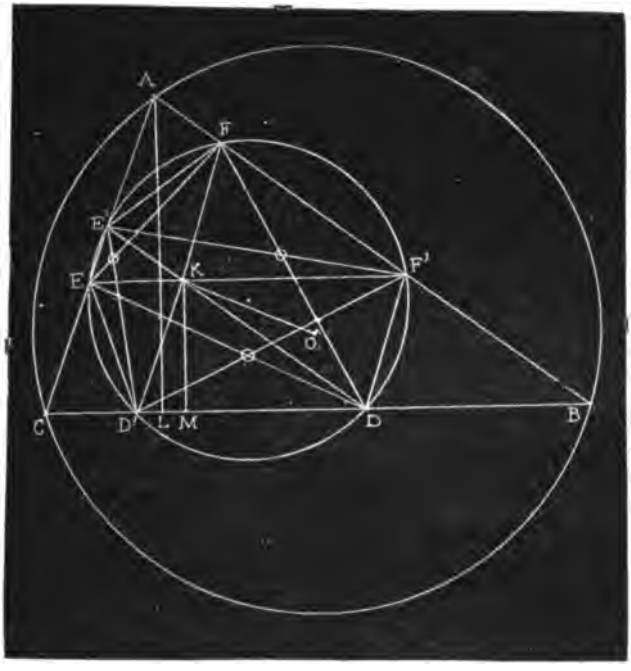
Prop. 1. ***Les trois parallèles aux côtés d'un triangle menées par le point de Lemoine, coupent les côtés en six points concycliques.***

Dém. Soient DE', EF', FD', les parallèles. Joignons D'E, E'F, F'D. La figure AFKE' est un parallélogramme; AK et FE' se coupent en parties égales. Par suite (sect. I, prop. 4, cor. 2) FE' est antiparallèle à BC; de même, DF' est antiparallèle à AC. Donc l'angle AFE' = BF'D, et il est aisé de voir que FE' = F'D. De même, FE' = ED'. En outre, si O est le centre du cercle circonscrit, OA est perpendiculaire à FE'; par conséquent, la perpendiculaire au milieu de FE', passe par le milieu de KO. Donc, puisque FE' = ED' = DF', le milieu de KO est équidistant des six points F, E', E, D', D, F'.

Cette proposition a été énoncée pour la première fois, en 1873, au congrès de Lyon de l'*Association française pour l'avancement des sciences*, par M. Lemoine, lequel peut être considéré comme le fondateur de la

géométrie moderne du triangle. Elle a été retrouvée en 1883 par M. Tucker (*Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, p. 340).

J'ai prouvé, en janvier 1886 (*Proceedings of the Royal Irish Academy*), qu'il est possible de construire des polygones d'un nombre indéfini de



côtés, appelés polygones harmoniques, pour lesquels des propriétés analogues se vérifient (voir Section VI).

Déf. *Nous appellerons cercle de Lemoine le cercle passant par les six points* F, E', E, D', D, F' *et hexagone de Lemoine, l'hexagone dont ils sont les sommets.*

Cor. 1. *Les côtés du triangle* ABC *sont divisés symétriquement par le cercle de Lemoine.* Car il est aisé de voir que

$$AF : FF' : F'B = b^2 : c^2 : a^2,$$
$$BD : DD' : D'C = c^2 : a^2 : b^2,$$
$$CE : EE' : E'A = a^2 : b^2 : c^2.$$

Cor. 2. *Les segments interceptés* DD', EE', FF' *sont proportionnels à* a^2, b^2, c^2.

Dém. Abaissons la perpendiculaire AL; alors, de la similitude des triangles DKD', BAC, nous déduisons

$$DD' : KM = BC : AL = a^2 : 2S.$$

D'où,
$$DD' = \frac{a^2 . KM}{2S} = \frac{a^3}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

De même, $EE' = \frac{b^3}{a^2 + b^2 + c^2}$, $FF' = \frac{c^3}{a^2 + b^2 + c^2}$.

A cause de cette propriété, M. Tucker appelle le cercle de Lemoine *the Triplicate Ratio Circle.*

Cor. 3. *Les six triangles dans lesquels l'hexagone de Lemoine est divisé par les lignes menées de* K *aux sommets, sont semblables au triangle* ABC.

Cor. 4. *Si des droites menées par les sommets d'un triangle* ABC *et l'un des points de Brocard rencontrent le cercle circonscrit en* A', B', C', *la figure* AB'CA'BC' *est un hexagone de Lemoine.*

Prop. 2. *L'axe radical du cercle de Lemoine et du cercle circonscrit est la Pascale de l'hexagone de Lemoine.*

Dém. Soit X le point d'intersection de FE' avec BC. Puisque FE' est antiparallèle à BC, les points B, F, E', C, sont concycliques, d'où l'égalité BX.CX = FX.E'X; par conséquent, l'axe radical du cercle de Lemoine et du cercle circonscrit passe par X, ce qui démontre le théorème.

Cor. 1. *La polaire du point de Lemoine par rapport au cercle de Lemoine, est la Pascale de l'hexagone de Lemoine.*

Car, puisque DFE'D' est un quadrilatère inscrit dans le cercle de Lemoine, la polaire de K passe par X. De même, elle passe par les points d'intersection des autres couples de côtés opposés.

Cor. 2. *Si les cordes* DE, D'E' *se coupent en p, les cordes* EF, E'F' *en q, les cordes* FD, F'D' *en r, le triangle pqr est perspectif avec* ABC.

Dém. Soit T le point d'intersection des droites A*q*, C*p*. Désignant par α, β, γ les perpendiculaires abaissées de T sur les côtés de ABC, nous avons les égalités

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(p, BC)(*)}{(p, AC)} = \frac{DD'}{EE'} = \frac{a^3}{b^3};$$

(*) Nous désignons par (p, BC) la perpendiculaire abaissée du point p sur la droite BC. Les lettres p, q, r ne sont pas marquées sur la figure.

de même, $\beta : \gamma = b^2 : c^2$; donc

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{a^2}{c^2} = \frac{(r, \mathrm{BC})}{(r, \mathrm{AB})},$$

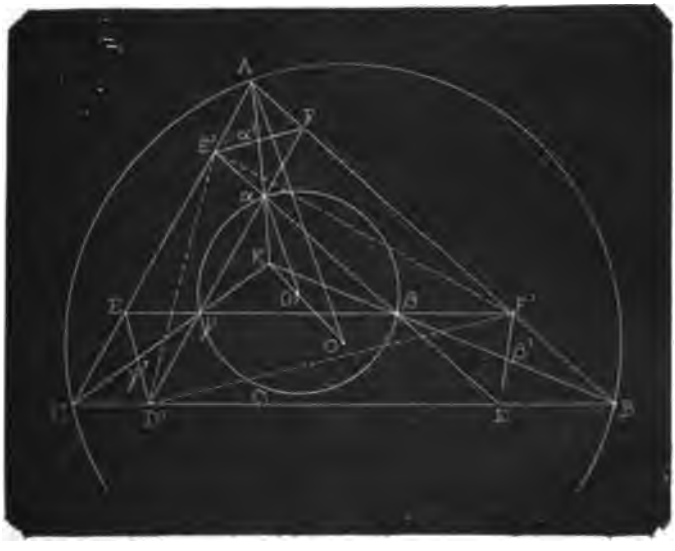
et la ligne B*r* passe par T.

Cor. 3. *Les perpendiculaires abaissées du centre de perspective des triangles* ABC, *pqr, sur* ABC *sont proportionnelles à* a^2, b^2, c^2.

Cor. 4. *Les intersections des cordes antiparallèlles* D'E, E'F, F'D *avec les parallèles de Lemoine* DE', EF', FD' *sont collinéaires, l'axe de collinéation étant la polaire de* T *par rapport au cercle de Lemoine.*

Dém. Soient P, Q, R les points d'intersection; C*p*P est un triangle autopolaire par rapport au cercle de Lemoine et P est le pôle de C*p*. De même, Q est le pôle de A*q*, et R le pôle de B*r*; mais A*q*, B*r*, C*p*, sont trois droites concourantes. Donc, P, Q, R sont trois points en ligne droite.

Prop. 3. *Si un triangle* $\alpha\beta\gamma$ *est homothétique avec* ABC, *le centre*



d'homothétie étant au point de Lemoine du triangle ABC, *et, si* D *et* E', E *et* F', F *et* D', *sont les intersections des côtés de* ABC *avec les côtés correspondants de* $\alpha\beta\gamma$, *prolongés s'il le faut, ces six points sont concycliques.*

Dém. Soit K le point de Lemoine. D'après l'hypothèse, il est évident que les droites AK, BK, CK, sont les médianes de FE', DF', ED'. Donc

FE', DF', ED' sont antiparallèles aux côtés du triangle ABC, et l'on voit, comme dans la proposition 1, que les six points sont concycliques.

Cor. 1. *Le centre du cercle circonscrit à l'hexagone* DD'EE'FF', *divise en deux parties égales la distance des centres des cercles circonscrits aux triangles* ABC, $\alpha\beta\gamma$.

Cor. 2. *Si le triangle* $\alpha\beta\gamma$ *varie, le lieu du centre du cercle circonscrit à l'hexagone est la droite* OK.

Les cercles circonscrits à l'hexagone quand le triangle $\alpha\beta\gamma$ varie furent étudiés, pour la première fois, par M. Lemoine au Congrès de Lyon en 1873; plus tard, par MM. Neuberg (*Mathesis*, I, 1881, pp. 185-190); M'Cay (*Educational Times*, 1883, question 7551); Tucker (*Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. XX, 1885, pp. 57-59). M. Neuberg les a appelés *cercles de Tucker*.

Cor. 3. *Si le triangle* $\alpha\beta\gamma$ *se réduit au point* K, *le cercle de Tucker a son centre au milieu de* OK *et devient le cercle de Lemoine.*

Cor. 4. *Si des parallèles aux côtés du triangle orthique*(*) *passent par le point* K, *le centre du cercle de Tucker sera ce point* K; *les triangles inscrits auront leurs côtés perpendiculaires à ceux de* ABC, *et les segments que le cercle intercepte sur les côtés de* ABC *seront proportionnels aux cosinus des angles. Ce cercle est appelé,* en anglais, *Cosine Circle,* en français, *second cercle de Lemoine.*

Cor. 5. *Le centre de perspective du triangle* ABC *et du triangle formé par les points* F, D, E, *est le point de Brocard* Ω; *celui des triangles* ABC, D'E'F', *est le point* Ω'.

Cor. 6 *Si* O_1 *est le centre d'un cercle de Tucker et* R_1 *son rayon,*

$$O\Omega : O_1\Omega = O\Omega' : O_1\Omega' = R : R_1.$$

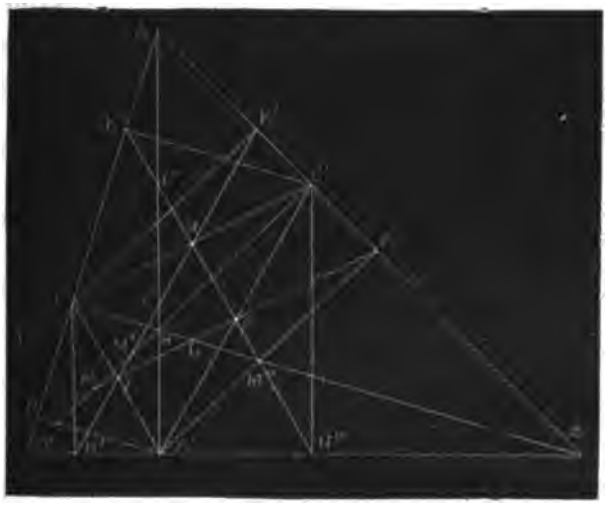
Prop. 4. *Si* A', B', C', *sont les sommets du triangle orthique de* ABC, *et* K, N; K', N'; K'', N'' *leurs projections sur les côtés, ces projections sont concycliques.*

Dém. Soit H l'orthocentre; les figures AKA'N, AC'HB' sont homothétiques, A étant le centre d'homothétie. Donc KN est parallèle à C'B' et évidemment K'K'' est antiparallèle à C'B'; par suite, K'K'' est antiparallèle à KN. Les points K, K', K'', N sont donc concycliques.

(*) Le *triangle orthique* de ABC est celui qui a pour sommets les pieds des hauteurs de ABC.

De même, K, K', N, N' sont concycliques, les droites NN', KN, K'N' étant respectivement, parallèles à AB, B'C', A'C'. Le théorème est donc démontré.

Ce cercle a été étudié pour la première fois en Angleterre, par H. M. Taylor dans une note publiée par les *Proceedings of the London*



Mathematical Society, 1884, vol. XV, p. 122. Il est appelé *cercle de Taylor* du triangle. Nous le désignerons par la lettre T et les cercles de Taylor des triangles BHC, CHA, AHB, respectivement par T_1, T_2, T_3.

Prop. 5. *Les cordes* KN, K'N', K''N'' *de* T *coupent les côtés des triangles* BHC, CHA, AHB, *respectivement en leurs points d'intersection avec les cercles de Taylor de ces triangles.*

Dém. Soient L et M les points d'intersection de KN avec BH et HC. Il est évident que le point A' est commun aux cercles circonscrits aux quatre triangles formés par les droites AB, AC, BB', CC'.

Donc, d'après une proposition connue(*), les projections de A' sur ces droites sont collinéaires; par conséquent, les points L et M sont les projections de A' respectivement sur BH et sur HC. De même, M' est la projection de B' sur HC, et M'' celle de C' sur BH. Le cercle T_1 passe donc par les points L, M; M', N'; M'', N''; c'est-à-dire par les points

(*) Conséquence du théorème relatif à la droite de Simson.

d'intersection de KN, K'N', K''N'' avec les côtés du triangle BHC; ce qui démontre le théorème.

Prop. 6. *Les centres de* T, T_1, T_2, T_3, *coïncident respectivement avec les centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits au triangle obtenu en joignant les milieux des côtés du triangle orthique de* ABC.

Dém. La droite KN est évidemment la droite de Simson du point A' par rapport au triangle BHC', et C' est l'orthocentre de BHC'.

Donc KN passe par le milieu de A'C'; il passe aussi par le milieu de A'B'; cette droite joint donc les milieux de deux côtés du triangle A'B'C'. La même chose a lieu pour K'N', K''N''.

Si donc α, β, γ sont les milieux des côtés de A'B'C', chacune des droites KN, K'N', K''N'' passe par deux de ces points. En outre, puisque α est le milieu de B'C', le triangle αN'N'' est isoscèle, et la bissectrice de l'angle α passe par le milieu de N'N'' et lui est perpendiculaire. Elle passe donc par le centre de T. De même, les bissectrices des autres angles du triangle $\alpha\beta\gamma$ passent par le centre de T et, par suite, le centre de T est le centre du cercle inscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$. De même, les centres des cercles exinscrits à $\alpha\beta\gamma$, sont les centres de T_1, T_2, T_3.

Cor. 1. *Le cercle de Taylor* T *appartient au système des cercles de Tucker du triangle* ABC.

Car, si nous considérons le triangle KK''N' inscrit dans ABC, l'angle KK''N' est égal à KK'N', puisque les points K, K', K'', N' sont concycliques. Mais KK'N' est égal à C, puisque K'N' est antiparallèle à AC; donc KK''N' est égal à C. En outre, l'angle N'KK'' est égal à N'K'K'', lequel, puisque K'K'' est parallèle à BC, est égal à K'N'B', et, par conséquent, égal à A. Donc, KK''N' est semblable à ABC, et son cercle circonscrit T est un des cercles du système de Tucker.

Cor. 2. *Les axes radicaux des cercles* T, T_1, T_2, T_3, *sont les côtés et les hauteurs du triangle* ABC.

Cor. 3. *La figure formée par les centres de* T, T_1, T_2, T_3, *est semblable et perspective à celle formée par les points* H, A, B, C.

Car H, A, B, C sont les centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits du triangle A'B'C', lequel est semblable et perspectif à $\alpha\beta\gamma$.

Prop. 7. *Le cercle de Taylor* T *coupe orthogonalement les trois cercles exinscrits au triangle orthique de* ABC, *et chacun des cercles* T_1, T_2, T_3 *coupe orthogonalement le cercle inscrit et deux des cercles exinscrits au même triangle.*

Dém. Soient, respectivement, π_1, π_2, π_3, les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur B'C', C'A', A'B'; alors π_1, π_2, π_3 sont les rayons des cercles exinscrits à A'B'C'. Or, la similitude des triangles AB'C', ABC donne

$$\frac{\pi_1^2}{\overline{AA'}^2} = \frac{\overline{AC'}^2}{\overline{AC}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi_1^2}{AN.AC} = \frac{AC.AK''}{\overline{AC}^2},$$

donc $\pi_1^2 = AN.AK''$; mais AN.AK'' est égal au carré de la tangente menée de A à T. Donc le cercle de centre A et de rayon π_1 coupe orthogonalement le cercle T; ce qui démontre le théorème.

Prop. 8. *Si σ est le demi-périmètre du triangle $\alpha\beta\gamma$, et ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3 les rayons des cercles inscrit et exinscrits, les carrés des rayons des cercles de Taylor sont respectivement* $\rho^2+\sigma^2$, $\rho_1^2+(\sigma-\alpha)^2$, $\rho_2^2+(\sigma-\beta)^2$, $\rho_3^2+(\sigma-\gamma)^2$.

Dém. Puisque le triangle A'N''C' est rectangle en N'' et que β est le milieu de A'C', N''β est égal à A'β ou à $\alpha\gamma$. De même αK'' est égal à $\beta\gamma$, et $N''K'' = 2\sigma$. Comme le cercle T passe par N'', K'', et est concentrique avec le cercle inscrit à $\alpha\beta\gamma$, le carré du rayon de $T = \rho^2 + \frac{1}{4}\overline{N''K''}^2 = \rho^2 + \sigma^2$.

En outre, si l'on joint M''C', la figure C'M''B'K'' est un rectangle. Donc $M''K'' = 2\alpha B' = 2\beta\gamma = 2\alpha$; mais $N''K'' = 2\sigma$, donc $N''M'' = 2(\sigma - \alpha)$, et le carré du rayon de $T_1 = \rho_1^2 + (\sigma - \alpha)^2$.

Cor. *La somme des carrés des rayons des cercles de Taylor est égale au carré du diamètre du cercle circonscrit.*

Car, il est aisé de voir que les carrés des rayons des quatre cercles sont respectivement égaux à

$$4R^2(\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C + \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C),$$
$$4R^2(\cos^2 A \sin^2 B \sin^2 C + \sin^2 A \cos^2 B \cos^2 C),$$
$$4R^2(\sin^2 A \cos^2 B \sin^2 C + \cos^2 A \sin^2 B \cos^2 C),$$
$$4R^2(\sin^2 A \sin^2 B \cos^2 C + \cos^2 A \cos^2 B \sin^2 C),$$

dont la somme est égale à $4R^2$.

Exercices. 1. Les diagonales DE, EF, FD, de l'hexagone de Lemoine coupent les diagonales F'D', D'E', E'F' respectivement en trois points formant un triangle homothétique avec ABC.

2. Le triangle formé par les trois côtés non consécutifs DF', FE', ED' prolongés, est homothétique avec le triangle orthique, et le rapport de similitude est égal à $\frac{1}{2}$ séc A séc B séc C.

3. Les cercles de similitude du cercle circonscrit par rapport à chacun des cercles de Tucker ont même axe radical (Le cercle de similitude de deux cercles

donnés est celui qui a pour diamètre la distance des deux centres de similitude).

4. Les perpendiculaires abaissées de K sur les côtés du triangle de l'exercice 2 sont proportionnelles à a^2, b^2, c^2.

5. Le périmètre et la surface de l'hexagone de Lemoine sont respectivement égaux à

$$\frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{a^2+b^2+c^2}, \qquad \frac{S(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

6. Si le second cercle de Lemoine coupe les côtés de ABC aux points D, D', E, E', F, F', les figures DD'E'F, EE'F'D, FF'D'E, sont des rectangles, et leurs surfaces sont proportionnelles à sin 2A, sin 2B, sin 2C.

7. Les diagonales de chacun de ces rectangles passent par le point de Lemoine. Ceci nous fournit une démonstration de ce théorème : le milieu d'un côté, le milieu de la hauteur correspondante et le point de Lemoine sont collinéaires.

8. Si les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ (fig., prop. 3), prolongés s'il le faut, coupent les tangentes menées en A, B, C au cercle circonscrit, six des points d'intersections sont concycliques, et les trois autres sont collinéaires.

9. Si la distance OK entre le centre du cercle circonscrit et le point de Lemoine est partagée dans le rapport $l : m$ par le centre de l'un des cercles de Tucker, et si R, R', sont les rayons du cercle circonscrit et du second cercle de Lemoine, le rayon du cercle de Tucker est égal à $\dfrac{\sqrt{l^2R'^2+m^2R^2}}{l+m}$.

10. Le carré du diamètre du cercle de Lemoine est égal à $R^2+R'^2$.

11. Si un triangle variable $\alpha\beta\gamma$, de forme donnée, est inscrit à un triangle fixe ABC, et si les sommets de $\alpha\beta\gamma$ se meuvent sur les côtés de ABC, le centre de similitude F de $\alpha\beta\gamma$ dans deux quelconques de ses positions, est un point fixe. (Townsend.)

12. Dans le même cas, si le cercle circonscrit à $\alpha\beta\gamma$ coupe les côtés de ABC en trois nouveaux points α', β', γ', le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ est de forme donnée et le centre de similitude F' de celui-ci dans deux quelconques de ses positions, est un point fixe. (Taylor.)

13. F et F' sont conjugués isogonaux par rapport au triangle.

14. Le lieu du centre du cercle $\alpha\beta\gamma$ est une droite.

15. Si par les points de Brocard et le centre de l'un des cercles de Tucker, on fait passer un cercle coupant le cercle de Tucker en X, Y, démontrer que

$$\Omega X + \Omega' X = \Omega Y + \Omega' Y = \text{constante}.$$

16. Le lieu de l'inverse de chacun des points de Brocard par rapport à un cercle de Tucker est une droite.

17. Si les milieux des droites AH, BH, CH sont respectivement A'', B'', C'' et si A''', B''', C''' sont les milieux des côtés BC, CA, AB, la droite de Simson de l'un quelconque de ces six points, par rapport au triangle A''B''C'', passe par les centres de deux cercles de Taylor.

18. Si P et Q sont les orthocentres des triangles ABC, HBC, les droites AP,

A'Q sont divisées en deux parties égales par les centres de deux des cercles de Taylor.

19. Les droites de Simson de chaque sommet de A'B'C' par rapport aux triangles A''B''C'', B''C''A'', A''C''B''', A'''B'''C''' passent respectivement par les centres des cercles de Taylor.

20. Démontrer que les segments que les lieux de l'exercice 16 déterminent sur chaque côté du triangle, sous-tendent des angles droits en chacun des points de Brocard.

SECTION IV.

THÉORIE GÉNÉRALE DE TROIS FIGURES SEMBLABLES.

Notation. Soient F_1, F_2, F_3 trois figures directement semblables; a_1, a_2, a_3 trois longueurs correspondantes; α_1 l'angle constant que forment entre elles deux droites homologues de F_2 et F_3; α_2 et α_3 respectivement les mêmes angles pour deux lignes homologues de F_3 et F_1, de F_1 et F_2; S_1, S_2, S_3 les points doubles respectifs de F_2 et F_3, F_3 et F_1, F_1 et F_2. Nous désignerons aussi, comme plus haut, par (O, AB) la distance du point O à la droite AB.

Déf. 1. *Le triangle formé par les trois points doubles S_1, S_2, S_3 est appelé triangle de similitude de F_1, F_2, F_3; et son cercle circonscrit, cercle de similitude.*

Prop. 1. *Dans tout système de trois figures directement semblables, le triangle formé par trois droites homologues quelconques, est perspectif avec le triangle de similitude, et le lieu du centre de perspective est la circonférence de similitude.*

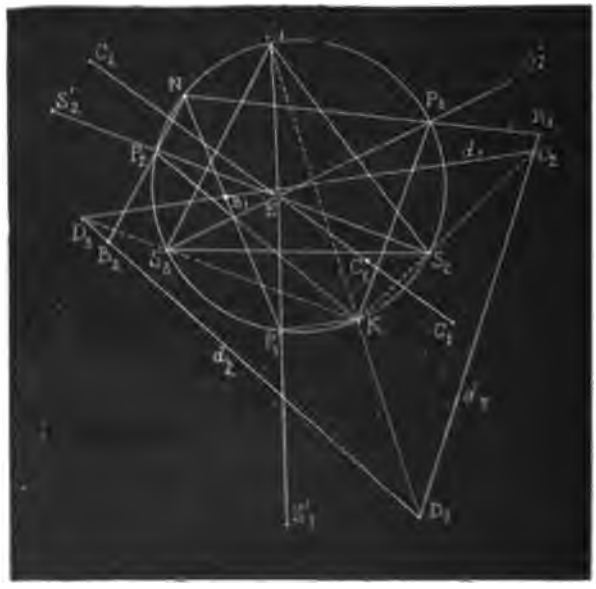
Dém. Soient d_1, d_2, d_3 trois droites homologues formant le triangle $D_1D_2D_3$; nous avons, par hypothèse,

$$\frac{(S_1, d_2)}{(S_1, d_3)} = \frac{a_2}{a_3}, \quad \frac{(S_2, d_3)}{(S_2, d_1)} = \frac{a_3}{a_1}, \quad \frac{(S_3, d_1)}{(S_3, d_2)} = \frac{a_1}{a_2}.$$

De là résulte que les droites S_1D_1, S_2D_2, S_3D_3, se coupent en un point K, dont les distances aux trois droites d_1, d_2, d_3, sont proportionnelles à a_1, a_2, a_3. Le triangle $D_1D_2D_3$ étant donné, ses angles sont les suppléments des angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; par suite, les angles D_1KD_2, D_2KD_3, D_3KD_1 sont constants; c'est-à-dire, les angles S_1KS_2, S_2KS_3, S_3KS_1 sont constants. Par suite, le point K se meut sur trois cercles passant par S_1 et S_2, par S_2 et S_3, par S_3 et S_1; il décrit donc le cercle circonscrit à $S_1S_2S_3$.

Déf. II. *Le point* K *est appelé centre de perspective du triangle* $D_1D_2D_3$.

Prop. 2. *Dans tout système de trois figures semblables, il existe une infinité de triples de droites homologues concourantes. Ces droites tournent autour de trois points fixes de la circonférence de similitude, et leur point de concours est sur la même ligne.*



Dém. Soit K le centre de perspective du triangle $D_1D_2D_3$ et du triangle de similitude $S_1S_2S_3$. Par K, menons trois parallèles KP_1, KP_2, KP_3, aux côtés du triangle $D_1D_2D_3$. Ce seront trois droites homologues, car

$$\frac{(S_1, KP_2)}{(S_1, KP_3)} = \frac{(S_1, d_2)}{(S_1, d_3)} = \frac{a_2}{a_3}, \quad \text{etc.}$$

Le point P_1 est fixe, car l'angle S_1KP_1 est égal à l'inclinaison de KD_1 sur D_2D_3, laquelle est constante. Donc l'arc S_1P_1 et, par suite, le point P_1 est fixe. De même, les points P_2, P_3 sont fixes.

Déf. III. *Les points* P_1, P_2, P_3 *sont appelés les points invariables et le triangle* $P_1P_2P_3$, *le triangle invariable.*

Cor. 1. *Le triangle invariable est inversement semblable au triangle formé par trois droites homologues.*

Car, l'angle $P_2P_3P_1 = P_2KP_1 =$ angle $D_1D_3D_2$; et de même pour les autres angles.

Cor. 2. *Les points invariables forment un système de trois points homologues.* Car

$$\text{angle } P_2S_1P_3 = \alpha_1 \quad \text{et} \quad \frac{S_1P_2}{S_1P_3} = \frac{(S_1, KP_2)}{(S_1, KP_3)} = \frac{a_2}{a_3}.$$

Cor. 3. *Les droites joignant les points invariables* P_1, P_2, P_3 *à un point quelconque* K *du cercle de similitude, sont trois droites homologues des figures* F_1, F_2, F_3.

En effet, ces trois droites passent par trois points homologues P_1, P_2, P_3, et se coupent, deux à deux, sous les angles α_1, α_2, α_3.

Prop. 3. *Le triangle formé par trois points homologues quelconques, est perspectif avec le triangle invariable, et le lieu de leur centre de perspective est la circonférence de similitude.*

Dém. Soient B_1, B_2, B_3 trois points homologues; alors P_1B_1, P_2B_2, P_3B_3 seront trois droites homologues, et, puisqu'elles passent par les points invariables, elles sont concourantes, et leur point de concours est sur la circonférence de similitude.

Prop. 4. *Le triangle invariable et le triangle de similitude sont perspectifs; et les distances de leur centre de perspective aux côtés du triangle invariable sont inversement proportionnelles à* a_1, a_2, a_3.

Dém. Nous avons :

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{S_1P_2}{S_1P_3} = \frac{(S_1, P_1P_2)}{(S_1, P_1P_3)}, \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{(S_2, P_2P_3)}{(S_2, P_2P_1)}, \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{(S_3, P_3P_1)}{(S_3, P_3P_2)};$$

donc les droites S_1P_1, S_2P_2, S_3P_3, sont concourantes.

Déf. iv. *Le centre de perspective du triangle invariable et du triangle de similitude est appelé le point directeur des trois figures semblables* F_1, F_2, F_3.

Prop. 5. *Soit* S'_1 *le point de* F_1 *homologue de* S_1 *considéré dans* F_2 *et* F_3; S'_2 *le point de* F_2 *homologue de* S_2 *considéré dans* F_3 *et* F_1; S'_3 *le point de* F_3 *homologue de* S_3 *considéré dans* F_1 *et* F_2. *Le triangle* $S'_1S'_2S'_3$ *est perspectif avec le triangle invariable et le triangle de similitude; les trois triangles ont un centre de perspective commun.*

Dém. Par hypothèse, les trois points S'_1, S_1, S_1 sont des points homologues des figures F_1, F_2, F_3; donc les droites S'_1P_1, S_1P_2, S_1P_3 sont concourantes, et les points S'_1, P_1, S_1, sont collinéaires. De même S'_1, P_2, S_2 et S'_3, P_3, S_3, sont collinéaires, ce qui démontre la proposition.

Déf. v. *Les points* S'_1, S'_2, S'_3 *sont appelés points adjoints des figures* F_1, F_2, F_3.

Prop. 6. *Dans trois figures* F_1, F_2, F_3, *directement semblables, il existe une infinité de triples de points homologues collinéaires. Leurs lieux sont trois circonférences de cercle passant chacune par deux des points doubles et par le point* E, *centre de perspective du triangle de similitude et du triangle invariable. La droite qui renferme l'un de ces triples de points correspondants, tourne autour du point* E.

Dém. Soient C_1, C_2, C_3, trois points homologues en ligne droite. Puisque S_2 est le point double des figures F_3 et F_1, les triangles $S_2C_3C_1$, $S_2P_3P_1$ sont semblables; par suite, l'angle $S_2C_3C_1$ est égal à l'angle $S_2P_3P_1$ et aussi égal à l'angle S_2S_1E. De même, l'angle $C_2C_3S_1$ est égal à S_1S_2E; par conséquent, l'angle $S_2C_3S_1$ est égal à S_2ES_1. Le lieu de C_3 est donc le cercle circonscrit au triangle S_1ES_2.

En outre, puisque $S_2C_3ES_1$ est un quadrilatère cyclique, les angles S_2S_1E, EC_3S_2 sont supplémentaires; donc, les angles $S_2C_3C_1$, EC_3S_2 sont supplémentaires, et les points C_1, C_3, E, sont collinéaires.

Cor. 1. *Le cercle circonscrit au triangle* S_1ES_2 *passe par* S'_3. En effet, S'_3 est une position particulière de C_3.

Cor. 2. *Les droites* C_1P_1, C_2P_2, C_3P_3 *sont concourantes, et le lieu de leur point de concours est le cercle de similitude.*

La matière de cette section est extraite de *Mathesis*, t. II, p. 73. Les propositions 1 à 5 sont dues à M. G. Tarry, la proposition 6 à M. Neuberg.

Exercices. 1. Si l'on inscrit dans le triangle invariable des triangles équiangles au triangle de similitude, de façon que le sommet correspondant à S_3 soit sur le côté P_2P_3, etc., le centre de similitude de ces triangles inscrits est le point directeur.

2. Si V_1, V_2, V_3, sont les centres des circonférences décrites par les points C_1, C_2, C_3, la somme des angles P_1, S_1, V_1 est égale à la somme de P_2, S_2, V_2, égale à la somme de P_3, S_3, V_3, égale à deux angles droits.

3. E est le centre de gravité des points invariables chargés des masses a_1 cosec α_1, a_2 cosec α_2, a_3 cosec α_3.

4. Le point directeur, et l'un ou l'autre des triangles $S_1S_2S_3$, $P_1P_2P_3$ suffisent pour déterminer les figures F_1, F_2, F_3.

5. Démontrer que les triangles $S_1S_2S'_3$, $S_2S_3S'_1$, $S_3S_1S'_2$ sont semblables.

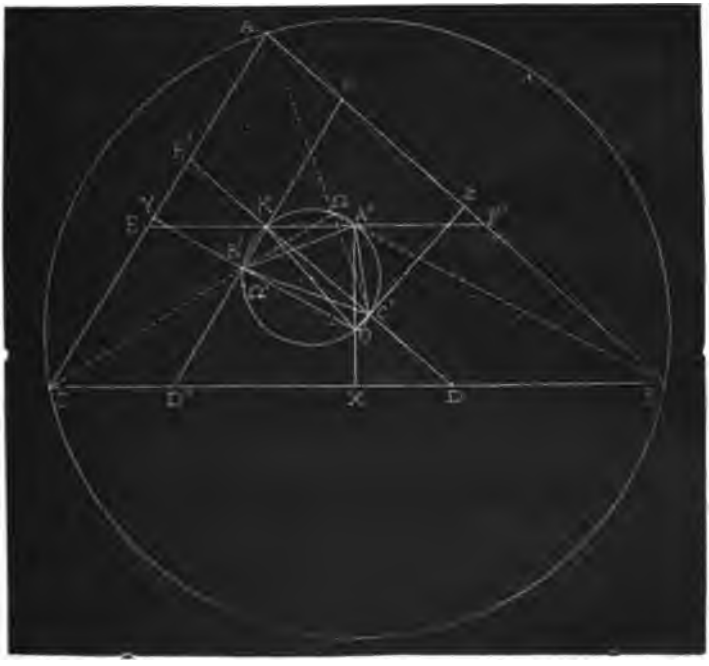
6. Si S'_1S_3, S'_2S_1 se coupent en S''_3, démontrer que le triangle $S_1S_2S''_3$, et les deux autres triangles analogues $S_2S_3S''_1$, $S_3S_1S''_2$, sont semblables.

SECTION V.

APPLICATION SPÉCIALE DE LA THÉORIE DES FIGURES DIRECTEMENT SEMBLABLES.

I. **Cercle de Brocard.** DÉF. I. *Si* O *est le centre du cercle circonscrit, et* K *le centre des symédianes du triangle* ABC, *le cercle décrit sur* OK *comme diamètre est appelé cercle de Brocard du triangle.*

DÉF. II. *Si du point* O, *on abaisse des perpendiculaires sur les côtés de* ABC, *celles-ci coupent le cercle de Brocard en trois autres points* A′, B′, C′ *formant un triangle, que nous appellerons premier triangle de Brocard.*



Le cercle de Brocard est ainsi appelé d'après M. H. BROCARD, chef de bataillon du génie, qui, le premier, étudia ses propriétés dans la *Nouvelle Correspondance Mathématique*, tomes III, IV, V, VI (1876 à 1879) et ensuite dans deux notes lues devant l'*Association Française pour l'Avancement des Sciences* (Congrès d'Alger, 1881, et de Rouen, 1883). Depuis, plusieurs géomètres ont étudié ses propriétés, spécialement MM. NEUBERG, ARTZT, M'CAY et TUCKER.

Prop. 1. *Le premier triangle de Brocard est inversement semblable à* ABC.

Dém. Puisque OA′ est perpendiculaire à BC, et OB′ à AC, l'angle A′OB′ est égal à ACB; mais A′OB′ est égal à A′C′B′, donc A′C′B′ est égal à ACB. De même, les autres angles de ces triangles sont égaux, et comme ils ont des orientations différentes, ils sont inversement semblables.

Cor. *Les trois droites* A′K, B′K, C′K *prolongées, coïncident avec les parallèles de Lemoine;* car, puisque l'angle OA′K est droit, A′K est parallèle à BC.

Prop. 2. *Les trois droites* A′B, B′C, C′A *sont concourantes, et se coupent sur le cercle de Brocard, en l'un des points de Brocard.*

Dém. Prolongeons BA′, CB′ qui se couperont en Ω. Puisque les perpendiculaires abaissées de K sur les côtés de ABC, sont proportionnelles à ces côtés, et que ces perpendiculaires sont respectivement égales à A′X, B′Y, C′Z, les triangles BA′X, CB′Y, AC′Z, sont équiangles; l'angle BA′X est donc égal à CB′Y ou égal à ΩB′O, les points A′, Ω, B′, O, sont concycliques, et BA′, CB′ se coupent sur le cercle de Brocard. De même, BA′ et AC′ se coupent sur le cercle de Brocard; les droites BA′, CB′, AC′ sont donc concourantes et évidemment (sect. II, prop. 5) le point de concours est un point de Brocard. De même, on pourrait démontrer que les trois droites AB′, BC′, CA′, se coupent sur le cercle de Brocard à l'autre point de Brocard.

Prop. 3. *Les droites* AA′, BB′, CC′ *sont concourantes.*

Dém. Puisque le cercle de Lemoine qui passe par F′ et E, et le cercle de Brocard qui passe par A′ et K sont concentriques, le segment F′A′ est égal à KE. Donc, les droites AA′, AK sont conjuguées isotomiques par rapport à l'angle A. De même, BB′ et BK sont conjuguées isotomiques par rapport à BC, et CC′ et CK par rapport à AB.

Par conséquent, les trois droites AA′, BB′, CC′, sont concourantes; leur point de concours (souvent désigné par la lettre D) est le conjugué isotomique de K par rapport au triangle ABC.

Cor. 1. *Les points de Brocard sont sur le cercle de Brocard.*

Cor. 2. *Les côtés du triangle* FDE *sont respectivement parallèles aux droites* AΩ, BΩ, CΩ.

Dém. Joignons DF; puisque AF = KE′ et KE′ = DC′, DC′ = AF. Par suite, DF est parallèle à AC′ c'est-à-dire à AΩ, etc. On démontrerait de même que les côtés de D′E′F′ sont respectivement parallèles à AΩ′, BΩ′, CΩ′.

Cor. 3. *Les six côtés de l'hexagone de Lemoine pris dans l'ordre naturel, sont proportionnels à* $\sin(A - \omega)$, $\sin\omega$, $\sin(B - \omega)$, $\sin\omega$, $\sin(C - \omega)$, $\sin\omega$.

Cor. 4. Ω *et* K *sont les points de Brocard du triangle* DEF, Ω′ *et* K *ceux du triangle* D′E′F′.

Cor. 5. *Les droites* AA′, BB′, CC′, *sont conjuguées isogonales des droites* A*p*, B*q*, C*r* (sect. II, prop. 2, cor. 2), *par rapport au triangle* ABC.

Déf. *Si le cercle de Brocard du triangle* ABC *coupe les symédianes respectivement aux points* A″, B″, C″, *le triangle* A″B″C″ *est appelé second triangle de Brocard.*

Prop. 4. *Le second triangle de Brocard est le triangle de similitude de trois figures semblables construites sur les trois côtés du triangle* ABC.

Dém. Puisque OK (fig., prop. 5) est le diamètre du cercle de Brocard, l'angle OA″K est droit et A″ est le milieu de la corde symédiane AT et, par suite, le point double de figures directement semblables décrites sur les droites BA, AC (sect. II, prop. 4, cor. 1, 5; sect. IV, déf. 1).

Prop. 5. *Si sur les côtés du triangle* ABC, *on construit des figures directement semblables, les symédianes du triangle formé par trois droites homologues, passent par les sommets du second triangle de Brocard.*

Dém. Soit *bac* un triangle formé par trois droites homologues; *bac* est semblable à BAC. Comme A″ est le point double de figures construites sur BA, AC et que *ba*, *ac* sont des droites homologues de ces figures, la droite A″*a* divise l'angle *bac* en parties respectivement égales à celles dans lesquelles A″A divise l'angle BAC. Donc, A″*a* est une symédiane de *bac* et de même B″*b*, C″*c*, sont des symédianes de *bac*.

Cor. 1. *Le point de Lemoine du triangle bac est sur le cercle de Brocard de* BAC.

Dém. Le triangle *bac* formé par trois droites homologues, est perspectif avec le triangle de similitude A″B″C″ (sect. IV, prop. 1) et le centre de perspective K′ est un point du cercle de similitude, c'est-à-dire du cercle de Brocard.

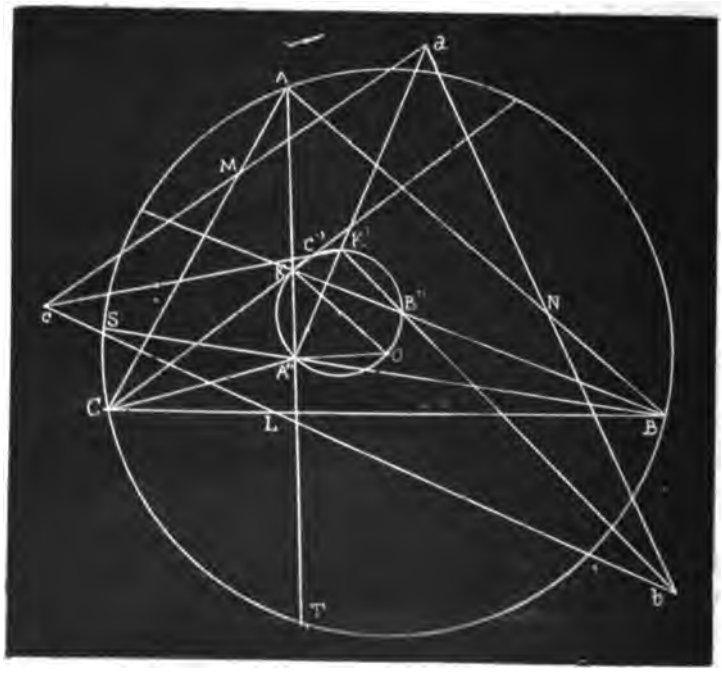
Cor. 2. *Les sommets* A′, B′, C′ *du premier triangle de Brocard, sont les points invariables des trois figures directement semblables construites sur les côtés de* BAC.

Dém. En effet, l'angle KA′K′ est égal à KA″K′ et, évidemment, égal à CL*c* d'après les propriétés de la similitude de BAC, *bac*. Mais A′K est parallèle à LC, donc A′K′ est parallèle à *bc*. De même B′K′ et C′K′

sont respectivement parallèles à *ac*, *ab*. Donc A'K', B'K', C'K', sont trois droites homologues, et A', B', C' sont les points invariables.

Cor. 3. *Le centre de similitude des triangles bac*, BAC, *est un point du cercle de Brocard.*

En effet, les figures K'*bac*, KBAC, sont semblables, et K'*a*, KA sont



des droites homologues se coupant en A''; donc le centre de similitude (sect. II, prop. 4) est le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles A''aA et A''KK'. Mais l'un de ceux-ci est le cercle de Brocard ; donc, etc.

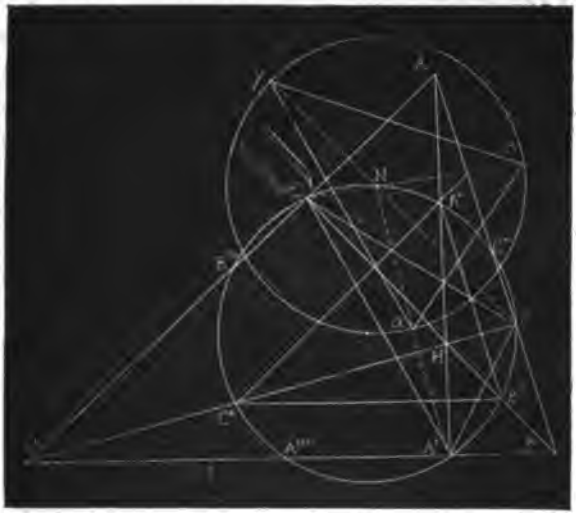
Cor. 4. On pourrait démontrer d'une façon analogue, que *le centre de similitude de deux figures, dont les côtés sont deux triples de droites homologues de trois figures quelconques, directement semblables, est un point du cercle de similitude de ces trois figures.*

Cor. 5. *Si trois droites homologues sont concourantes, le lieu de leur point de concours est le cercle de Brocard.*

Ce théorème, dû à M. Brocard, est un cas particulier de la prop. 2,

sect. IV, ou du cor. 1, dus à M. M'Cay, ou de l'un ou de l'autre de mes théorèmes, cor. 3 et 4.

II. **Cercle des neuf points**. Soit ABC un triangle, dont les hauteurs sont AA', BB', CC'; les triangles AB'C', A'BC', A'B'C sont inversement semblables à ABC. Considérons ces triangles comme appartenant à trois figures directement semblables F_1, F_2, F_3; nous avons trois triples de points homologues, savoir : Premier triple (A, A', A'); second triple (B', B, B'); troisième triple (C', C', C).



Les points doubles A', B', C', sont les pieds des hauteurs. Les trois droites homologues AB', A'B, A'B' sont égales à AB cos A, AB cos B, AB cos C; par suite, trois droites homologues sont proportionnelles à cos A, cos B, cos C. Les trois angles α_1, α_2, α_3 sont $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$.

Premier triple de droites homologues : Les perpendiculaires aux milieux des droites homologues AB', A'B, A'B'.

Second triple de droites homologues : Les perpendiculaires aux milieux des droites homologues B'C', BC', B'C.

Troisième triple de droites homologues : Les perpendiculaires aux milieux des droites homologues C'A, C'A', CA'.

Les points de concours de ces triples de droites, sont les milieux A''', B''', C''' des côtés de ABC.

Le point de concours des droites de F_1 de ces triples est le milieu A'' de AH; le point de concours des droites de F_2 est le milieu B'' de BH; et celui des droites de F_3 est le milieu C'' de CH.

Les points A'', B'', C'' sont les points invariables.

Donc, les neuf points suivants : A', B', C' (centres de similitude); A'', B'', C'' (points invariables); A''', B''', C''' (points de concours de triples de droites homologues), sont sur le cercle de similitude.

Par suite, le cercle de similitude est le cercle des neuf points du triangle; ce qui donne lieu aux théorèmes suivants :

1° *Trois droites homologues des triangles* AB'C', A'BC', A'B'C, *forment un triangle* $\alpha\beta\gamma$ *perspectif avec* A'B'C'; *leur centre de perspective* N *est sur le cercle des neuf points de* ABC; *le point* N *est le centre du cercle* $\alpha\beta\gamma$. Ses distances aux côtés de $\alpha\beta\gamma$ sont proportionnelles à cos A, cos B, cos C. Par exemple, les droites de Brocard des trois triangles jouissent de cette propriété.

2° *Les droites joignant les points* A'', B'', C'' *à trois points homologues de* F_1, F_2, F_3, *se coupent en un même point du cercle des neuf points de* ABC.

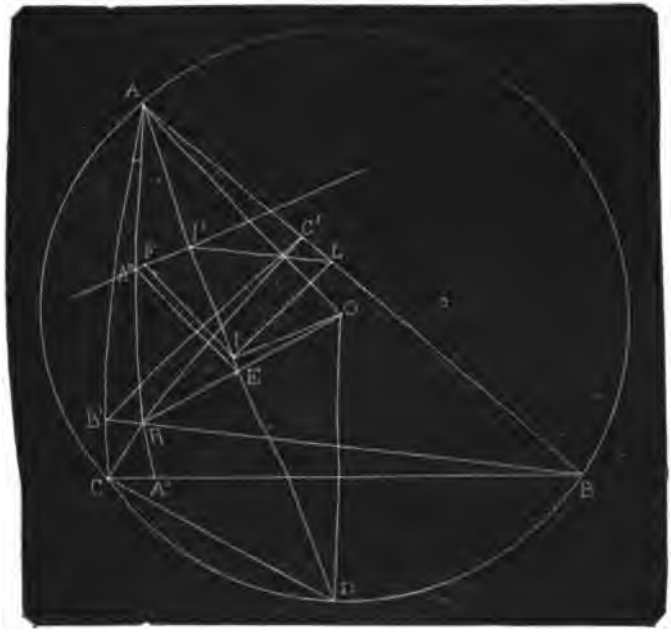
3° *Si* P, P_1, P_2, P_3, *sont des points homologues des triangles* ABC, AB'C', A'BC', A'B'C, *les droites* A''P_1, B''P_2, C''P_3 *coupent le cercle des neuf points de* ABC, *au point qui est le conjugué isogonal par rapport au triangle* A''B''C'' *du point à l'infini de la droite joignant* P *au centre du cercle circonscrit à* ABC.

4° *Toute droite passant par l'orthocentre* H *coupe les cercles circonscrits aux triangles* AB'C', A'BC', A'B'C *en des points homologues.*

5° *Les droites joignant les points* A'', B'', C'' *aux centres des cercles inscrits aux triangles* AB'C', A'BC', A'B'C, *passent par le point de contact du cercle des neuf points de* ABC *avec le cercle inscrit.*

Dém. Soit O le centre du cercle circonscrit. Joignons OA, et menons A''E parallèle à OA et coupant OH en E; alors, EA' est un rayon du cercle des neuf points. Soit AD la bissectrice de l'angle BAC; les centres des cercles inscrits aux triangles ABC, AB'C' sont sur la droite AD, en I et I'. Menons I'A''. Nous devons démontrer que I'A'' passe par le point de contact du cercle des neuf points avec le cercle inscrit à ABC. De I, abaissons la perpendiculaire IL sur AB, menons LI'. Il est facile de voir que le triangle ILI' est isoscèle; en effet, IL = LI'. Donc, si r est le rayon du cercle inscrit au triangle ABC et R le rayon du cercle circonscrit, nous aurons $2r^2 = AI.II'$, $2Rr = AI.DI$; d'où $r : R = II' : DI$.

Menons ensuite IF parallèle à EA''. Puisque les points I', A'' du triangle AB'C', correspondent à I et O de ABC, l'angle AI'A'' = AIO. Par suite, II'F = DIO et I'IF = IDO, car chacun de ces angles est égal à DAO. Les triangles II'F et DIO sont équiangles, et l'on a II' : DI = IF : DO, d'où IF : DO = r : R ; donc IF = r. Maintenant, comme



EA'' et IF sont parallèles et sont respectivement des rayons du cercle des neuf points et du cercle inscrit à ABC, la droite FA'' passe par leur centre de similitude; ce qui démontre le théorème.

De même, *si* J' *est le centre de l'un des cercles exinscrits au triangle* AB'C', *la droite* A''J' *passe par le point de contact du cercle des neuf points de* ABC *avec le cercle exinscrit correspondant.*

Exercices. 1. Soient A_1, B_1, C_1 les symétriques des sommets A, B, C, du triangle ABC par rapport aux côtés opposés. Les triangles A_1BC, B_1CA, C_1BA étant considérés comme faisant partie de trois figures directement semblables. Démontrer que

1° A, B, C, sont les points doubles.

2° Les orthocentres de A_1BC, AB_1C, ABC_1, sont les points invariables.

3° A_1, B_1, C_1 sont les points adjoints.

4° L'orthocentre de ABC est le point directeur.

5° Le centre du cercle inscrit au triangle formé par trois lignes homologues, est leur centre de perspective.

6° Le triangle formé par trois droites homologues quelconques est semblable au triangle orthique de ABC.

7° Les droites joignant les orthocentres de A_1BC, AB_1C, ABC_1 aux centres de leurs cercles inscrits sont concourantes.

2. Si par l'orthocentre d'un triangle on mène une droite L, les symétriques de L par rapport aux côtés du triangle sont concourantes.

3. Sur les côtés de ABC on construit trois triangles BCA_1, CAB_1, ABC_1 tels que A soit le centre de l'un des cercles exinscrits à BCA_1, B le centre de l'un des cercles exinscrits à CAB_1, C celui de l'un des cercles exinscrits à ABC_1. Démontrer que

1° Les triangles BCA_1, CAB_1, ABC_1 sont semblables.

2° A, B, C sont les points doubles.

3° Les centres des cercles inscrits à A_1BC, B_1CA, C_1AB sont les points invariables.

4° A_1, B_1, C_1 sont les points adjoints.

5° Le centre du cercle circonscrit à ABC est le point directeur.

6° Le centre de perspective du triangle formé par trois droites homologues est l'orthocentre de ce triangle.

7° Trois droites homologues forment un triangle inversement semblable à ABC.

8° Les droites joignant les centres des cercles inscrits à A_1BC, B_1AC, C_1AB à leurs orthocentres, sont concourantes.

4. Démontrer que les triangles AE'F, DBF', D'EC, [fig. sect. III, prop. 3] sont directement semblables et que

1° Les points invariables sont les centres de gravité de ces triangles.

2° Les points doubles sont les intersections des symédianes du triangle ABC avec le cercle passant par les points invariables.

3° Le point directeur est le point de Lemoine de ABC.

4° Le centre de perspective du triangle formé par trois droites homologues est le centre de gravité de ce triangle.

L'application de la théorie de Tarry des figures semblables contenue dans cette section est due à M. Neuberg, sauf les théorèmes 3° et 5° et les exercices 2 et 4, dont le dernier a été publié par M. Van Dorsten, dans *Mathesis*, 1887, t. VII, p. 161. La démonstration donnée du 5° est à peu près la même que celle qu'en a publiée M. M'Cay peu de temps après que je lui eus communiqué ce théorème.

SECTION VI.

THÉORIE DES POLYGONES HARMONIQUES.

DÉF. I. *Un polygone cyclique d'un nombre quelconque de côtés, qui possède dans son plan un point* K *tel que les perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés sont proportionnelles aux côtés, est appelé polygone harmonique.*

DÉF. II. *Le point* K *est appelé centre des symédianes du polygone.*

DÉF. III. *Les droites menées par* K *aux sommets du polygone, sont appelées les symédianes de celui-ci.*

DÉF. IV. *Deux figures ayant les mêmes droites symédianes sont appelées figures co-symédianes.*

DÉF. V. *Si* O *est le centre du cercle circonscrit au polygone, le cercle décrit sur* OK *comme diamètre, est appelé cercle de Brocard du polygone.*

DÉF. VI. *Si les côtés du polygone sont désignés par a, b, c, d, ... et les perpendiculaires abaissées de* K *sur ces côtés par x, y, z, u, ..., l'angle* ω *qui est déterminé par l'une des équations* $x = \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \omega$, $y = \frac{1}{2} b \operatorname{tang} \omega$, *... est appelé angle de Brocard du polygone.*

Prop. 1. *Les inverses des sommets d'un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés, par rapport à un point quelconque, sont les sommets d'un polygone harmonique du même nombre de côtés.*

Dém. Soient A, B, C, ... les sommets du polygone régulier ; A′, B′, C′, ... les points diamétralement opposés à ceux-ci. Transformons la figure par inversion, le pôle d'inversion étant placé en un point arbitraire. Le cercle circonscrit se transformera en un cercle X et ses diamètres AA′, BB′, CC′, ... en un système coaxial(*) Y, Y_1, Y_2, etc., et les axes radicaux des couples de cercles (X, Y), (X, Y_1), (X, Y_2), ..., concourent en un même point.

Donc, si les inverses des systèmes de points A, B, C, ..., A′, B′, C′, ..., sont les systèmes $\alpha, \beta, \gamma \ldots, \alpha', \beta', \gamma' \ldots$, les droites $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma' \ldots$, concourent en un même point K. Comme les points A, B, C, B′ forment un système harmonique, leurs inverses, les points $\alpha, \beta, \gamma, \beta'$, forment aussi un système harmonique. Mais la droite $\beta\beta'$ passe par K ; par conséquent,

(*) C'est-à-dire, en des cercles ayant deux à deux le même axe radical ou formant un *faisceau*. L'axe radical commun passe par le pôle d'inversion et par l'inverse du centre du cercle ABC.

les perpendiculaires menées de K sur les droites $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, sont proportionnelles à ces droites, ce qui démontre le théorème.

Cor. 1. *Si les sommets d'un polygone harmonique de n côtés sont* 1, 2, 3, ... *n, et* K *le centre des symédianes, le polygone étoilé formé par les cordes* (13), (24), (35) *etc. est un polygone harmonique, et* K *est son centre des symédianes.*

Il suffit de prouver que les perpendiculaires abaissées de K sur ces cordes, sont proportionnelles à ces cordes.

Soient A, B, C trois sommets consécutifs quelconques; p, p' les perpendiculaires menées de K sur les droites AB, AC; et soit A' le second point d'intersection de AK avec le cercle. Il est facile de voir que le rapport $\frac{p}{AB} : \frac{p'}{AC}$ est égal au rapport anharmonique (ABCA') lequel est constant puisqu'il est égal au rapport anharmonique correspondant dans un polygone régulier. Or p : AB est constant; donc p' : AC l'est également.

Cor. 2. *De même, le polygone formé par les cordes* (14), (25), (36) *est un polygone harmonique, ayant aussi* K *pour centre des symédianes; etc.*

Cor. 3. *Les sommets d'un triangle quelconque peuvent être considérés comme les inverses des sommets d'un triangle équilatéral.*

Cor. 4. *Un quadrilatère harmonique est l'inverse d'un carré; son centre des symédianes est l'intersection de ses diagonales.*

Cor. 5. *Un quadrilatère harmonique est la figure dont les sommets sont quatre points harmoniques d'un cercle. Donc le produit de deux côtés opposés est égal au produit des deux autres.*

Cor. 6. *Si* 1, 2, 3, ..., 2*n sont les sommets d'un polygone harmonique d'un nombre pair de côtés, le polygone formé par les sommets alternants* 1, 3, 5, ..., 2*n* — 1 *est un polygone harmonique, ainsi que le polygone formé par les sommets* 2, 4, 6, ... 2*n, et ces trois polygones ont même centre des symédianes.*

Prop. 2. *Transformer un polygone harmonique en un polygone régulier.*

Solution. Soient AB un côté du polygone harmonique, Z le cercle circonscrit, O le centre du cercle circonscrit et K le centre des symédianes. Sur OK comme diamètre, décrivons un cercle OKX, et soient S et S' les points-limites de Z et OKX; joignons SA, SB et prolongeons-les, s'il est nécessaire, de façon à couper de nouveau Z en A', B'. Alors A'B' est le côté d'un polygone régulier.

Dém. Soient P le point d'intersection de AB et A'B'; C, C' leurs

points d'intersection avec OK. La polaire de S passera par P et S'; le faisceau P (SCS'C') est harmonique; d'où, successivement,

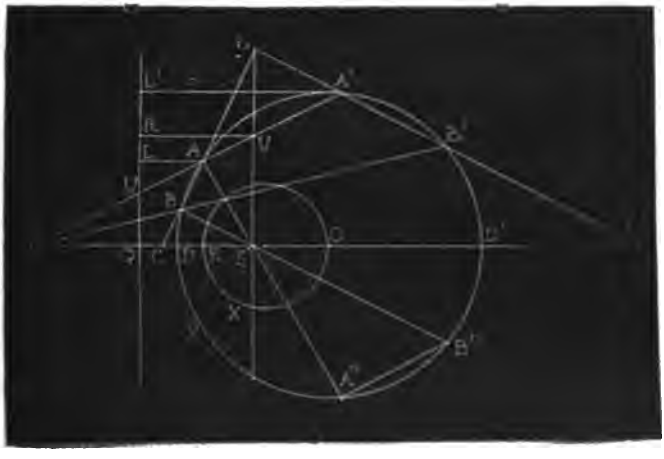
$$\frac{2}{SS'}=\frac{1}{SC}+\frac{1}{SC'}=\frac{1}{SK}+\frac{1}{SO};$$

$$\frac{SK-SC}{SK.SC}=\frac{SC'-SO}{SC'.SO},\quad \frac{KC}{SC}:\frac{OC'}{SC'}=\frac{SK}{SO},\quad \frac{(K,AB)}{(S,AB)}:\frac{(O,A'B')}{(S,A'B')}=\frac{SK}{SO}.$$

Mais, puisque les triangles SAB, SB'A' sont semblables, on a

$$\frac{(S,AB)}{(S,A'B')}=\frac{AB}{A'B'};\quad \text{donc}\quad \frac{(K,AB)}{AB}:\frac{(O,A'B')}{A'B'}=\frac{SK}{SO}.$$

Comme AB est un côté d'un polygone harmonique dont le centre des symédianes est K, le rapport (K, AB) : AB est constant; et puisque



S, K, O sont des points donnés, le rapport SK : SO est donné; donc le rapport (O, A'B') : A'B' est constant et A'B' est constant, ce qui démontre le théorème.

Cor. 1. *Les droites* S'A, S'B *rencontrent la circonférence* Z *une seconde fois en des points* A'', B'' *qui sont les symétriques de* A', B', *par rapport au diamètre* DD' *de* Z.

Déf. vii. *Les points* S, S' *sont appelés les centres d'inversion du polygone harmonique.*

Cor. 2. *Les centres d'inversion d'un polygone harmonique sont con-*

jugués harmoniques par rapport au centre du cercle circonscrit et au centre des symédianes.

Observation. Il est évident que cette proposition donne une nouvelle démonstration de la Proposition I. Donc, si au lieu de O, nous prenons un point K′ collinéaire avec O et K et si nous répétons la construction précédente en employant seulement K′ au lieu de O, nous aurons transformé le polygone harmonique dont le centre des symédianes est K, en un autre dont le centre des symédianes est K′.

Prop. 3. *Si* ∂ *est la distance du centre des symédianes au centre du cercle circonscrit et* R *le rayon du cercle circonscrit, on a*

$$\operatorname{tang}\omega = \sqrt{1 - \frac{\partial^2}{R^2}}\cot\frac{\pi}{n}.$$

Dém. Nous avons (déf. VI) $(K, AB) = 2AB \operatorname{tang}\omega$, et, comme le polygone dont le côté est A′B′ est régulier et a n côtés,

$$(O, A'B') = 2A'B'\cot\frac{\pi}{n}, \quad \operatorname{tang}\omega : \cot\frac{\pi}{n} = SK : SO.$$

En outre, puisque les points O, K sont conjugués harmoniques par rapport à S, S′ et que S, S′ sont inverses par rapport à Z, il est aisé de voir que

$$\frac{SK}{SO} = \sqrt{1 - \frac{\partial^2}{R^2}}; \quad \text{donc,} \quad \operatorname{tang}\omega = \sqrt{1 - \frac{\partial^2}{R^2}}\cot\frac{\pi}{n}.$$

Cor. 1. $$\partial^2 = R^2\left(1 - \operatorname{tang}^2\omega\tan^2\frac{\pi}{n}\right).$$

Cor. 2. *Si deux polygones harmoniques de* m *et* n *côtés ont même cercle circonscrit et même centre des symédianes, les tangentes de leurs angles de Brocard sont entre elles dans le rapport* $\cot\frac{\pi}{m} : \cot\frac{\pi}{n}$.

Cor. 3. Étant donné un cercle, le côté A′B′ d'un polygone régulier inscrit de n côtés peut occuper une infinité de positions; il résulte de là que *l'on peut inscrire à un cercle un nombre indéfini de polygones harmoniques de* n *côtés, ayant même centre des symédianes.*

Cor. 4. *Le rapport anharmonique de quatre sommets consécutifs quelconques d'un polygone harmonique est constant.*

Prop. 4. *Si* $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ *sont les sommets d'un polygone harmonique de* n *côtés, les cordes* A_1A_{n-1}, A_2A_{n-2}, ... *etc. sont concourantes.*

Dém. Soit K le centre des symédianes. La droite A_0K coupe le cercle circonscrit en un second point A_0'. Les points A_0, A_0' sont conjugués

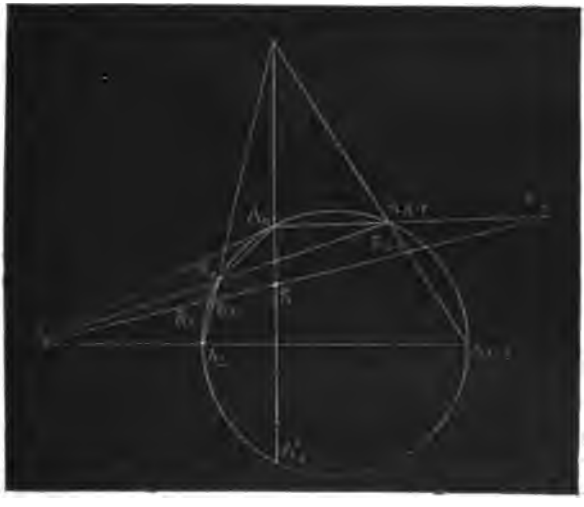
harmoniques par rapport aux points A_1, A_{n-1} (Démonstration de la prop. 1.) Donc la droite A_1A_{n-1}, passe par le pôle α de A_0A_0'. De même, A_2A_{n-2} passe par α, etc.

Cor. *Les couples* A_1A_{n-1}, A_2A_{n-2}, *etc. appartiennent à une involution dont* A_0, A_0' *sont les points doubles. Les sommets d'un polygone harmonique forment autant de systèmes en involution qu'il y a de symédianes.*

Prop. 5. *Une transversale menée par le centre des symédianes* K *coupe les côtés du polygone aux points* R_1, R_2, ... R_n. *Si l'on prend un point* P *sur cette droite, de façon que*

$$\frac{1}{KR_1}+\frac{1}{KR_2}+\cdots=\frac{n}{KP},$$

le lieu de P *est la polaire de* K *par rapport au cercle circonscrit.*



Dém. Soit α le pôle de la corde symédiane A_0A_0'. Joignons $K\alpha$; il est aisé de voir que α est une position de P. Car, si n est pair, les côtés peuvent être distribués par couples, de façon que les points K, α soient conjugués harmoniques des points de rencontre de chaque couple de côtés avec la droite $K\alpha$. Donc

$$\frac{1}{KR_1}+\frac{1}{KR_n}=\frac{2}{K\alpha},\quad \frac{1}{KR_2}+\frac{1}{KR_{n-1}}=\frac{2}{K\alpha},\text{ etc...}$$

Si n est impair, le segment intercepté par l'un des côtés sur $K\alpha$ est égal à $K\alpha$. Donc, dans chaque cas, la somme des inverses des segments faits par tous les côtés sur $K\alpha$ est égal à $(n : K\alpha)$; α est donc un point du lieu de P. De même, le pôle de chaque symédiane est un point du lieu. Donc le lieu, qui est une droite (ainsi qu'on peut le démontrer) est la droite passant par les pôles de toutes les symédianes.

Cor. 1. *Le point* K *et sa polaire par rapport au cercle circonscrit, sont pôle et polaire harmoniques par rapport au polygone.* (Voir Salmon, *Higher Curves*, 3e édition, p. 115.)

Le point K et sa polaire harmonique sont appelés par les géomètres français *le point et la droite de Lemoine du polygone.*

Cor. 2. *Si un polygone harmonique est transformé par polaires réciproques par rapport à un cercle ayant son centre au point de Lemoine du polygone, le pôle de sa droite de Lemoine est le centre des moyennes distances des sommets du polygone réciproque.* Ceci résulte de la prop. 5.

Prop. 6. *Si les longueurs des côtés d'un polygone harmonique sont* $a, b, c, \ldots$ *et si les perpendiculaires abaissées sur ceux-ci d'un point* P *de la droite de Lemoine sont* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, *la somme*

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\cdots=0.$$

Dém. Soient $R_1, R_2, \ldots$ les points d'intersection des côtés avec la droite KP. Nous avons

$$\left(\frac{1}{KR_1}-\frac{1}{KP}\right)+\left(\frac{1}{KR_2}-\frac{1}{KP}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{KR_n}-\frac{1}{KP}\right)=0,$$

ou

$$\frac{PR_1}{KR_1}+\frac{PR_2}{KR_2}+\cdots+\frac{PR_n}{KR_n}=0.$$

Maintenant, si les perpendiculaires abaissées de K sur les côtés du polygone sont $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$, on a

$$\frac{PR_1}{KR_1}=\frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{PR_2}{KR_2}=\frac{\beta}{\beta'}, \quad \cdots \quad \text{D'où} \quad \frac{\alpha}{\alpha'}+\frac{\beta}{\beta'}+\frac{\gamma}{\gamma'}+\cdots=0;$$

mais $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ sont proportionnels à $a, b, c, \ldots$, ce qui démontre le théorème.

Prop. 7. *Si l'on désigne par* $p_1, p_2, \ldots p_n, \pi$ *les perpendiculaires abaissées des sommets d'un polygone harmonique et de son point de Lemoine sur la droite de Lemoine,* $\Sigma(1 : p) = n : \pi$.

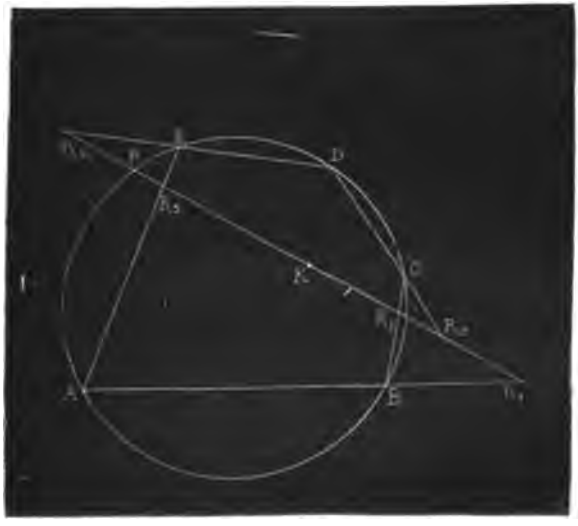
Dém. Soit LL′ (fig. prop. 2) la droite de Lemoine. Comme les points O, S′, K, S forment un système harmonique, on a

$$\frac{1}{OK}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{OS'}+\frac{1}{OS}\right).$$

D'autre part, $OK.OQ'=R^2$, $OS'.OS=R^2$, $OS.OS'=R^2$; donc $OQ=\frac{1}{2}(OS+OS')$, de sorte que Q est le milieu de SS′.

Les points S, A, V, A′ forment une division harmonique, et U est le milieu de SV; donc, d'après un théorème connu, $\overline{UV}^2=UA.UA'$. D'où $\overline{VR}^2=AL.A'L'$. Mais, les points harmoniques O, S′, K, S donnent également, Q étant le milieu de SS′, $\overline{QS'}^2=QK.QO$; et comme $VR=S'Q$, on peut écrire $QK.QO=AL.A'L'$, ce qui revient à $\pi.OQ=p_1.A'L'$, ou $A'L':\pi=OQ:p_1$ Faisant la somme de toutes les relations analogues à celle-ci, et observant que $n.OQ=\Sigma A'L'$, nous aurons définitivement $n:\pi=\Sigma(1:p)$.

Prop. 8. *Si une transversale menée par le centre des symédianes* K,



coupe les côtés d'un polygone harmonique de n côtés, aux points R_1, R_2, ... R_n, *et le cercle circonscrit en* P, *on a*

$$\frac{1}{R_1P}+\frac{1}{R_2P}+\cdots+\frac{1}{R_nP}=\frac{n}{KP}.$$

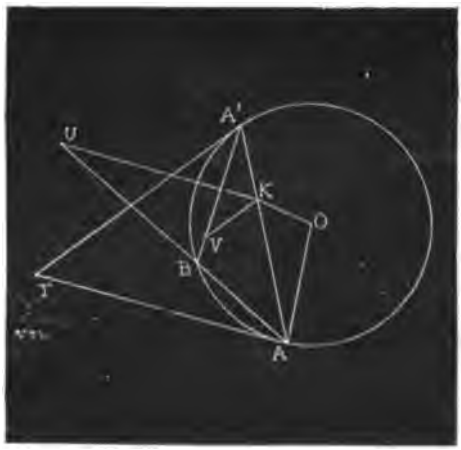
Soient a, b, c, etc. les longueurs des côtés; α, β, γ, etc., les longueurs des perpendiculaires abaissées du point P sur ces côtés; α', β', γ', etc., les longueurs des perpendiculaires abaissées du point K. On aura d'abord, $(a:\alpha)+(b:\beta)+(c:\gamma)+\cdots=0$. Mais, puisque K est le centre des symédianes, $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ sont proportionnels à a, b, c, etc. Donc

$$\frac{\alpha'}{\alpha}+\frac{\beta'}{\beta}+\frac{\gamma'}{\gamma}+\cdots=0.$$

D'ailleurs, $\alpha' : \alpha = R_1K : R_1P = 1 - (KP : R_1P)$; $\beta' : \beta =$ etc. Par conséquent,

$$n-\frac{KP}{R_1P}-\frac{KP}{R_2P}-\cdots-\frac{KP}{R_nP}=0, \quad \frac{1}{R_1P}+\frac{1}{R_2P}+\cdots+\frac{1}{R_nP}=\frac{n}{KP}.$$

Prop. 9. *Si par le centre des symédianes d'un polygone harmonique, on mène une parallèle à la tangente en l'un des sommets, le segment de la parallèle compris entre le centre des symédianes et l'un ou l'autre des côtés du polygone passant par ce sommet, est constant.*



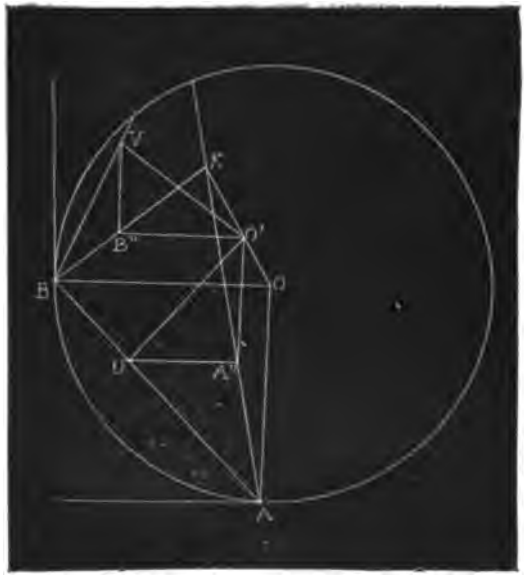
Dém. Soient AB un côté du polygone harmonique, AT la tangente, KU la parallèle. Prolongeons AK qui coupera le cercle en A'; joignons A'B et soit KX la perpendiculaire abaissée de K sur AB. Alors $KX : KU = \sin AUK = \sin UAT = \sin AA'B = \frac{1}{2}AB : R$. Donc $KU : R = KX : \frac{1}{2}AB = \operatorname{tang}\omega$ (ω est l'angle de Brocard du polygone). Donc, $KU = R \operatorname{tang}\omega$.

Cor. 1. *Si le polygone a n côtés, il y aura 2n points correspondants à* U, *et ces points seront concycliques.*

Cor. 2. *Si ω' est l'angle de Brocard du polygone harmonique dont le côté est* A'B, $\operatorname{tang}\omega . \operatorname{tang}\omega' = (AK . A'K : R^2)$.

Car, menons KV parallèle a A'T. Il est facile de voir que les triangles AKU, VKA' sont équiangles. Donc $KU . KV = KA . KA'$ c'est-à-dire $R^2 \operatorname{tang}\omega \operatorname{tang}\omega' = KA . KA'$.

Prop. 10. *Si les symédianes* KA, KB, *etc. d'un polygone harmonique sont divisées aux points* A″, B″ *etc. dans un rapport donné, et que par ces points des parallèles soient menées aux tangentes aux sommets, chaque parallèle coupant les deux côtés qui passent par le sommet correspondant, tous les points d'intersection sont concycliques, et, pris alternativement, ils forment les sommets de deux polygones harmoniques.*



Dém. Soit A″ le point divisant KA dans le rapport $l : m$; joignons AO, OK, menons A″O′ parallèle à AO, et soient A″U, KU′ les parallèles à la tangente en A terminées en U et U′ au côté AB. Nous avons alors $\overline{O'U}^2 = \overline{O'A''}^2 + \overline{A''U}^2$; mais $O'A'' = lR : (l + m)$ et $A''U = m.KU : (l + m) = mR \text{ tang } \omega : (l + m)$ (prop. 9). Donc $(l + m)^2.\overline{O'U}^2 = R^2 (l^2 + m^2 \text{ tang}^2 \omega)$ et O′U est constant. Si B″V est parallèle à la tangente en B, le triangle O′B″V est sous tous les rapports égal à O′A″U; donc l'angle UO′V est égal à AOB. Par conséquent, les points U, V, ..., sont les sommets d'un polygone semblable à celui formé par les points A, B, ... Donc ils forment un polygone harmonique. Il est évident, qu'en opérant à partir de A dans la direction opposée, nous obtiendrons un autre polygone harmonique. La proposition est donc démontrée.

Cor. 1. *Le segment que le cercle* O′ *intercepte sur le côté* AB *est* $2R (l \sin A - m \cos A \text{ tang } \omega) : (l + m)$, A *désignant l'angle du côté* AB *avec le cercle circonscrit* O.

En effet, les perpendiculaires abaissées de O et de K sur AB sont respectivement R cos A, R sin A tang ω, et OK est divisé en O′ dans le rapport $(m : l)$. La perpendiculaire p abaissée de O′ sur AB est, par conséquent, $R (l \cos A + m \sin A \text{ tang } \omega) : (l + m)$. Soustrayant le carré p^2, du carré

et rayon de O', nous obtenons $R^2 (l \sin A - m \cos A \operatorname{tang} \omega)^2 : (l+m)^2$. *Donc le segment est égal à* $2R \cdot (l \sin A - m \cos A \operatorname{tang} \omega) : (l+m)$.

Cor. 2. En donnant diverses valeurs au rapport $(l : m)$ *nous obtenons plusieurs résultats intéressants.* Ainsi :

1° *Si* $l = 0$, *nous obtenons des segments proportionnels à* cos A, cos B, cos C, *etc. Le cercle, dans ce cas, est celui de la prop. 9 et est appelé, en anglais, Cosine-Circle du polygone* (*second cercle de Lemoine*).

2° *Si* $l = m$, O' *sera le milieu de la droite* OK, *et le cercle sera concentrique au cercle de Brocard. Il est appelé par analogie, premier cercle de Lemoine du polygone; son diamètre est égal à* R sec ω, *et les segments qu'il intercepte sur les côtés sont proportionnels à* $\sin(A - \omega)$, $\sin(B - \omega)$, *etc.*

3° *Si* $l = m \operatorname{tang} \omega$, *les segments sont proportionnels à* $\sin(A - \frac{1}{6}\pi)$, $\sin(B - \frac{1}{6}\pi)$, ..., *et le rayon est égal à* $R \sin \omega \operatorname{cosec}(\frac{1}{6}\pi + \omega)$.

4° *Si* $l = m \operatorname{tang}^2 \omega$, *le centre du cercle est le milieu de la droite* ΩΩ', *le rayon est égal à* R sin ω, *les segments sont proportionnels à* $\cos(A + \omega)$, $\cos(B + \omega)$, ...; *ce sont les projections de* ΩΩ' *sur les côtés du polygone.*

5° Si le polygone se réduit à un triangle, et si $l : m$ est égal à $-\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C : (1 + \cos A \cos B \cos C)$ ou $-\cot A \cot B \cot C : \cot \omega$ les segments sont respectivement égaux à

$R \sin 2A \cos(B - C)$, $R \sin 2B \cos(C - A)$, $R \sin 2C \cos(A - B)$.

Les perpendiculaires du centre sur les côtés, sont proportionnelles à $\cos^2 A \cos B \cos C - \sin^2 A \sin B \sin C$, etc.; *c'est le cas du cercle de Taylor.*

6° *Tout cercle de Tucker du triangle* ABC *est un cercle de Taylor de quelque autre triangle* A'B'C' *ayant même cercle circonscrit et même centre des symédianes.* Car le cercle de Tucker du triangle ABC étant donné, le rapport $l : m$ est donné; tous les triangles inscrits au cercle ABC et ayant K pour centre des symédianes ont même angle de Brocard. Des relations $\Sigma \cot A' = \cot \omega$, $\Sigma \cot A' \cot B' = 1$, $l \cot \omega + m \cot A' \cot B' \cot C' = 0$, nous déduisons, en posant $\cot A' = x$, l'équation

$$x^3 - \cot \omega \cdot x^2 + x + \frac{l}{m} \cot \omega = 0,$$

dont les racines sont les cotangentes des angles du triangle cherché.

Prop. 11. *Soient* ABC ..., A'B'C' ..., *deux polygones harmoniques homothétiques, d'un nombre quelconque de côtés; K leur centre d'homothétie. Si des couples de côtés consécutifs de* A'B'C' ..., *prolongés s'il le faut,*

rencontrent les couples correspondants de ABC ... *aux couples de points* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, *etc., les points* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, *etc. sont concycliques.*

Car, puisque la figure $\beta B\beta' B'$ est un parallèlogramme, BB′ et $\beta\beta'$ se coupent en leur milieu B″; et puisque le rapport KB : KB′ est donné, le rapport KB : KB″ est aussi donné, et $\beta\beta'$ qui passe par B″ est parallèle à la tangente en B. Donc, etc.

Cor. 1. *Si les polygones harmoniques de la prop.* 11 *sont des quadrilatères, leurs cercles circonscrits et celui de l'octogone* $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'\delta\delta'$ *sont coaxiaux.* Car il est aisé de voir que les carrés des tangentes menées de B aux cercles circonscrits à $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'\delta\delta'$ et A′B′C′D′ sont dans le rapport de 1 à 2; et les carrés des tangentes menées en C, D, A, aux mêmes cercles sont aussi dans le rapport de 1 à 2.

Cor. 2. *Si les deux polygones harmoniques de la prop.* 11 *ont un nombre pair de côtés, les n points d'intersection des côtés du premier, avec les côtés opposés correspondants du second, sont collinéaires.*

Dém. Pour simplifier, nous supposons que les figures soient des quadrilatères, mais la démonstration est générale. Soit P le point d'intersection de AB avec C′D′; l'angle ABE = AC′D′; ABC′D′ est un quadrilatère inscriptible; par conséquent, P est un point de l'axe radical des cercles circonscrits, ce qui démontre le théorème.

Cor. 3. *Dans le cas général, les droites* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, *etc. sont les côtés d'un polygone homothétique avec celui que forment les tangentes menées aux sommets* A, B, C, *etc. Il résulte de là que, si le polygone harmonique* ABC ... *a un nombre pair de côtés, les points d'intersection des droites* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, *etc. prises par couples opposés, sont collinéaires.*

Prop. 12. *Dans tout polygone harmonique de n côtés, les perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les côtés rencontrent la circonférence circonscrite en n points tels que les 2n droites joignant ces points aux extrémités des côtés correspondants concourent, n à n, en deux points fixes* Ω′, Ω *de la circonférence.*

Cette proposition générale peut être prouvée exactement de la même façon que la proposition 2 de la section V, p. 30.

Déf. *Les points* Ω, Ω′ *sont appelés les* POINTS DE BROCARD *du polygone; les n points* L, M, N, *etc. où les perpendiculaires coupent le cercle de Brocard* (pour la même raison qu'au cor. 2 de la prop. 5, sect. V), *sont appelés les* POINTS INVARIABLES; *les projections du centre* O *sur les symédianes* AK, BK, ... *seront les* POINTS DOUBLES *du polygone*(*).

Cor. 1. *Les n lignes joignant, respectivement, les points invariables* L, M, N, ... *à n points correspondants des figures directement semblables construites sur les côtés du polygone harmonique concourent en un même point du cercle de Brocard du polygone.*

Prop. 13. *Les centres de similitude des couples de côtés consécutifs d'un*

polygone harmonique, sont les sommets d'un polygone harmonique (TARRY).

(*) Le milieu de la corde symédiane BK est, par exemple, le centre de similitude de deux figures semblables construites sur AB et BC.

Dém. Soit A un sommet du polygone harmonique, K son pôle harmonique. Joignons AK, et déterminons son point d'intersection M avec le cercle de Brocard. Menons MS qui rencontre le cercle de Brocard en N; menons aussi AS qui coupe le cercle circonscrit Z en A'; enfin, joignons ON. La polaire PQ de S passe par l'intersection de MK et ON; et puisque les segments PS et AA', S'S et KO se divisent harmoniquement, les faisceaux Q (SKS'O), Q (SAPA'), ont même rapport anharmonique; mais ils ont trois rayons communs, à savoir QS, QA, QP, donc les quatrièmes rayons QO, QA' coïncident, et les points Q, O, A', sont en ligne droite. En outre, A' étant l'inverse de A par rapport à Z, est un sommet d'un polygone régulier inscrit dans Z. Par suite, N est le sommet d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de Brocard, et M qui est l'inverse de N est un sommet d'un polygone harmonique. Mais M est évidemment le point milieu de la corde symédiane passant par A; il est donc le centre de similitude des deux côtés consécutifs passant par A, ce qui démontre le théorème.

Prop. 14. *Si des figures directement semblables sont construites sur les côtés d'un polygone harmonique d'un nombre quelconque de côtés, les symédianes du polygone harmonique formé par des droites homologues de ces figures passent par les milieux des cordes symédianes de la figure primitive.*

Ce théorème est une extension de la Prop. 5, sect. 5, et peut être démontré exactement de la même façon.

Cor. 1. *Le point de Lemoine du polygone harmonique formé par des droites homologues de figures directement semblables, est un point du cercle de Brocard du polygone primitif.*

Cor. 2. *Les points invariables du polygone primitif, sont des points homologues de figures directement semblables décrites sur ses côtés.*

Cor. 3. *Le centre de similitude du polygone primitif et du polygone formé par un système quelconque de droites homologues, est un point du cercle de Brocard du polygone primitif.*

Cor. 4. *Le centre de similitude de deux polygones harmoniques, dont les côtés sont respectivement deux suites de droites homologues de figures directement semblables, décrites sur les côtés du polygone primitif, est un point du cercle de Brocard de ce polygone.*

Exercices. 1. Si les symédianes menées par les sommets A, B, C d'un triangle coupent le cercle circonscrit aux points A', B', C', les triangles ABC, A'B'C' sont cosymédians.

Car, puisque les droites AA′, BB′, CC′, sont concourantes, les six points où elles coupent le cercle sont en involution. Donc, le rapport anharmonique (BACA′) = (B′A′C′A); mais le premier rapport est harmonique, donc le second l'est aussi, et AA′ est une symédiane de A′B′C′.

2. Les centres d'inversion d'un polygone harmonique, sont les points limites de son cercle circonscrit et de son cercle de Brocard; la droite de Lemoine est leur axe radical.

3. Le produit de deux côtés alternants d'un polygone harmonique, est proportionnel au produit des sinus de leurs inclinaisons sur le côté compris entre eux.

Car, soient A, B, C, D quatre sommets consécutifs, et A′, B′, C′, D′, les sommets correspondants d'un polygone régulier. Le rapport anharmonique (ABCD) = (A′B′C′D′). Donc (AB.CD) : (AC.BD) = (A′B′.C′D′) : (A′C′.B′D′), $= \frac{1}{4}\,\text{séc}^2\frac{\pi}{n}$. Mais AC = 2R sin ABC, BD = 2R sin BCD; d'où (AB.CD) : (sin ABC. sin BCD) $= R^2\,\text{séc}^2\frac{\pi}{n}$.

4. Si nous transformons par inversion le côté A′B′ (fig. prop. 2) d'un polygone régulier, le pôle d'inversion étant placé en S, nous obtenons un cercle passant par A, B et S. Donc, si par les extrémités de chaque côté d'un polygone harmonique, nous décrivons des cercles passant par l'un des centres d'inversion, ces cercles coupent le cercle circonscrit sous un angle constant ($\pi : n$).

5. Dans le même cas, tous ces cercles sont tangents à un même cercle, et les points de contact sont les sommets d'un polygone harmonique.

6. Tout cercle qui passe par le centre des symédianes et deux sommets adjacents d'un polygone harmonique, coupe le cercle circonscrit sous un angle constant.

7. Les cercles SS′A, SS′B, SS′C, qui passent par les deux centres d'inversion S, S′ et par un sommet d'un polygone harmonique ABCD, se coupent consécutivement sous des angles égaux et coupent orthogonalement le cercle de Brocard et le cercle circonscrit.

8. Dans le cas précédent, les points d'intersection avec le cercle de Brocard sont les sommets d'un polygone harmonique.

9. Démontrer que le centre de similitude des deux polygones formés par les sommets alternants dans la prop 9, p. 44, est le centre des symédianes du polygone primitif, et que le centre de similitude de chacun d'eux et du polygone primitif est un point de Brocard de ce dernier.

10. Démontrer que les cercles (voir Ex. 5), qui passent par le centre des symédianes et par deux sommets adjacents d'un polygone harmonique, sont tangents à un cercle coaxial au cercle de Brocard et au cercle circonscrit, et que les points de contact sont les sommets d'un polygone harmonique.

11. Soient A, B, C trois sommets consécutifs quelconques d'un polygone harmonique dont le centre des symédianes est K, et soient K′ le centre des symédianes du triangle ABC, et B′ le point où KK′ rencontre AC; démontrer que le rapport anharmonique (KB′K′B) est constant.

12. Si par les sommets A, B, C, ... d'un polygone harmonique F on trace des

droites faisant le même angle φ avec les côtés AB, BC, etc. et dans le même sens, démontrer que le polygone F_2 formé par ces droites est un polygone harmonique semblable au polygone proposé.

13. Si un polygone F_3 est formé par des droites qui sont les conjuguées isogonales des côtés de F_2 par rapport aux angles de F_1, démontrer que F_3 est égal à F_2.

14. Si F_1, F_2, F_3, sont considérés comme trois figures directement semblables, démontrer que leurs centres des symédianes sont les points invariables, et que les points doubles sont les points de Brocard et le centre du cercle circonscrit à F_1.

15. Le centre des symédianes d'un polygone harmonique est le centre des moyennes distances des pieds des droites menées de ce point aux côtés du polygone sous un même angle.

Ceci résulte de ce que ces droites font des angles égaux avec les côtés d'un polygone *fermé*, et sont proportionnelles à ces côtés.

16. Le carré d'un côté d'un polygone harmonique est proportionnel au rectangle des perpendiculaires abaissées de ses extrémités sur la polaire harmonique.

17. Des sommets d'un polygone harmonique on mène des tangentes $t_1, t_2 \ldots t_n$ à son cercle de Brocard. Démontrer que $\sum (1 : t^2) = n : R^2\delta^2$.

18. Si ABCD etc. est un polygone harmonique, Ω l'un de ces points de Brocard, démontrer que les droites $A\Omega$, $B\Omega$, ... etc. rencontrent le cercle circonscrit en de nouveaux points qui sont les sommets d'un polygone harmonique égal au premier et dont Ω est l'un des points de Brocard.

L'extension de la Géométrie récente au quadrilatère harmonique à été faite par M. Tucker dans une note lue devant la Société mathématique de Londres, le 12 février 1885. Ces recherches furent continuées par M. Neuberg dans *Mathesis* (t. V, septembre à décembre 1885). J'ai donné une autre généralisation dans une Note sur l'hexagone harmonique du triangle, note lue devant l'Académie Royale d'Irlande, le 26 janvier 1886. Ces deux extensions sont des cas particuliers de la théorie exposée dans cette section et que j'ai trouvée depuis la publication de la dernière note; cette théorie, comme le fait remarquer M. Brocard, paraît être le couronnement de ces nouvelles études de géométrie du triangle. Le passage suivant d'une note de M. M'Cay dans le mémoire de Tucker, montre que l'idée de cette extension était également venue à ce géomètre : « Je crois que tous ces résultats auraient lieu pour un polygone inscrit dans un cercle, s'il y avait entre les côtés une relation telle qu'il existe un point dont les distances aux côtés soient proportionnelles à ces côtés. » — Mars 1886.

Depuis la date de la publication de cette note dans la 4e édition du « Sequel, » deux mémoires ont paru sur les polygones harmoniques, l'un par MM. Neuberg et Tarry, au Congrès de Nancy, 1886, de l'*Association française pour l'avancement des sciences;* l'autre, par le Rév. T. C. Simmons, dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*, Avril 1887. Je suis redevable aux premiers de la démonstration de la Prop. 2 et au dernier de l'énoncé de la Prop. 7. En tenant compte de ces exceptions et de la Prop. 18, tout le reste est original.

SECTION VII.

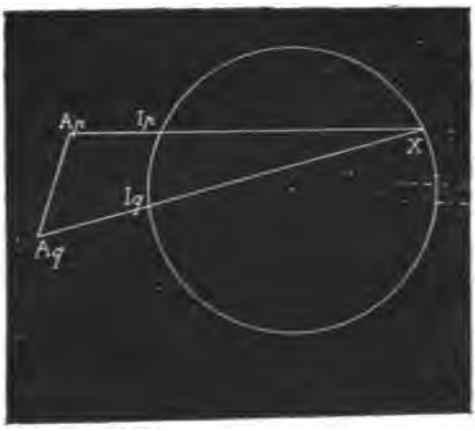
THÉORIE GÉNÉRALE DES FIGURES ASSOCIÉES.

DÉF. I. *Si l'on joint un point quelconque* X *d'une circonférence* Z *à* n *points fixes* $I_1, I_2, \ldots I_n$ *de la même circonférence, et que, dans le même sens, à partir de* X, *on prenne sur ces droites des segments* $I_1A_1, I_2A_2 \ldots I_nA_n$ *proportionnels aux nombres donnés* $d_1, d_2 \ldots d_n$, *alors un système de figures directement semblables, construites sur* $I_1A_1, I_2A_2, \ldots I_nA_n$, *est appelé système associé.*

DÉF. II. *Les points* $I_1, I_2, \ldots I_n$ *sont appelés les points invariables du système.*

Prop. 1. *Les centres de similitude d'un système de figures associées sont concycliques.*

Dém. Soient $F_1, F_2, \ldots F_n$ les figures; I_p, I_q deux points invariables quelconques; A_p, A_q les points homologues de F_p, F_q, pris sur les droites XI_p, XI_q. Alors (sect. II, Prop. 4), le second point d'intersection du cercle Z avec le cercle circonscrit au triangle XA_pA_q est le centre de similitude des figures F_p, F_q. Par conséquent, le centre de similitude de chaque couple de figures du système associé se trouve sur Z, c'est à dire, sur le cercle passant par les points invariables.



DÉF. III. *Le cercle* Z, *passant par les points invariables, est appelé, eu égard à la propriété précédente, cercle de similitude du système.*

Prop. 2. *La figure formée par n points homologues est perspective avec celle formée par les points invariables.* Ceci résulte de la Déf. I.

COR. *Tout système de n droites homologues passant par les points invariables, forme un faisceau de droites concourantes.*

Prop. 3. *Dans un système de n figures associées, les points d'intersection de n droites homologues sont perspectifs avec les centres de similitude des figures.*

Dém. Soient $L_1, L_2, \ldots, L_n$ les droites homologues; par les points invariables, menons des droites parallèles à $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Comme ces parallèles sont des lignes homologues de $F_1, F_2, \ldots, F_n$, elles sont concourantes. Soit K leur point de concours. Considérons maintenant deux lignes quelconques L_p, L_q : les perpendiculaires de K sur ces droites sont respectivement égales aux distances des points invariables à ces droites, et, par conséquent, proportionnelles aux distances de ces droites au centre de similitude $S_{p,q}$ de F_p, F_q. Donc le point d'intersection de L_p, L_q, les points K et $S_{p,q}$, sont collinéaires. Il en résulte que les droites joignant les $\frac{1}{2}n(n+1)$ intersections de $L_1, L_2, \ldots L_n$ à K, passent respectivement par les $\frac{1}{2}n(n+1)$ centres de similitude.

Déf. IV. *J'appellerai* K *le centre de perspective du polygone formé par les droites* $L_1, L_2, \ldots L_n$.

Prop. 4. *Dans un système de n figures associées, le centre de similitude de deux polygones quelconques* G, G′ *formés chacun par un système de n droites homologues, est un point du cercle de similitude.*

Dém. Soient K, K′ les centres de perspective de G, G′; K, K′ sont des points homologues de G, G′. Soit I un quelconque des points invariables. Joignons IK, IK′ et soient N et N′ les points où ces droites rencontrent deux droites homologues de G, G′; les droites KN, K′N′ seront des lignes homologues de G, G′. Donc le centre de similitude est le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle INN′ avec le cercle de similitude; ce qui démontre le théorème.

Prop. 5. *Les six centres de similitude d'un système de quatre figures associées sont en involution.*

Dém. Soient L_1, L_2, L_3, L_4, quatre droites homologues des figures, et K le centre de perspective de la figure formée par ces droites. Alors les droites joignant K aux six centres de perspective passent (Prop. 3) par les points d'intersection des trois couples de côtés opposés du quadrilatère complet L_1, L_2, L_3, L_4, et forment, par suite, un faisceau en involution.

Déf. V. *Si dans un système de n figures associées* $F_1, F_2, \ldots, F_n$, *il existe* $n+1$ *points* $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$, *tels que* $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}$ *soient des droites homologues de ces figures, alors la ligne brisée*

$A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$ *est appelée ligne de Tarry; et si* A_{n+1} *coïncide avec* A_1, *polygone de Tarry.*

J'ai donné à la ligne considérée ci-dessus le nom de M. GASTON TARRY, receveur des contributions à Alger, parce que c'est à lui qu'est due la théorie des figures associées. Voir *Mathesis*, 1886, tome VI, pp. 97, 148, 196, d'où cette section, sauf les Prop. 4 et 5, est tirée.

Prop. 6. *Soient* $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$ *une ligne de Tarry, et* $I_1, I_2, \ldots, I_n$ *les points invariables; on a*

$$\text{angle } I_1A_1A_2 = I_2A_2A_3 = \cdots = I_nA_nA_{n+1},$$
$$\text{angle } I_1A_2A_1 = I_2A_3A_2 = \cdots = I_nA_{n+1}A_n.$$

Dém. Par hypothèse, les triangles $I_1A_1A_2$, $I_2A_2A_3$, ... $I_nA_nA_{n+1}$, forment un système associé. Donc ils sont équiangles; ce qui démontre la proposition.

DÉF. VI. *Les droites* A_1I_1, $A_2I_2 \ldots A_nI_n$, *homologues passant par les points invariables, se coupent sur le cercle de similitude: de même, les droites* A_2I_1, $A_3I_2 \ldots A_{n+1}I_n$ *se coupent sur le cercle de similitude. Les points de concours sont appelés points de Brocard du système, et désignés par* Ω *et* Ω'.

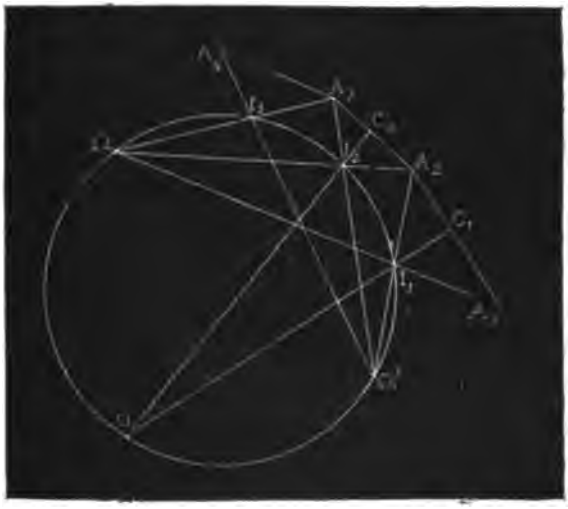
DÉF. VII. *Les angles à la base des triangles équiangles* $I_1A_1A_2$, $I_2A_2A_3$, ... *sont appelés les angles de Brocard, et désignés par* ω, ω', savoir : $I_1A_1A_2$ par ω, $I_1A_2A_1$ par ω'.

DÉF. VIII. *Le centre de perspective* [déf. IV], *dans une ligne de Tarry, jouit de la propriété, que les perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés de cette ligne sont proportionnelles à ces côtés; pour cette raison, il est appelé centre des symédianes, ou point de Lemoine de la ligne.*

Prop. 7. *Étant donnés deux côtés consécutifs* A_1A_2, A_2A_3 *d'une ligne de Tarry et ses angles de Brocard, construire cette ligne.*

Sol. Sur A_1A_2, A_2A_3, construisons deux triangles $A_1I_1A_2$, $A_2I_2A_3$, ayant leurs angles à la base égaux à ω, ω', savoir : $A_2A_1I_1 = A_3A_2I_2 = \omega$ et $A_1A_2I_1 = A_2A_3I_2 = \omega'$. Alors les sommets I_1, I_2 sont des points invariables. Les droites A_1I_1, A_2I_2 se couperont à l'un des points de Brocard Ω [Déf. VI]; les droites A_2I_1, A_3I_2, à l'autre point de Brocard Ω'. Les 4 points I_1, I_2, Ω, Ω' seront concycliques, et le cercle Z passant par ceux-ci sera le cercle de similitude. Menons ΩA_3. Cette droite coupera Z en I_3, qui sera le point invariable correspondant au côté suivant A_3A_4 de la ligne de Tarry. Menons $\Omega' I_3$ et prolongeons-la jusqu'à son

intersection en A_4 avec la droite A_3A_4 faisant un angle ω avec la droite ΩA_3. On construirait de la même manière A_4A_5, A_5A_6, etc.... Il est évi-



dent que la ligne de Tarry peut être continuée en sens contraire, $A_3A_2A_1$.

Cor. *Si l'un des côtés de la ligne de Tarry et les angles de Brocard sont donnés, on peut construire la ligne.*

Prop. 8. *Si les angles de Brocard ω, ω' d'une ligne de Tarry sont égaux, les points $A_1, A_2 \ldots A_n$ sont les sommets d'un polygone harmonique.*

Dém. Des points invariables I_1, I_2, ... abaissons des perpendiculaires I_1C_1, I_2C_2, ..., sur les droites A_1A_2, A_2A_3 ... Alors, puisque ces perpendiculaires sont des droites homologues de F_1, F_2, elles se coupent sur Z. Soit O leur point d'intersection. Maintenant, puisque $\omega = \omega'$, le triangle $I_1A_1A_2$ est isoscèle, et C_1 est le milieu de A_1A_2; par suite, $OA_1 = OA_2$. De même $OA_2 = OA_3$ ... Les points A_1, A_2, ... sont donc concycliques, et puisque le polygone formé par ces points a un centre des symédianes K, c'est un polygone harmonique.

Prop. 9. *Si les angles de Brocard ω, ω' sont inégaux, la ligne de Tarry ne peut être une ligne fermée.*

Dém. Soit $\omega' > \omega$; alors $A_1C_1 > C_1A_2$. Donc $OA_1 > OA_2$. De même, $OA_2 > OA_3$. Donc les points A_1, A_2, ... vont en s'approchant continuellement de O, ce qui démontre le théorème.

Cor. *Lorsque la ligne de Tarry a des angles de Brocard égaux, son centre des symédianes est diamétralement opposé à* O *sur le cercle de similitude.* En effet, les parallèles à A_1A_2, A_2A_3, ... menées par les points invariables, se coupent en K. Mais puisque I_1K et I_1O sont respectivement parallèle et perpendiculaire à A_1A_2, l'angle OI_1K est droit. Donc OK est un diamètre de Z.

Exercices. 1. Si un système de figures associées a un centre commun de similitude, les figures obtenues par inversion, le centre d'inversion étant en ce point, forment un système associé.

2. Dans le même cas, les figures polaires réciproques des premières par rapport au centre de similitude forment un système associé.

3. Si des triangles directement semblables sont inscrits dans un triangle donné, ils ont un centre commun de similitude.

4. Dans un système de quatre figures directement semblables, il existe un système de quatre points homologues en ligne droite.

5. Dans le même cas, les quatre points directeurs des quatre triples obtenus par ceux-ci, sont collinéaires.

6. Tous les triangles directement semblables, circonscrits à un triangle donné, ont même centre de similitude.

7. Dans trois figures directement semblables, il existe un nombre infini de triples de cercles homologues ayant le même axe radical.

8. Dans le même cas, on peut décrire quatre systèmes de trois cercles homologues tangents à une droite donnée.

9. Par tout point, on peut décrire trois cercles homologues du système.

10. On peut décrire huit systèmes de trois cercles homologues tangents à un cercle donné.

11. Tout polygone cyclique qui a un point de Brocard est un polygone harmonique.

12. Toute ligne polygonale qui a un centre des symédianes et un point de Brocard, est une ligne de Tarry; il en est de même, si elle a deux points de Brocard.

13. Dans tout système de trois figures semblables F_1, F_2, F_3, il y a un nombre infini de trois segments homologues AA', BB', CC', dont les extrémités sont concycliques; et le lieu du centre du cercle X passant par leurs extrémités, est le cercle de similitude de F_1, F_2, F_3.

14. Le point de Brianchon de l'hexagone formé par les tangentes au cercle X aux points A, B, C, A', B', C', est le centre des symédianes des segments AA', BB', CC'.

15. Les projections du centre O du cercle X sur les diagonales de l'hexagone de Brianchon, sont les points doubles des figures F_1, F_2, F_3.

16. Soient K le centre des symédianes des segments, et O le centre de X. Si des perpendiculaires abaissées de K sur les rayons OA, OA' coupent le segment

AA' aux points (a, a'), et si (b, b'), (c, c') sont déterminés de la même manière sur BB', CC', les six points sont concycliques.

17. Le centre des symédianes des trois segments aa', bb', cc', est le centre de X.

18. Si les droites KA, KA' sont divisées dans un rapport donné, et que par les points de division, on mène des droites respectivement perpendiculaires à OA, OA', coupant AA' aux points (α, α'), les points (α, α') et les points analogues sur BB', CC', sont concycliques.

19. Si A, A' sont les sommets opposés d'un hexagone inscrit; P, le pôle de la corde AA'; L, L' les points d'intersection des rayons OA, OA' avec la Pascale de l'hexagone; (α, α'), les projections du centre O sur les droites PL, PL'; les points (α, α') et les deux autres couples de points déterminés d'une façon analogue, sont concycliques.

20. Soient M, M' des points des rayons OA, OA' tels que les rapports anharmoniques (OAML), (OA'M'L') soient égaux. Les projections de O sur les droites PM, PM', et les autres couples de points déterminés de la même manière pour les cordes BB', CC', sont concycliques.

21. Le cercle de similitude des trois triangles directement semblables ABC, FDE, E'F'D' (fig. de la prop 5, sect. II) passe par les points de Brocard et le centre du cercle de Brocard de ABC.

22-25. Soient a, b, c les points d'intersection des côtés correspondants de deux triangles égaux et semblablement orientés ABC, A'B'C', S leur centre de similitude. 1° Si S est le centre du cercle circonscrit à ABC, il est l'orthocentre de abc; 2° s'il est le centre du cercle inscrit à ABC, il est le centre du cercle circonscrit à abc; 3° s'il est le centre des symédianes de ABC, il est le centre de gravité de abc; 4° si S est un point de Brocard de ABC, il est un point de Brocard de abc.

26. Énoncer les propositions correspondantes pour ABC et le triangle formé en joignant les sommets correspondants de ABC, A'B'C'.

27. Si un quadrilatère inscrit ABCD tournant autour du centre du cercle circonscrit arrive dans la position A'B'C'D', les intersections des côtés correspondants de ABCD, A'B'C'D' sont les sommets d'un parallélogramme.

28. Si une corde variable d'un cercle divise celui-ci homographiquement, démontrer qu'il y a un point fixe (point de Lemoine), dont la distance à la corde est proportionnelle à la longueur de celle-ci.

29. Dans le même cas, démontrer qu'il y a deux points de Brocard, un angle de Brocard, un cercle de Brocard, et des systèmes de points invariables et de points doubles.

30. Démontrer aussi que le cercle peut être transformé par inversion, de sorte que les inverses des extrémités des cordes homographiques seront les extrémités d'un système de cordes égales.

EXERCICES DIVERS.

1. Si du centre des symédianes d'un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés, les droites joignant les pieds de ces perpendiculaires sont perpendiculaires aux médianes.

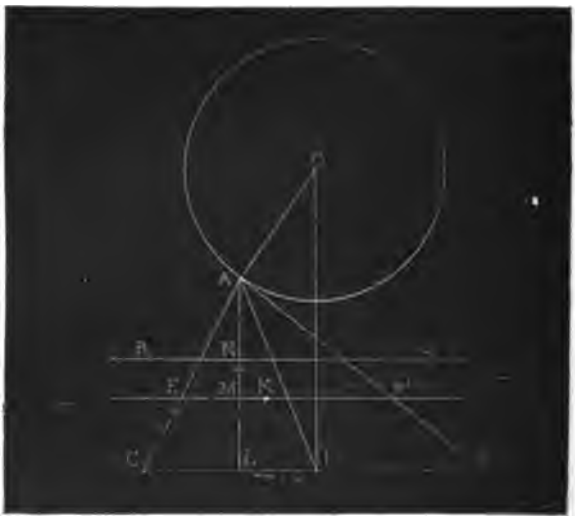
2. Si ACB est un triangle quelconque, CL une perpendiculaire sur AB, démontrer que AC et BL sont divisés en parties proportionnelles par l'antiparallèle à BC menée par le point de Lemoine.

3. Le milieu d'un côté du triangle, le milieu de la hauteur correspondante sont en ligne droite avec le point de Lemoine.

4. Si K est le point de Lemoine, G le centre de gravité du triangle ABC, 1° les diamètres des cercles circonscrits aux triangles AKB, BKC, CKA, sont inversement proportionnels aux médianes; 2° les diamètres des cercles circonscrits aux triangles AGB, BGC, CGA sont inversement proportionnels à AK, BK, CK.

5. Si la base BC d'un triangle et l'angle de Brocard sont donnés, le lieu du sommet est un cercle. (Neuberg.)

Dém. Soit K le point de Lemoine; par K, menons F'E parallèle à BC et soit M



le point de rencontre avec la hauteur AL. Prenons $MN = \frac{1}{2} ML$; puis, par N menons QR parallèle à BC; soit I le milieu de BC, traçons IO perpendiculaire à BC et telle que $2IO \cdot MN = \overline{BI}^2$.

Comme l'angle de Brocard est donné, la droite F'E parallèle à BC et passant par le point de Lemoine est donnée en position; il en est donc de même de QR et nous connaissons ainsi MN en grandeur.

Par suite, IO est donné en grandeur et le point O est déterminé. En outre,

comme F'E passe par le point de Lemoine, $(\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2) : \overline{BC}^2 = AM : ML$. Donc $(\overline{BI}^2 + \overline{IA}^2) : \overline{BI}^2 = (MN + NA) : MN$ d'où $\overline{BI}^2 : \overline{IA}^2 = MN : NA$ et $\overline{IA}^2 = 2IO \cdot NA$. Comme I et O sont des points donnés et QR une droite donnée, le lieu de A est un cercle coaxial avec le point I et la droite QR.

6. Si, sur une droite donnée BC et du même côté de celle-ci, on construit six triangles semblables à un triangle donné, leurs sommets sont concycliques.

7. Si du point I (Exerc. 5), on mène des tangentes au cercle de Neuberg, les segments compris entre le point de contact et le point I ont leurs milieux sur QR.

8. Les cercles de Neuberg des triangles de même base sont coaxiaux.

9. Soit O le centre de similitude de deux figures directement semblables construites sur les segments AB, A'B'. Lorsque A'B' glisse sur une droite fixe, démontrer que O décrit une droite.

10. Si deux triangles sont co-symédians, les côtés de l'un sont proportionnels aux médianes de l'autre.

11. Les six sommets de deux triangles co-symédians forment les sommets d'un hexagone harmonique.

12. L'angle BOC (figure de l'ex. 5) est égal au double de l'angle de Brocard du triangle BAC.

13. Si les droites joignant les sommets de deux triangles qui ont même centre de gravité sont parallèles, leur axe de perspective passe par le centre de gravité. (M'Cay.)

14. Deux triangles co-symédians ont mêmes points de Brocard.

15. Si L, M, N, P, Q, R sont les angles sous lesquels se coupent les côtés non correspondants de deux triangles co-symédians, ces angles sont respectivement égaux à ceux que sous-tendent à l'un ou l'autre des points de Brocard les côtés de l'hexagone harmonique (Ex. 11).

16. Si deux points homologues D, E, de deux figures directement semblables F_1 et F_2 sont des points conjugués par rapport à un cercle donné X, le lieu de chacun des points D, E, est un cercle.

Dém. Soit S le point double de F_1, F_2 et soient L et M les points d'intersection de DE avec X, N le milieu de DE ; joignons SN. Alors, d'après la propriété des points doubles, le triangle SDE est de forme donnée ; par suite, le rapport SN : ND est donné. En outre, comme par hypothèse E, D sont conjugués harmoniques par rapport à L et M, et que N est le milieu de ED, $\overline{ND}^2$ est égal au rectangle NM . ML ; c'est-à-dire, égal au carré de la tangente menée de N au cercle X. Le rapport de SN à la tangente menée de N à X est donc donné ; il en résulte que le lieu de N est un cercle et le triangle SND est de forme donnée ; par suite, le lieu de D est un cercle.

17. Si nous considérons chaque côté de ABC successivement comme donné en grandeur ainsi que l'angle de Brocard du triangle, le triangle formé par les centres des trois cercles de Neuberg correspondants, est perspectif avec ABC.

18. Si, dans un triangle quelconque ABC, on inscrit des triangles semblables à son cosymédian, le centre de similitude des triangles inscrits est le point de Lemoine du triangle primitif.

19. Si sur les côtés d'un hexagone harmonique, on construit des figures directement semblables, le milieu de chacune des symédianes est un point double pour trois couples de figures.

20. Si F_1, F_2, F_3, F_4, sont des figures directement semblables, décrites sur les côtés d'un quadrilatère harmonique, K le point de Lemoine, K' et K'' les extrémités de la troisième diagonale, et si les droites KK', KK'' coupent le cercle de Brocard aux nouveaux points H et I, H est le point double des figures F_1 et F_3, I celui des figures F_2 et F_4.

Déf. *Le quadrilatère formé par les quatre points invariables d'un quadrilatère harmonique est appelé premier quadrilatère de Brocard; celui formé par les milieux des diagonales et les points doubles* H *et* I, *second quadrilatère de Brocard* Cette nomenclature peut évidemment être étendue.

21. Le second quadrilatère de Brocard est un quadrilatère harmonique.

22. Si ω est l'angle de Brocard d'un quadrilatère harmonique ABCD,

$$\text{cosec}^2\,\omega = \text{cosec}^2\,A + \text{cosec}^2\,B = \text{cosec}^2\,C + \text{cosec}^2\,D.$$

23. Si l'on joint le milieu F de la diagonale AC d'un quadrilatère harmonique, au point d'intersection K' des côtés opposés AB, CD, l'angle AFK' est égal à l'angle de Brocard. (Neuberg.)

24. La droite joignant le milieu d'un côté quelconque d'un quadrilatère harmonique au milieu de la perpendiculaire abaissée, sur ce côté, du point de rencontre des deux côtés adjacents, passe par le point de Lemoine du quadrilatère.

25. Soient $F_1, F_2, F_3, \ldots$ des figures directement semblables construites sur les côtés d'un polygone harmonique ABCD ... d'un nombre quelconque de côtés, et soient $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ des droites homologues de ces figures. Si trois quelconques des droites $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ concourent, elles concourent toutes en un même point.

26. De même, si la figure ABC ... est d'un nombre pair de côtés, les milieux des cordes symédianes du polygone harmonique $\alpha\beta\gamma \ldots$ coïncident avec les milieux des cordes symédianes de ABC...

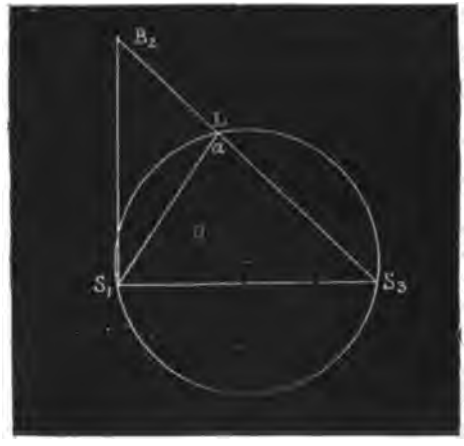
27. Si F_1, F_2, F_3 sont trois figures directement semblables, et B_1, B_2, B_3 trois points homologues de ces figures; et si le rapport de deux des côtés du triangle formé par ces points, $B_1B_2 : B_2B_3$, est donné, le lieu de chacun d'eux est un cercle. Si le rapport varie, les cercles forment deux systèmes coaxiaux.

Dém. Soient S_1, S_2, S_3, les points doubles; alors les triangles $S_3B_1B_2$, $S_1B_2B_3$, sont donnés de forme. Les rapports $B_1B_2 : S_3B_2$ et $B_2B_3 : S_1B_2$ sont donnés; et le rapport $B_1B_2 : B_1B_3$ est donné par hypothèse. Par suite, le rapport $S_3B_2 : S_1B_2$ est connu et le lieu de B_2 est un cercle.

28. Si par le centre des symédianes d'un polygone harmonique de n côtés, on mène une parallèle à l'un quelconque des côtés du polygone, rencontrant les côtés adjacents aux points X, X', et le cercle circonscrit en Y, Y', on a $4XK.X'K\sin^2\frac{\pi}{n} = YK.Y'K$.

29. Si l'aire du triangle $B_1B_2B_3$ de l'exercice 27 est donnée, le lieu de chacun de ces points est un cercle.

Dém. Ici les rapports $B_1B_2 : S_2B_2$ et $B_2B_3 : S_1B_2$ sont donnés; par suite, le rapport des rectangles $B_1B_2 . B_2B_3$ sin $B_1B_2B_3$, $B_2S_2 . B_2S_1$ sin $B_1B_2B_3$ est donné; donc on connaît le produit $S_2B_2 . S_1B_2$ sin $B_1B_2B_3$. Maintenant les angles $B_1B_2S_2$, $S_1B_2B_3$ sont donnés. Par suite, l'angle $B_1B_2B_3 \pm S_2B_2S_1$ est donné.



Désignons sa valeur par α; alors $B_2B_2B_3 = \alpha \pm S_2B_2S_1$. Donc en prenant le signe supérieur, le problème est ramené au suivant: *La base* S_2S_1 *d'un triangle* $S_2B_2S_1$ *est donnée en grandeur et en position, et le produit* $S_2B_2 . S_1B_2$ sin $(\alpha - S_2B_2S_1)$ *est donné en grandeur; trouver le lieu de* B_2. On le résout comme il suit : Sur S_2S_1 décrire un segment de cercle S_2LS_1, capable de l'angle S_2LS_1 égal à α. Joignons S_1L; alors l'angle B_2S_1L est égal à $\alpha - S_2B_2S_1$. Donc, par hypothèse, $S_2B . S_1B_2$ sin B_2S_1L est donné; mais S_1B_2 sin B_2S_1L est égal à LB_2 sin α; par conséquent, le produit $S_2B_2 . LB_2$ est donné et le lieu de B_2 est un cercle.

30. Si Q, Q' sont les inverses des points de Brocard d'un triangle ABC, par rapport à son cercle circonscrit, les triangles podaires de Q, Q' sont : 1° égaux entre eux; 2° les côtés de chacun sont perpendiculaires aux côtés correspondants du premier triangle de Brocard de ABC; 3° chacun d'eux est inversement semblable au triangle primitif. (M'Cay.)

31. Si la surface du triangle formé par trois droites homologues de trois figures directement semblables est donnée, les enveloppes de ses côtés sont des cercles dont les centres sont les points invariables des trois figures.

32. Si la surface du polygone formé par n droites homologues de n figures directement semblables décrites sur les côtés d'un polygone harmonique de n côtés est donnée, les enveloppes des côtés sont des cercles ayant pour centres les points invariables du polygone harmonique.

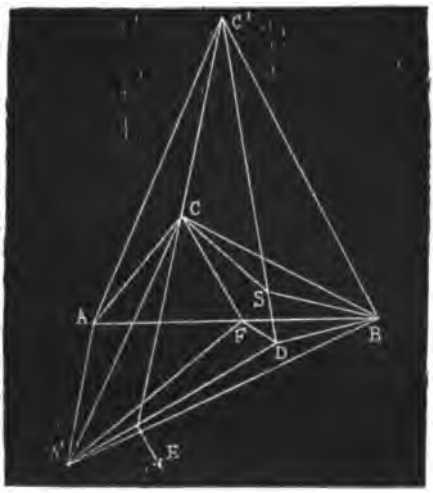
33. Les quatre symédianes d'un octogone harmonique forment un faisceau harmonique.

34. Soient A', C' des points homologues de figures F_2, F_1, directement semblables, décrites sur les côtés BC, AB d'un triangle donné; si AA', CC' sont parallèles, les lieux des points A, C, sont des cercles.

Dém. Soit S le point double des figures, et D le point de F_2, qui correspond à C dans F_1. Joignons DA', et prolongeons CC' qui coupera cette droite en E. Alors, puisque S est le point double des figures ABCC', BCDA', les triangles SCC', SDA' sont équiangles, et l'angle SCC' est égal à SDA'. Les points S, D, E, C,

sont concycliques; et l'angle DEC est égal au supplément de DSC, c'est-à-dire, égal à ABC; par conséquent DA'A est égal à ABC, et est donné. Le lieu de A' est donc un cercle.

35. Les angles de Brocard des triangles ABC, BCA' (Ex. 34) sont égaux.



Dém. Soit F le point d'intersection de AB et du cercle circonscrit au triangle DAA'. Joignons DF, CF; alors l'angle DFB est égal à DA'A; par conséquent, il est égal à BCD. Les triangles BCA, BCF, BCD, sont équiangles. Donc, le cercle qui est le lieu du sommet lorsque la base BC est donnée, et que l'angle de Brocard est égal à celui de ABC, passe par les points A, F, D. Il coïncide donc avec le lieu de A.

36. Si C', A', B', sont trois points homologues de figures directement semblables décrites sur les côtés du triangle ABC, et si deux des droites AA', BB', CC' sont parallèles, elles le sont toutes trois.

37. Si ABC, A'B'C' sont deux triangles co-symédians, on a $\cot A + \cot A' = \cot B + \cot B' = \cot C + \cot C' = \frac{3}{2}\cot\omega$. (TUCKER)

38. Soient Ω un point de Brocard du triangle ABC, et ρ_1, ρ_2, ρ_3 les rayons des cercles circonscrits aux triangles $A\Omega B$, $B\Omega C$, $C\Omega A$,. On a $\rho_1\rho_2\rho_3 = R^3$. (TUCKER.)

39. Soient Ω un point de Brocard d'un polygone harmonique de n côtés, $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots$, etc. les rayons des cercles circonscrits aux triangles $A\Omega B$, $B\Omega C$, $C\Omega D$, etc. On a $\rho_1\rho_2\rho_3 \ldots \rho_n = 2^n \cos^n \frac{\pi}{2n} \cdot R^n$.

40. Si la droite joignant deux points homologues de trois figures directement semblables F_1, F_2, F_3, décrites sur les côtés du triangle ABC, passe par le centre de gravité, les trois points homologues sont collinéaires, et le lieu de chacun d'eux est un cercle.

Dém. Soient D_1, D_2 des points homologues de F_1 et F_2, collinéaires avec le centre de gravité G, et soient AN, BM, CL les médianes se coupant en G. Joignons ND_1, MD_2, et prolongeons ces droites qui couperont les parallèles à D_1D_2 par les points A, B, aux points A', B'. Alors, d'après la construction, $NA' = 3ND_1$ et $MB' = 3MD_2$; et puisque D_1, D_2 sont des points homologues de F_1, F_2, A', B' sont des points homologues; AA', BB' parallèles à D_1D_2 sont parallèles entre elles. Maintenant, soit D_3 le point de F_3 homologue de D_1 et D_2; et C' l'homologue de A' et B'; alors les droites AA', BB', CC' sont parallèles, et, comme $LD_3 = \frac{1}{3}LC'$ et

$LG = \frac{1}{3} LC$, D_3G est parallèle à CC'. Donc D_1, D_2, D_3 sont collinéaires; et, puisque les lieux de A', B', C', sont des cercles, les lieux de D_1, D_2, D_3 sont aussi des cercles. Ceux-ci sont appelés *cercles de M'Cay*. Il est clair que chacun de ceux-ci passe par deux points doubles et par le centre de gravité.

41. La polaire du centre des symédianes d'un triangle, par rapport au premier cercle de Lemoine, est l'axe radical de ce cercle et du cercle circonscrit.

42. Le centre de perspective des triangles ABC, *pqr* (Sect. III, prop. 2, cor. 2) est le pôle de la droite $\Omega\Omega'$, par rapport au cercle de Brocard.

43. L'axe de perspective du premier et du second triangle de Brocard est la polaire du centre de gravité du premier par rapport au cercle de Brocard.

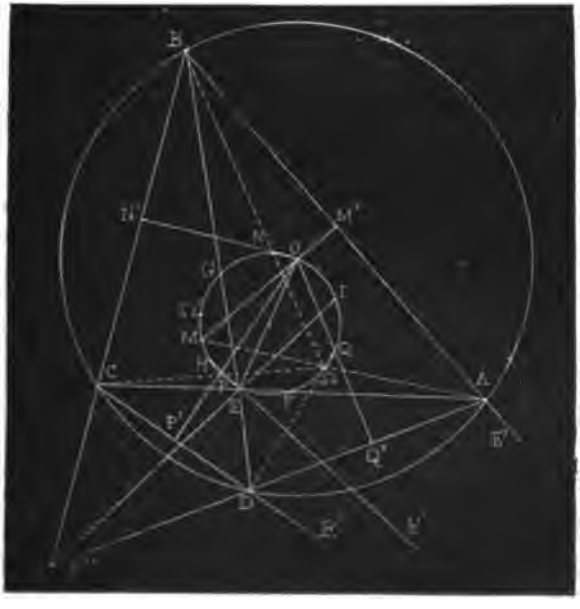
44. Le premier triangle de Brocard est triplement perspectif avec le triangle ABC.

45. Le centre de gravité du triangle formé par les trois centres de perspective de l'Ex. 44 coïncide avec le centre de gravité de ABC.

46-51. Dans la figure ci-jointe, ABCD est un quadrilatère harmonique, E son centre des symédianes, M, N, P, Q désignent ses points invariables, etc.

1° $PQ : AC = NP : BD = OE : 2R$.

2° NQ, GF, MP sont parallèles.



3° Les couples de triangles MNP, FHG; MQP, GHF; NMQ, FIG; NPQ, GIF sont perspectifs. Les quatre centres de perspective sont collinéaires, et l'axe de collinéation est perpendiculaire au milieu de FG.

4° Les droites AG, CG, BF, DF, sont tangentes à un cercle concentrique au cercle circonscrit.

5° Si X, Y, Z, W sont les pieds des perpendiculaires abaissées de E sur les côtés de ABCD, E est le centre des moyennes distances de X, Y, Z, W.

6° Les côtés du quadrilatère XYZW sont tangents à un cercle concentrique avec le cercle circonscrit.

52-55. Si R, R′ sont les centres des symédianes des triangles ABC, ADC; S, S′, ceux des triangles BCD, DAB; alors

1° Les quadrilatères ABCD, S′RSR′ ont un triangle harmonique commun.

2° Les quatre droites RS, R′S′, AD, BC, sont concourantes.

3° Si E′ est le pôle de AC; E″ celui de BD, les trois couples de points (A, C), (S′, S), (E, E″), forment une involution dont E, E″ sont les points doubles.

4° Si par E on mène une parallèle à sa polaire coupant les quatre droites concourantes AD, S′R′, RS, BC, aux points λ, μ, ν, ρ, les quatre segments $\lambda\mu$, μE, $E\nu$, $\nu\rho$ sont égaux; une propriété semblable a lieu pour les segments interceptés sur la parallèle par les droites AB, S′R, R′S, CD.

56. Si deux triangles formés par deux triples de points homologues de trois figures directement semblables F_1, F_2, F_3, sont perspectifs, le lieu de leur centre de perspective est le cercle de similitude de F_1, F_2, F_3. (Tarry.)

57. Si les symédianes AK, BK, CK etc. d'un polygone harmonique d'un nombre impair de côtés, sont prolongées de façon à couper le cercle circonscrit aux points A′, B′, C′, etc. ces points sont les sommets d'un second polygone harmonique; ces deux polygones sont co-symédians, et ont même angle de Brocard, mêmes points de Brocard, mêmes cercles de Lemoine, etc.

58. Si trois triangles isoscèles semblables BCA′, CAB′, ABC′, sont construits sur les côtés d'un triangle ABC, démontrer que l'axe de perspective des triangles ABC, A′B′C′, est perpendiculaire à la droite joignant leur centre de perspective au centre du cercle circonscrit à ABC. (M'Cay.)

59. Si dans le même cas, on abaisse des perpendiculaires de A, B, C, sur B′C′, C′A′, A′B′, démontrer que leur point de concours est collinéaire avec le centre de perspective, et le centre du cercle circonscrit à ABC. (M'Cay.)

60. Si les trois hauteurs d'un triangle sont des droites homologues de trois figures directement semblables, le cercle qui a pour diamètre la droite joignant le centre de gravité à l'orthocentre, est leur cercle de similitude.

61. Si la base d'un triangle est donnée en grandeur et en position et la symédiane par l'une des extrémités de la base, en position, le lieu du sommet est un cercle tangent à cette symédiane.

62. Si par le point de Brocard Ω on décrit trois cercles passant chacun par deux sommets de ABC, le triangle formé par leurs centres a le centre du cercle circonscrit à ABC, pour point de Brocard. (Dewulf.)

63. Si par le point de Brocard Ω d'un polygone harmonique, on décrit des cercles passant chacun par deux sommets du polygone, leurs centres sont les sommets d'un polygone harmonique semblable au polygone primitif.

64. De même, au moyen de l'autre point de Brocard, nous obtenons un autre polygone harmonique. Les deux polygones sont égaux et perspectifs, leur centre de perspective étant le centre du cercle circonscrit au polygone primitif.

65. Dans le même cas, le centre du cercle circonscrit au polygone primitif est un point de Brocard de chacun des deux nouveaux polygones.

66. Si ρ est le rayon du cercle circonscrit de l'un ou l'autre des nouveaux polygones, le rayon du premier cercle de Lemoine du polygone harmonique primitif est ρ tang ω.

67-72. Si D_1, D_2, D_3, sont des points homologues de trois figures directement semblables $F_1, F_2 F_3$, les lieux de ces points sont des cercles dans les cas suivants :

1° Lorsque l'un des côtés du triangle $D_1D_2D_3$ est donné en grandeur.

2° Lorsqu'un angle du triangle $D_1D_2D_3$ est donné en grandeur.

3° Lorsque les tangentes menées de deux quelconques des points D_1, D_2, D_3 à un cercle donné sont dans un rapport donné.

4° Lorsque la somme des carrés des distances de D_1, D_2, D_3 à des points donnés, multipliées chacune par une constante donnée, est donnée.

5° Lorsque la somme des carrés des côtés du triangle $D_1D_2D_3$, multipliés chacun par une constante donnée, est donnée.

6° Lorsque l'angle de Brocard du triangle $D_1D_2D_3$ est donné.

73. Les pôles des côtés du triangle ABC, par rapport aux cercles de M'Cay correspondants, sont les sommets du premier triangle de Brocard.

74. Le centre de gravité de trois points homologues du système de figures de l'exercice 60, les masses étant a^2, b^2, c^2, est le centre des symédianes du triangle.

75. Si des milieux des côtés d'un triangle ABC, on mène des tangentes aux cercles de Neuberg correspondants, les points de contact sont situés sur deux droites passant par le centre de gravité de ABC.

76. Dans tout triangle ABC, le centre du cercle circonscrit, le point de Lemoine et l'orthocentre du triangle orthique de ABC sont collinéaires. (TUCKER.)

77. L'orthocentre d'un triangle ABC, le point de Lemoine de ABC et le point de Lemoine du triangle orthique de ABC sont collinéaires. (EDM. VAN AUBEL.)

78. Les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle ABC sur les côtés du premier triangle de Brocard sont concourantes, et leur point de concours (appelé *point de Tarry*) est sur le cercle circonscrit à ABC.

79. La droite de Simson du point de Tarry est perpendiculaire à OK.

80. Les parallèles menées par A, B, C, aux côtés (B'C', C'A', A'B'), ou (C'A', A'B', B'C') ou (A'B', B'C', C'A') du premier triangle de Brocard, concourent en trois points R, R', R''. (NEUBERG.)

81. Les triangles ABC, R'R'', ABC ont même centre de gravité. (NEUBERG.)

82. R est le point du cercle circonscrit dont la droite de Simson est parallèle à OK.

83. Si du point de Tarry (Ex. 78), on abaisse des perpendiculaires sur les côtés BC, CA, AB du triangle, coupant ces côtés en $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$, $(\beta, \beta_1, \beta_2)$, $(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)$, les points $\gamma, \beta_1, \gamma_2$ sont collinéaires (Droite de Simson). De même $\alpha_1, \beta_2, \gamma$ et $\alpha_2, \beta, \gamma_1$ sont des systèmes collinéaires. (NEUBERG.)

84. Les cercles de M'Cay sont les inverses des côtés du premier triangle de Bro-

eard, par rapport au cercle ayant pour centre le centre de gravité de ABC, et coupant orthogonalement le cercle de Brocard du triangle.

85. Les tangentes menées de ABC au cercle de Brocard, sont proportionnelles à $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$.

86. Si l'on prolonge les côtés alternants de l'hexagone de Lemoine jusqu'à leur intersection, ils forment un second triangle dont le cercle inscrit est égal au cercle des neuf points du triangle primitif.

87. Si K est le point de Lemoine du triangle ABC, et si l'on désigne les angles ABK, BCK, CAK, respectivement par $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et les angles BAK, CBK, ACK respectivement par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, alors $\cot\theta_1 + \cot\theta_2 + \cot\theta_3 = \cot\varphi_1 + \cot\varphi_2 + \cot\varphi_3 = 3\cot\omega$. (TUCKER.)

88. Si A_1, B_1, C_1 sont les sommets du premier triangle de Brocard, les droites BA_1, AB_1 sont divisées en parties proportionnelles par $\Omega\Omega'$.

89-90. 1° Les milieux de AB, A_1B_1, $\Omega\Omega'$ sont collinéaires. 2° Le triangle formé par les milieux des côtés de $A_1B_1C_1$ est perspectif avec ABC. (STOLL.)

91. Si le cercle de Brocard de ABC coupe BC aux points M, M', les droites AM, AM', sont conjuguées isogonales par rapport à l'angle BAC.

92. Si Ω, Ω' sont les points de Brocard d'un polygone harmonique de n côtés,

$$\Omega\Omega' = 2R\sin\omega\sqrt{\cos^2\omega - \sin^2\omega\,\tan g^2\frac{\pi}{n}}.$$

93. Si les polaires des points B, C, par rapport au cercle de Brocard du triangle ABC, coupent le côté BC respectivement aux points L, L', les droites AL, AL' sont conjuguées isogonales par rapport à l'angle BAC.

94. La polaire réciproque d'un triangle par rapport à un cercle ayant pour centre l'un ou l'autre des points de Brocard, est un triangle semblable, ayant le centre du cercle pour l'un de ses points de Brocard.

95. Si les angles que les côtés AB, BC, CD, ... KL, d'un polygone harmonique sous-tendent en un point quelconque du cercle circonscrit sont désignés par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, les perpendiculaires abaissées des deux points de Brocard sur les côtés sont respectivement proportionnelles aux quantités $\sin\lambda$ cosec A, $\sin\alpha$ cosec B, $\sin\beta$ cosec C, ..., $\sin\varkappa$ cosec L, et à leurs inverses.

96. Le triangle ABC, son polaire réciproque par rapport au cercle de Brocard, et le triangle pqr [Section III, Prop 2, Cor. 2] sont deux à deux perspectifs, et ont un axe de perspective commun.

97. Si les côtés AB, BC, CD, DE, etc. d'un polygone harmonique d'un nombre quelconque de côtés, sont divisés en parties proportionnelles aux points L', M', N', P', etc., les cercles circonscrits aux n triangles L'BM', M'CN', N'DP', P'EQ', etc. ont tous un point commun X, et chacun d'eux divise en deux parties égales une des cordes symédianes du polygone.

98. Le lieu du point X de l'exercice 97, lorsque les points L', M', N', etc. varient, est le cercle de Brocard du polygone.

99. Si Ω, Ω' sont les points de Brocard d'un polygone harmonique d'un nombre n quelconque de côtés démontrer que

$$A\Omega . B\Omega . C\Omega \ldots = A\Omega' . B\Omega' . C\Omega' \ldots = \left(R \sec \frac{\pi}{n} \cdot \sin \omega \right)^n .$$

100. Si ABCDEF est un hexagone harmonique, L, M, N, P, Q, R les points qui divisent les côtés AB, BC, CD, etc. en parties proportionnelles, des cercles passant par les couples de points L, R; M, Q; N, P; et par un même point quelconque du cercle de Brocard de l'hexagone, sont coaxiaux.

101. Si les droites $A\Omega$, $B\Omega$, $C\Omega$, coupent les côtés opposés en A', B', C', démontrer que $ABC : A'B'C' = (a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) : 2a^2b^2c^2$.

102. Un polygone harmonique d'un nombre quelconque de côtés peut être projeté sous forme d'un polygone régulier du même nombre de côtés, et la projection du centre des symédianes du premier, sera le centre du cercle circonscrit à l'autre.

103. La somme des carrés des perpendiculaires abaissées du centre des symédianes d'un polygone harmonique sur les côtés du polygone est un minimum.

104. On construit des triangles isoscèles semblables BA'C, CB'A, AC'B, sur les côtés d'un triangle ABC; alors, si ABC et les triangles dont les côtés respectifs sont AB', BC', CA', et A'B, B'C, C'A, sont désignés par F_1, F_2. F_3, le triangle de similitude de F_1, F_2, F_3, est $\Omega O \Omega'$, formé par les points de Brocard et le centre du cercle circonscrit à ABC, et leurs points de Lemoine sont aussi leurs points invariables. (Neuberg.)

105. Si le système coaxial que forment le cercle circonscrit à un polygone harmonique d'un nombre quelconque de côtés, son cercle de Brocard, et leur axe radical, est transformé en un système concentrique, les rayons des trois cercles inverses sont en progression géométrique.

106. Si deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet sont conjugués isogonaux par rapport à un triangle, les sommets restants sont conjugués isogonaux.

107. Démontrer une propriété analogue pour des conjugués isotomiques.

108. Dans la figure (prop 2, sect. VI) démontrer que

$$OS : OS' = \cos\left(\omega - \frac{\pi}{n}\right) : \cos\left(\omega + \frac{\pi}{n}\right) .$$

109. Si AA', BB', CC' sont des cordes fixes d'un cercle X, et si par les points A, A'; B, B'; C, C' on décrit des cercles coupant respectivement X sous des angles égaux, le lieu de leur centre radical est une droite. (M'Cay.)

110. Trouver le lieu d'un point du plan du triangle tel que le triangle formé en joignant les pieds de ses projections sur les trois côtés ait un angle de Brocard donné.

111. Si la base d'un triangle est donnée en position, et aussi la symédiane passant par l'une des extrémités, le lieu du sommet est un cercle.

112. Si par les extrémités A, B; B, C; C, D, etc., des côtés d'un polygone harmonique on décrit des cercles tangents au cercle de Brocard, les contacts étant tous de la même espèce, ces cercles coupent le cercle circonscrit sous des angles égaux, et

sont tous tangents à un cercle coaxial avec le cercle de Brocard et le cercle circonscrit.

113. L'axe radical du cercle circonscrit et du second cercle de Lemoine d'un quadrilatère harmonique passe par le centre des symédianes du quadrilatère.

114. Si les angles de Brocard de deux polygones harmoniques A, B, sont complémentaires, et si le second cercle de Lemoine de A est le cercle circonscrit à B, le second cercle de Lemoine de B est égal au cercle circonscrit à A.

115-117. Dans le même cas, si le second cercle de Lemoine de B coïncide avec le cercle circonscrit à A, et si n, n' sont les nombres de côtés des polygones, ω, ω' les angles de Brocard, δ le diamètre de leur cercle de Brocard commun, démontrer que

1° $$\operatorname{tang}\omega = \cos\frac{\pi}{n} : \cos\frac{\pi}{n'}.$$

2° Les points de Brocard de A coïncident avec ceux de B.

3° $$\delta^2\cos^2\frac{\pi}{n} = R^2\cos\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n'}\right).\cos\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n'}\right).$$

118. Si par les sommets d'un polygone harmonique d'un nombre quelconque de côtés on décrit des cercles, coupant orthogonalement le cercle circonscrit et le cercle de Brocard, leurs points d'intersection avec le cercle de Brocard forment les sommets d'un polygone harmonique, et le cercle de Brocard de ce dernier polygone est coaxial avec le cercle de Brocard et le cercle circonscrit du premier.

119. Si les symédianes AK, BK, CK d'un triangle coupent les côtés BC, CA, AB, aux points K_a, K_b, K_c, le triangle ABC, son polaire réciproque par rapport à son cercle circonscrit et le triangle $K_aK_bK_c$ ont un axe de perspective commun.

120. Si DE est le diamètre du cercle circonscrit à ABC qui divise BC en deux parties égales, et K_a l'intersection de la symédiane AK avec BC, la droite joignant le milieu de BC à K, coupe les droites EK_a, DK_a respectivement sur les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle ABC.

121. Si un heptagone circonscrit à un cercle a pour points de contact les sommets d'un heptagone harmonique, les sept hexagones obtenus en omettant successivement un côté du polygone donné, ont un point de Brianchon commun.

122. Démontrer que $\sum \sin A \cos(A+\omega) = 0$.

123. Si O est le centre du cercle circonscrit à un polygone harmonique de n côtés, L un des points-limites du cercle circonscrit et du cercle de Brocard; si de plus $OL = R\cot\theta$, démontrer que $\cos 2\theta = \operatorname{tang}\omega \,.\, \operatorname{tang}\frac{\pi}{n}$.

124. Si ABCD ... est un polygone harmonique, et si les cercles passant par les couples de points A, B; B, C; C, D; etc., sont tangents à l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle de Brocard, les points de contact sont en involution.

125. Quatre côtés quelconques donnés d'un polygone harmonique de n côtés coupent un quelconque des côtés restants en quatre points, dont le rapport anharmonique est constant.

126. Le quadrilatère formé par quatre côtés quelconques d'un polygone harmo-

nique, est tel que les angles sous-tendus en l'un ou l'autre des points de Brocard, par les côtés opposés sont supplémentaires.

127. Les polaires réciproques de deux triangles co-symédians, par rapport à leur centre commun des symédianes, sont équiangles.

128. Les polaires réciproques de deux triangles co-symédians, par rapport à l'un ou l'autre de leurs points de Brocard communs, sont deux triangles co-symédians.

129. Le polaire réciproque d'un polygone harmonique par rapport à l'un ou l'autre de ses points de Brocard, est un polygone harmonique ayant le centre d'inversion pour l'un de ses points de Brocard.

130. Si deux cercles W, W', coaxiaux avec le cercle circonscrit et le cercle de Brocard d'un polygone harmonique, sont inverses l'un de l'autre par rapport au cercle circonscrit, les inverses du cercle circonscrit et du cercle W, par rapport à un point quelconque de la circonférence de W' sont respectivement le cercle circonscrit et le cercle de Brocard d'un autre polygone harmonique dont les sommets sont les inverses des sommets du premier polygone.

131. Si R' est le rayon du second cercle de Lemoine d'un polygone harmonique de n côtés; Δ et δ étant les diamètres de son cercle de Lemoine et de son cercle de Brocard, démontrer que $\Delta^2 - \delta^2 = R'^2 \text{séc}^2 \frac{\pi}{n}$.

132. Si l'on transforme par inversion, par rapport à un point quelconque les sommets d'un polygone harmonique, en sommets d'un autre polygone harmonique, les inverses des centres d'inversion du premier seront les centres d'inversion du second.

133. Le centre des moyennes distances des sommets d'un quadrilatère inscrit est un point de la circonférence du cercle des neuf points du triangle harmonique du quadrilatère. (RUSSELL.)

134. Prouver qu'il existe dans le plan de tout triangle deux points dont les triangles podaires par rapport au triangle donné sont équilatéraux.

135. Démontrer que les lieux des centres des cercles circonscrits aux figures F_2, F_5 (Ex. 13, Sect. VI) sont des cercles.

136. Si A', B', C', sont les points où les cercles de Malfatti sont tangents l'un à l'autre, démontrer que ABC, A'B'C' sont perspectifs.

137. Démontrer la construction suivante pour le point de Steiner R (Ex. 80). Des sommets A, B, C, du triangle comme centres, et avec des rayons respectivement égaux aux côtés opposés, on décrit des cercles. Ceux-ci, comme il est facile de le voir, se couperont deux à deux sur le cercle circonscrit, aux points A_1, B_1, C_1. Alors, la droite joignant l'intersection de BC et B_1C_1 au point A, coupera le cercle au point cherché.

138-140. Si les hauteurs du triangle ABC, prolongées s'il le faut, coupent les cercles de l'ex. 137 aux points A', B', C', démontrer que

1° Surf. $A'B'C' = 4 \cot \omega$ surf. ABC.

2° La somme des carrés de A'B', B'C', C'A' $= 8$ surf. ABC. $(2 \cot \omega - 3)$.

3° Si ω' est l'angle de Brocard de A'B'C', $\cot \omega' = \frac{2 \cot \omega - 3}{2 - \cot \omega}$. (NEUBERG.)

141-144. Dans le même cas, si les hauteurs, prolongées au delà des sommets, coupent de nouveau les cercles en A'', B'', C'' démontrer que :

1° Surf. A'B'C' + surf. A''B''C'' = 8 surf. ABC.

2° La somme des carrés des côtés de A'B'C', A''B''C'' = 32ABC cot ω.

3° La somme des cotangentes de leurs angles de Brocard $= \frac{2 \cot \omega}{(4 - \cot^2 \omega)}$ (Neuberg.)

145. Démontrer que le cercle de l'ex 60 est coaxial avec le cercle des neuf points et le cercle de Brocard

146-158. *Cercle de de Longchamps.* Le cercle qui coupe orthogonalement les trois cercles de l'exercice 137 a été étudié par M. de Longchamps, dans une note du « Journal de Mathématiques spéciales » pour 1886. Les propriétés qu'il démontre, tant par leur nature spéciale, que par leur connexion avec la géométrie récente, sont si intéressantes, que nous pensons devoir en exposer quelques-unes ici. Les démonstrations sont dans, tous les cas, très simples et forment un excellent exercice pour les élèves. Nous désignerons le cercle de de Longchamps par la lettre L, et l'axe radical de celui-ci et du cercle circonscrit par λ. Il est évident que le cercle est réel seulement dans le cas de triangles obtusangles.

146. Le centre de L est le symétrique de l'orthocentre de ABC par rapport au centre du cercle circonscrit.

147. Le rayon de L est égal au diamètre du cercle conjugué (autopolaire) de ABC.

148. Le cercle L est orthogonal aux cercles dont les centres sont les points milieux des côtés de ABC et dont les rayons sont les médianes correspondantes.

149. Si I, I' sont deux points isotomiques d'un côté quelconque BC du triangle, le cercle dont le centre est I et le rayon AI', appartient à un système coaxial.

150. La droite λ est la polaire du centre de gravité du triangle ABC, par rapport à L.

151. λ est la conjuguée isotomique de la droite de Lemoine du triangle ABC, par rapport à ses côtés.

152. λ est parallèle à la droite qui joint les conjugués isotomiques des points de Brocard de ABC.

153. Le pôle trilinéaire de λ par rapport au triangle ABC, est l'un des centres de perspective de ABC et de son premier triangle de Brocard.

154. L coupe le cercle circonscrit en des points isotomiques par rapport au triangle.

155. Le cercle décrit de l'orthocentre comme centre, avec le diamètre du cercle circonscrit comme rayon, est coaxial avec L et le cercle circonscrit.

156. Le cercle L, le cercle circonscrit, et le cercle circonscrit au triangle A'B''C'' formé en menant par les sommets de ABC des parallèles aux côtés, sont coaxiaux.

157. Le centre de gravité de ABC est l'un des centres de similitude de L et du cercle conjugué.

158. L'axe radical du cercle circonscrit et du cercle polaire de ABC est parallèle à λ, et le centre de gravité de ABC divise leur distance dans le rapport de 2 à 1.

QUESTIONS PROPOSÉES.

17. (*Mathesis*, t. I, p. 30). Si A, B, C sont des quantités positives, a, b, c des quantités réelles les trois racines de l'équation

$$(x-a)(x-b)(x-c) - A(x-a) - B(x-b) - C(x-c) = 0$$

sont réelles. Calculer le discriminant de cette équation et le mettre sous une forme telle qu'on reconnaisse qu'il est toujours négatif.

95. (*Mathesis*, t. I, p. 206). Trouver l'équation des lignes de courbure d'une surface du second degré ayant pour équation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0.$$

252. (*Mathesis*, t. III, p. 143). I. Si q, r, s sont des entiers plus grands que 2 et p un entier quelconque, démontrer que les nombres de Bernoulli déterminés par la relation symbolique

$$(B+1)^n - B^n = 0$$

vérifient la relation

$$B^p(B+1)^q(B+2)^r(B+3)^s = B^s(B-1)^r(B-2)^q(B-3)^p.$$

II. Démontrer, sans se servir des séries, la relation symbolique

$$(2B+1)^p + 2^pB_p - 2B_p = 0. \qquad \text{(Éd. Lucas.)}$$

267. (*Mathesis*, t. III, pp. 175 et 192). On a

$$1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots =$$

$$1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^4}{[(1-q)(1-q^2)]^2} + \frac{q^5}{[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)]^3} + \cdots$$

(E. Catalan.)

283. (*Mathesis*, t. III, p. 231). Trouver la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt[m]{(P_nx^n + P_{n-1}x^{n-1} + \cdots + P_2x^2 + P_1x + 1)^{m-1}}},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$P_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-1)},$$

m désignant un nombre entier plus grand que l'unité, et n un entier positif quelconque. (S. Realis.)

×**333.** (*Mathesis*, t. IV, p. 119). On peut décomposer un polygone de $m = (p-2)n+2$ côtés, en n polygones de p côtés de

$$\frac{(np-n)(np-n-1)\ldots(np-2n+2)}{1.2.3\ldots n}$$

manières différentes. (H. M. Taylor et R. C. Rowe.)

×**356.** (*Mathesis*, t. IV, p. 159). Soit $S_{n,p}$ la somme des produits p à p des n premiers nombres entiers. Démontrer la relation

$$\sum_{i=0}^{i=p} C_{n+1,\alpha+i} S_{\alpha+i-1,i} \cdot S_{n-\alpha-i,p-i} = C_{n-p+1,\alpha} S_{n,p}. \quad \text{(E. Cesáro.)}$$

×**357.** (*Mathesis*, t. IV, p. 159). Dans le développement de

$$\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots\right)^m$$

le coefficient de x^p est

$$\frac{S_{m+p-1,p}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+p)}. \quad \text{(E. Cesáro.)}$$

×**382.** (*Mathesis*, t. IV, p. 231). On partage une demi-circonférence en n parties égales, et l'on joint les points de division à l'une des extrémités de la demi-circonférence. Démontrer que la somme des produits p à p des carrés des cordes, ainsi obtenues, égale autant de fois la $2p^{\text{ième}}$ puissance du rayon, qu'il y a de manières de combiner $2n-p-1$ objets, p à p(*). (E. Cesáro.)

385. (*Mathesis*, t. IV, p. 231). Soit $p_r = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^r)$. Démontrer l'identité

$$\frac{1}{p_n} - \frac{x}{p_1 p_{n-1}} + \frac{x^3}{p_2 p_{n-2}} - \cdots \pm \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{p_n} = 1. \quad \text{(E. Cesáro.)}$$

387. (*Mathesis*, t. IV, p. 231). Ayant posé

$$u_p = \frac{\sin 2nx \cdot \sin(2n-1)x \ldots \sin(2n-p+1)x}{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \ldots \sin px},$$

on a

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \cdots = -1.9.25\ldots(2n-1)^2$$

si v_p est le coefficient de x^{2n} dans le développement de u_p. (E. Cesáro.)

(*) Voir Question 262, *proposée*, t. III, p. 160 résolue, t. IV, p. 41.

SUR UNE ÉPURE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE(*);

par M. Ph. Breton, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

On donne les axes, les sommets et les angles de deux cônes de révolution C *et* C', *et on demande de construire toutes les normales communes de ces deux surfaces.*

Indiquer les pieds de ces normales dans les deux cônes; reconnaître si la distance entre ces points est maxima, ou minima, ou si elle n'est ni maxima ni minima.

Solution. On emploie, pour plus de facilité, un plan horizontal de projection, parallèle aux axes des deux cônes.

Par un point O, pris à volonté, on mène des droites perpendiculaires à tous les plans tangents au cône donné C; ces droites sont les génératrices d'un cône auxiliaire K, de révolution autour d'un axe parallèle à celui de C; l'ouverture de K est supplémentaire de celle de C. — Du même sommet O, on trace un cône auxiliaire K', dans des conditions pareilles relatives à C'. Toute génératrice réelle commune aux deux cônes auxiliaires K et K' est parallèle à une des normales communes demandées.

On coupe les deux cônes K, K' par une sphère de centre O, ce qui donne, pour les deux nappes de K, deux petits cercles égaux et parallèles, qui se projettent horizontalement suivant deux cordes égales et parallèles du grand cercle horizontal de la sphère, et perpendiculaires à l'axe de K. De même pour K'.

Les deux couples de cordes égales et parallèles forment un parallélogramme AB A'B', de centre O. On examine si ce parallélogramme a ses quatre sommets :

1° Tous quatre en dedans du grand cercle horizontal;

2° Deux en dedans et deux en dehors;

3° Tous quatre en dehors.

Dans le premier cas, le problème a huit solutions réelles; dans le

(*) Cet article avait été remis à la Rédaction de la *Nouvelle Correspondance*, en 1879. M. Catalan a eu la gracieuseté de le céder à *Mathesis*. Le problème, traité avec beaucoup de soin par M. Breton, ne peut manquer d'intéresser nos lecteurs.

deuxième, il y a quatre solutions réelles et quatre imaginaires ; dans le troisième, les huit solutions sont imaginaires.

Soit maintenant AA′ une diagonale du parallélogramme moindre que le diamètre de la sphère. Deux points de la sphère se projettent en A, deux autres en A′, et ces quatre points sont les sommets d'un rectangle vertical, dont les diagonales passent par O et sont des génératrices communes aux cônes K et K′.

Soit l une de ces diagonales. Par l'axe de C, menons un plan P parallèle à l; il coupe C suivant deux génératrices dont l'une, g, est perpendiculaire à l et dont l'autre est étrangère au problème. De même, un plan P′ mené par l'axe de C′ parallèlement à l rencontre C′ suivant deux génératrices, dont on choisira celle qui est perpendiculaire à l; soit g' cette droite.

Les deux plans auxiliaires P, P′ se rencontrent suivant une droite n, parallèle à l et coupant g et g' normalement aux points D, D′, qui sont les pieds de la normale commune n, dans les deux cônes C et C′. La partie $\delta = DD'$ de cette normale commune est celle qui mesure une *distance normale commune* entre C et C′.

Il reste à distinguer si cette distance δ est un maximum, ou un minimum, ou bien si elle n'est ni maxima ni minima. Pour cela il faut examiner, à chaque extrémité de la distance δ, si le cône qui y passe présente sa convexité ou sa concavité vers l'autre extrémité de δ.

1° Si, en D et D′, les deux cônes sont convexes l'un vers l'autre, δ est une distance minima.

2° Si, en D et D′, les deux cônes sont concaves l'un vers l'autre, δ est une distance maxima.

3° Si aux deux extrémités de δ, l'un des cônes tourne sa convexité vers l'autre et que celui-ci tourne sa concavité vers celui-là, alors D n'est ni maxima ni minima. Pour bien nous rendre compte de cette conclusion, transportons C′ parallèlement à lui-même le long de la normale commune n jusqu'à faire coïncider D′ avec D qui devient alors un point de contact de ces deux cônes; ceux-ci auront une intersection qui a, au point de contact D, un point double. Les deux arcs de la courbe d'intersection croisés en D partagent, autour de ce point, les deux surfaces coniques en quatre angles curvilignes. Si l'on déplace la droite DD′ parallèlement à elle-même dans deux de ces angles, opposés au sommet (C′ étant remis dans sa position primitive), la partie de cette

droite comprise entre les deux cônes augmentera; si le déplacement parallèle de DD′ se fait dans les deux autres angles, la longueur diminue; enfin, si on déplace DD′ le long de l'un ou l'autre arc, δ ne varie que d'un infiniment petit d'ordre supérieur.

Dans les deux premiers cas, les deux cônes rendus tangents auront en D un point commun isolé qui devient une courbe fermée, infiniment peu tordue et possédant quatre points réels de rétrotorsion sur les génératrices g et g', si l'on fait que les deux cônes *mordent* un peu l'un dans l'autre.

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Sur le déterminant Wronskien* (par G. Peano, professeur à l'Université de Turin). Dans presque tous les traités, on trouve énoncée la proposition : *Si le déterminant formé avec n fonctions d'une même variable et leurs dérivées des ordres* 1, ... $(n-1)$ *est identiquement nul, on a entre ces fonctions une relation linéaire homogène à coefficients constants.*

Cet énoncé est trop général. Posons, en effet,

$$x = t^2[1+\varphi(t)], \quad y = t^2[1-\varphi(t)],$$

où $\varphi(t)$ désigne une fonction nulle pour $t=0$, égale à 1 pour t positif, à -1, pour t négatif(*). On a pour

$$t<0, \quad \varphi(t)=-1, \quad x=0, \quad y=2t^2;$$

pour

$$t=0, \quad \varphi(t)=0, \quad x=0, \quad y=0;$$

pour

$$t>0, \quad \varphi(t)=1, \quad x=2t^2, \quad y=0.$$

(*) Par exemple :

$$\varphi(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx,$$

dit M. Peano. Si l'on veut un exemple plus élémentaire, posons

$$\psi(t)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{1+t^2}\right), \quad \varphi(t)=[1-\psi(t)]\,\frac{t+\psi(t)}{\text{mod. } t+\psi(t)},$$

où $\mathrm{E}(u)$ désigne le plus grand entier inférieur à u, *mod.* t, la valeur absolue de t.

(P. M).

Les fonctions x et y, et leurs dérivées

$$x' = 2t\,[1 + \varphi(t)], \quad y' = 2t\,[1 - \varphi(t)],$$

sont continues, et l'on a, pour toutes les valeurs de t,

$$\begin{vmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{vmatrix} = 0.$$

Mais entre x et y, il n'y a pas de relation de la forme énoncée, car le point de coordonnées (x, y) ne décrit pas une droite passant par l'origine, mais les deux demi-axes ox et oy.

La proposition est vraie si l'on suppose qu'il n'existe aucune valeur de t qui annule tous les mineurs de la dernière ligne du déterminant proposé, et, peut-être dans d'autres cas qu'il serait intéressant de trouver (*).

2. ***Lieu des points d'où l'on peut mener à une conique deux normales rectangulaires*** (**), par M. V. Jeřábek. Soient TM, TM' deux tangentes rectangulaires, NM, NM' les normales correspondantes. Dans le rectangle TMNM', la diagonale TN passe par le milieu R de la corde MM' et, par suite, aussi par le centre O de la courbe. Le diamètre DD' de la conique, dirigé suivant NOT, étant divisé harmoniquement en R et T, on a

$$OR = \frac{\overline{OD}^2}{OT}, \quad ON = OT - 2OR,$$

d'où les équations des lieux de R et N en coordonnées polaires, savoir :

$$\rho = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}\,(a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega)},$$

$$\rho = \frac{c^2\,(a^2 \sin^2\omega - b^2 \cos^2\omega)}{\sqrt{a^2 + b^2}\,(a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega)}.$$

Ces lieux sont, respectivement, du quatrième et du sixième ordre.

Lorsqu'il s'agit d'une parabole, T se meut sur la directrice, MM' passe par le foyer et TN est parallèle à l'axe. Un calcul facile montre que les lieux des points R et N sont des paraboles.

(*) On peut corriger l'énoncé du théorème énoncé en tête de cette note, comme nous l'avons indiqué dans notre *Résumé d'analyse*, en y ajoutant les mots : *ou bien l'une des fonctions est identiquement nulle*. (P. M.).

(**) Comparer Painvin, *Principes de Géométrie analytique*, t. I, p. 528.

BIBLIOGRAPHIE.

Elementi di Algebra, ad uso degli Istituti tecnici e dei Licei, per A. Faifofer, professore nel Liceo Marco Foscarini. *Settima edizione*, rifatta. Venezia, tipogr. Emiliana, 1888. Prix : 3 fr.

Nous avons déjà eu l'occasion de faire l'éloge, dans *Mathesis*, des excellents *Éléments d'Algèbre* de M. Faifofer(*). Il nous suffira, aujourd'hui, d'indiquer quelques-uns des changements introduits dans la septième édition, et de soumettre en même temps à l'honorable Auteur quelques observations sur deux ou trois endroits de son livre.

1° L'ordre des matières a été assez profondément modifié. Voici quelle est maintenant la suite des chapitres : 1. Quantités algébriques. 2. Opérations fondamentales du calcul littéral. 3. Fractions algébriques. 4. Nombres incommensurables. 5. Équations et problèmes du premier degré à une inconnue. 6. Equations simultanées du premier degré. 7. Puissances. 8. Extraction des racines des nombres; calcul des radicaux. 9. Puissances à exposants fractionnaires, négatifs ou incommensurables. 10. Rapports et proportions. 11. Equations du second degré. 12. Logarithmes. 13. Progressions. 14. Table des logarithmes de 1 à 1000 à 4 décimales.

2° L'auteur a réuni, dans le premier chapitre de la nouvelle édition, toutes les règles conventionnelles du calcul des quantités dites positives et négatives, au lieu de les exposer au fur et à mesure qu'il en avait besoin, comme il l'avait fait dans l'édition dont il a été rendu compte en 1883. Au point de vue logique, cette exposition est préférable à l'ancienne; mais, au point de vue de l'enseignement, peut-être le livre de M. Faifofer sera-t-il, pour les élèves, d'un usage plus difficile qu'il ne l'était auparavant.

Pour ce qui regarde les quantités négatives, nous ne sommes pas porté à regarder, par exemple, deux lignes, comptées en sens contraire, comme des *quantités de qualité* ou *de nature opposée*, que l'on *convient* de distinguer l'une de l'autre par les signes + et —. Selon nous, les signes + et — désignent, *toujours*, l'addition et la soustraction, et ce sont ces deux opérations, et non les quantités, qui sont de nature opposée. Quand on introduit dans le calcul deux lignes de directions contraires, on *convient, dans certaines conditions à expliquer*(**), que celles qui sont comptées dans un certain sens seront *ajoutées*, et que celles qui sont comptées dans le sens opposé seront *soustraites*. Mais ce n'est pas ici le lieu de nous étendre sur ce sujet(***).

(*) Voir t. III, p. 83. Dans ce compte rendu, au lieu de : *pour démontrer la règle des signes*, lire : *pour justifier la règle des signes*.

(**) Je dis : *dans certaines conditions à expliquer*. En effet, si je fais deux lieues en voiture de A en B, puis deux lieues en sens inverse de B en A, mon cocher, qui n'a pas étudié les quantités négatives, me fera payer, non $2 + (-2) = 0$ lieue, mais $2 + 2 = 4$ lieues.

(***) Voir, sur cette question, les ouvrages suivants de Purgotti, professeur à

D'ailleurs, quand on adopte l'ordre logique dans l'exposition des premiers principes de l'algèbre, il serait probablement préférable de ne donner aucune interprétation géométrique des règles conventionnelles du calcul des quantités algébriques, pour que l'élève ne confonde pas cette interprétation avec une démonstration proprement dite.

3° Dans certaines questions, il faudrait peut-être mentionner explicitement qu'on parle de polynômes *à termes entiers*. Sans cette restriction, la division de deux polynômes entiers, par exemple, peut s'achever, bien qu'on arrive à un reste dont le premier terme n'est pas divisible par le premier terme du diviseur (p. 47) : ainsi le polynôme $a^5 + 4a^4 - 13a^3 - 13a - 3$ est divisible par $a^4 + 4a^3 + 3a^2$: le quotient est $a - 3a^{-1} - a^{-2}$. De même, un polynôme, non entier en x, tel que $\sqrt{x^6} - \sqrt{a^3}$, peut ne pas être divisible par $x - a$, bien qu'il s'annule pour $x = a$ (p. 53).

4° A propos de la *rationalisation* des dénominateurs des fractions à dénominateurs irrationnels (p. 229), l'auteur aurait pu faire remarquer, avec Descartes, que cette transformation est toujours possible, quel que soit le nombre des radicaux, du second degré, du dénominateur (*).

5° L'auteur, dans la nouvelle édition, ne parle plus des *expressions imaginaires*. En revanche, il a ajouté un chapitre important et étendu sur les *nombres irrationnels*, d'après les idées de Dedekind (pp. 76-98). Nous signalons tout particulièrement ce chapitre aux lecteurs de *Mathesis*, sans toutefois donner notre propre sentiment sur cette question, fort discutée aujourd'hui.

Le livre tout entier est écrit avec la clarté et la rigueur qui caractérisent les ouvrages de M. Faifofer et il contient 775 exercices bien choisis. Aussi nous le recommandons avec confiance à tous les professeurs chargés de l'enseignement de l'algèbre élémentaire. (E. Gelin.)

Arithmetices Principia nova methodo exposita a Josepho Peano in R. Academia militari professore, Analysin infinitorum in R Taurinensi Atheneo docente. Augustae Taurinorum ediderunt Fratres Bocca, 1889 (XVI-20 p. in 8°).

Essai remarquable de réduction des idées et des propositions principales de l'arithmétique générale, à un nombre minimum de notions fondamentales et d'axiômes, au moyen d'un système particulier de notations abrégées. Le dernier paragraphe contient quelques théorèmes nouveaux sur les *ensembles de points* de G. Cantor.

---

l'Université de Pérouse : *Lettere filosofiche principalmente risguardanti l'elementare insegnamento delle scienze esatte*, Perugia 1852-1855, pp. 375, 389 ; *Segreti dell'arte di communicar le idee negli elementi delle scienze esatte*, Perugia, 1858, pp. 41, 72, 84 ; *Intorno a varie inesattezze*, etc., Perugia 1865, p. 20 ; *Cicalate polemiche*, etc., Perugia 1871, p. 71 ; *Elementi di Algebra*, Perugia, 1858, p. 11.

(*) Certains auteurs modernes regardent, à tort, cette transformation comme impossible, lorsque le dénominateur renferme plus de quatre termes irrationnels irréductibles (Amiot, Claessens, Deltenre, Navet, etc.).

Eléments de Géométrie, conforme aux derniers programmes officiels, renfermant un grand nombre d'exercices classés par paragraphes et suivis d'un complément à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales et de notions sur le lever des plans et le nivellement, par E. Rouché et Ch. de Comberousse, professeurs au Conservatoire des Arts et Métiers. Quatrième édition entièrement refondue. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1888. Un volume in 8°, XL-604 p. Prix : 6 francs.

Nous avons donné un compte rendu sommaire de ce très bon manuel dans *Mathesis* (1881, t. I, p. 160-161). Voici quelles sont les principales additions introduites dans la nouvelle édition : Méthodes par déplacement (rotation, translation, repliement, retournement) pour la résolution des problèmes (p. 101); méthode des figures semblables quand la figure à construire a une position définie (p. 156); propriétés fondamentales de deux faisceaux ayant un rayon homologue commun et un rapport anharmonique égal (p. 347); méthode par rotation combinée avec l'homothétie (p. 360); Inverseurs de Peaucellier et de Hart, problème de Castillon; solution générale du problème : mener un cercle tangent à trois cercles donnés; cercle des neuf points, involution, faisceaux de cercles, cercles orthogonaux (pp. 373-388). — Enfin, grâce à l'emploi de la transformation harmonique et de la théorie de l'involution, la partie de l'ouvrage consacrée aux sections coniques a pu être complétée au point de former un petit traité sur ces courbes célèbres. Dans la troisième édition, cette section était divisée en quatre chapitres (ellipse, hyperbole, parabole, sections coniques, 46 pages); dans la nouvelle, il y en a huit, dont quatre presque entièrement nouveaux (ellipse, hyperbole, parabole, directrices dans l'ellipse et l'hyperbole et transformation harmonique, pôle et polaires, diamètres, ellipse considérée comme projection du cercle, sections coniques; 78 pages).

L'ouvrage de MM. Rouché et de Comberousse laisse bien peu à désirer comme manuel de Géométrie à l'usage des élèves; peut-être devrait-il contenir dans les *Compléments* au moins quelques notions sur la géométrie récente (points de Lemoine, de Brocard, etc.). Au point de vue scientifique, nous n'avons guère que deux desiderata à signaler : 1° Il serait préférable de revenir complétement à la tradition euclidienne en n'employant dans les démonstrations que des constructions que l'on peut effectuer en s'appuyant sur des théorèmes précédemment démontrés. 2° La note II, sur la longueur d'une courbe, devrait être rendue plus rigoureuse. (Voir *Mathesis*, Supplément à la livraison de novembre 1888).

Traité de Géométrie descriptive pour l'enseignement secondaire classique par E. Lebon, professeur au lycée Charlemagne. Premier volume, à l'usage des classes de mathématiques élémentaires. Deuxième édition, revue et modifiée. Paris, Delalain, 1888. Un vol. in 8° de VIII-262 pages, avec 273 figures dans le texte. Prix : 6 francs.

Sommaire. 1. Définitions et conventions. 2-4. Point, droite, plan. 5. Cas simples des méthodes générales (changement de plan vertical pour un point et une droite; rabattement et relèvement d'un plan perpendiculaire à un plan de projection;

rotation d'une droite autour d'une verticale ou d'une perpendiculaire au plan vertical). 6. Traces et angles d'une droite ou d'un plan avec les plans de projection; plan parallèle ou perpendiculaire à une droite ou à un plan. 7-8. Intersections d'un plan avec un plan ou avec une droite. 9. Les trois méthodes générales (changement de plan de projection, rabattement, rotation). 10. Distances. 11. Angles. 12-13. Projections d'un polygone, d'une circonférence, d'un polyèdre. 14. Sections planes des polyèdres. 15. Plans cotés. 16. Angles trièdres (4 cas traités directement). 17-18. Problèmes divers sur les angles et les distances. 19. Polyèdres réguliers. 20. Intersection de deux polyèdres. 21. Ombres des polyèdres. *Appendice* I. Cylindre et cône de révolution, sphère, surface topographique. 2. Emploi d'un seul plan horizontal et de plans verticaux auxiliaires. 3. Problèmes gradués à résoudre (97). Sujets d'épures proposés pour l'admission à l'école navale.

Comme on le voit par ce rapide aperçu, l'auteur du nouveau Traité a sagement gradué les difficultés que présentent les débuts de la géométrie descriptive et son livre sera très utile à la catégorie d'élèves auxquels il est destiné.

Elementi di Geometria ad uso dei licei per AURELIANO FAIFOFER, Professore nel liceo Marco Foscarini. Sesta edizione migliorata. Venezia, Tipografia Emiliana, 1888. Un vol. in-12 de 552 p. Prix : 4 francs.

Nouvelle édition encore améliorée de l'excellent ouvrage dont nous avons déjà parlé deux fois dans *Mathesis* (1884, IV, p. 168-169; 1888, VIII, p. 138) et plus au long dans la *Revue de l'Instruction publique*, en 1884. Au point de vue de la rigueur dans l'exposition didactique des principes, le livre de M. Faifofer est le meilleur manuel de Géométrie que nous connaissions. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 32(*).

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 62; t. VIII, p. 56.)

Étant données une fonction entière du degré n

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \cdots + A_n,$$

et $n+1$ ***quantités arbitraires*** $a_0, a_1, \ldots, a_n$, ***déterminer les coefficients*** $B_0, B_1, \ldots, B_n$ ***dans le développement***

$$f(x) = B_0f(x-a_0) + B_1f'(x-a_0-a_1) + B_2f''(x-a_0-a_1-a_2) + \cdots + B_nf^n(x-a_0-a_1-\cdots-a_n).$$ (J. C. GLASHAN.)

(*) Les notations primitives ont été changées.

Solution par M. PISANI. Dérivons n fois de suite l'identité proposée :

$$f'(x) = B_0 f'(x-a_0) + B_1 f''(x-a_0-a_1) + \cdots + B_{n-1} f^n(x-a_0-\cdots-a_{n-1}).$$
$$f''(x) = B_0 f''(x-a_0) + B_1 f'''(x-a_0-a_1) + \cdots + B_{n-2} f^n(x-a_0-\cdots-a_{n-2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{n-1}(x) = B_0 f^{n-1}(x-a_0) + B_1 f^n(x-a_0-a_1),$$
$$f^n(x) = B_0 f^n(x-a_0).$$

En remontant la série de ces égalités, nous pouvons déterminer successivement les valeurs de B_0, B_1, B_2, ... Celles-ci sont, nécessairement, indépendantes de x. On donnera, si l'on veut, à x une valeur quelconque.

Autre solution. Pour abréger l'écriture, faisons

$$x - a_0 = x_1, \quad x - a_0 - a_1 = x_2, \ldots$$

Le théorème de Taylor donne

$$f(x) = f(x_1 + a_0) = f(x_1) + a_0 f'(x_1) + \frac{a_0^2}{1.2} f''(x_1) + \cdots$$

$$f'(x_1) = f'(x_2 + a_1) = f'(x_2) + a_1 f''(x_2) + \frac{a_1^2}{1.2} f'''(x_2) + \cdots$$

$$f''(x_1) = f'''(x_2 + a_1) = f''(x_2) + a_1 f'''(x_2) + \frac{a_1^2}{1.2} f^{IV}(x_2) + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Par conséquent,

$$f(x) = f(x_1) + a_0 f'(x_2) + \left(a_0 a_1 + \frac{a_0^2}{1.2}\right) f''(x_2) + \cdots$$

Développons maintenant les fonctions

$$f''(x_2) = f''(x_3 + a_2), \quad f'''(x_2) = f'''(x_3 + a_2), \quad \ldots$$

suivant les puissances de a_2; nous aurons, pour les trois premiers termes du développement de $f(x)$,

$$f(x_1) + a_0 f'(x_2) + \left(a_0 a_1 + \frac{a_0^2}{1.2}\right) f''(x_3).$$

D'où nous voyons que

$$B_0 = 1, \quad B_1 = a_0, \quad B_2 = a_0 a_1 + \frac{a_0^2}{1.2}.$$

En continuant ainsi, nous trouverons successivement B_3, B_4, ...

Les valeurs de B_0, B_1, B_2, ... ne dépendent pas de A_0, A_1, A_2, ...; nous

pouvons donc les déterminer en particularisant la fonction $f(x)$. Prenons, par exemple, $f(x) = x^n$; alors on est conduit à l'identité

$$x^n = B_0 (x + b_0)^n + nB_1 (x + b_1)^{n-1} + n(n-1) B_2 (x + b_2)^{n-2} + \cdots$$

$-b_0$, $-b_1$, $-b_2$, ... désignant a_0, $a_0 + a_1$, $a_0 + a_1 + a_2$, ... On trouve ainsi les égalités

$$1 = B_0,$$

$$0 = B_0 b_0 + B_1,$$

$$0 = B_0 \frac{b_0^2}{1.2} + B_1 b_1 + B_2,$$

$$0 = B_0 \frac{b_0^3}{1\ 2.3} + B_1 \frac{b_1^2}{1.2} + B_2 b_2 + B_3, \text{ etc.}$$ (J. N.)

Question 293.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 232.)

On donne une circonférence, un rayon fixe OA *et une tangente mobile* BC, *ayant* C *pour point de contact. On projette* C *en* D *sur* OA, D *en* M *sur* CB. M *en* D′ *sur* OA, D′ *en* M′ *sur* CB *etc. On demande :* 1° *le lieu des points* M, M′ M″, ... *ainsi obtenus;* 2° *les propriétés communes à ces courbes.* (H. Brocard.)

Solution par M. P. Molenbroeck. 1° Soit θ l'angle COA et appelons (x, y), (x_0, y_0), $(x_1 y_1)$, ... (x_n, y_n) les coordonnées des points C, M, M′, M″, ..., M^n. Il suit immédiatement de la figure que

$$x_n - x_{n-1} = y_{n-1} \cos\theta \sin\theta, \quad y_n = y_{n-1} \sin^2\theta,$$
$$x_0 - x = y \cos\theta \sin\theta, \quad y_0 = y \sin^2\theta,$$

d'où

$$x_n = x + (y + y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) \cos\theta \sin\theta, \quad y_n = y \sin^{2n+2}\theta,$$

et, si le rayon du cercle donné est pris pour unité,

$$x_n = \cos\theta (1 + \sin^2\theta + \sin^4\theta + \cdots + \sin^{2n+2}\theta) = \frac{1 - \sin^{2n+4}\theta}{\cos\theta},$$
$$y_n = \sin^{2n+2}\theta.$$

Il resterait à éliminer θ entre les deux dernières équations.

2° Toutes les courbes considérées ont, visiblement, pour axes de

symétrie le diamètre AA′ et le diamètre BB′ perpendiculaire à AA′. Les points A, A′ sont des points de rebroussement; la tangente en ces points se confond avec AA′(*). Les points B, B′ sont des points simples; la tangente en ces points est parallèle à OA. Ces courbes sont fermées; l'aire du secteur décrit par le rayon OM_n s'obtient par des intégrales élémentaires.

Question 510(**).

(Voir *Mathesis*, t. VI, pp. 70 et 214.)

Des droites de longueurs constantes se meuvent dans un plan en s'appuyant par leurs extrémités à une droite D ***et à une ligne quelconque*** C. ***On considère à un moment donné les droites qui passent par un même point de*** C, ***et l'on mène à leurs enveloppes les normales qui correspondent à ces positions. Démontrer que ces normales sont tangentes à une même parabole.***

(E. Cesàro.)

Si la droite mobile s'appuie à C en A, et à D en B, le point de rencontre I de la normale à C en A, et de la normale à D en B est le centre instantané de rotation de la droite mobile, et la perpendiculaire IE abaissée de I sur AB est la normale à l'enveloppe de AB. Soit T le point de rencontre de D avec la tangente menée à C en A; construisons les symétriques F et G de T par rapport à A et B. I est, visiblement, le centre du cercle circonscrit au triangle TFG; donc la droite IE est perpendiculaire au milieu H de FG. Mais le point H appartient à la parallèle D′ menée par A à D, donc la droite IEH enveloppe une parabole ayant pour foyer F et pour tangente au sommet D′. (E. Cesàro).

(*) L'ordre du contact de la tangente OA croît avec n. On a

$$dx_n = [(2n+3)\sin^{2n+2}\theta - \sin^{2n}\theta - \sin^{2n-2}\theta \cdots - \sin^2\theta - 1]\sin\theta d\theta,$$
$$dy_n = (2n+3)\sin^{2n+2}\theta\cos\theta d\theta.$$

L'équation $dx_n = 0$ détermine les points les plus éloignés du diamètre BB′; elle donne, outre la racine $\sin\theta = 0$, une seule valeur admissible pour $\sin^2\theta$; car le polynôme entre crochets n'a qu'une seule variation et prend des signes contraires pour $\sin\theta = 0$, $\sin^2\theta = 1$. Le lieu géométrique de la question 500, résolue t. VI, p. 294, appartient à la famille de courbes de la question 293. (J. N.)

(**) La solution de M. Cesàro nous a été remise avec l'énoncé de la question.

×Question 601.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 27.)

Soient ABC, A'B'C' *deux triangles dans un même plan;* A_1, B_1, C_1 *les milieux des droites* AA', BB', CC'; AP, AQ *deux droites respectivement égales et parallèles à* A'B', A'C', *et dirigées dans le même sens. On propose de démontrer :* 1° *que le centre de gravité du triangle* $A_1B_1C_1$ *est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux triangles donnés;* 2° *que l'aire du triangle* $A_1B_1C_1$ *est équivalente au quart de la somme des aires des triangles* ABC, A'B'C', ABQ, APC. (LAISANT.)

Solution géométrique par M. EMMERICH. 1° Pour généraliser la proposition, nous supposons que les points A_1, B_1, C_1 divisent les droites AA', BB', CC' dans le rapport $m : n$, et au lieu des centres des moyennes distances, nous considérons les points G, G', G_1 dont les cordonnées barycentriques par rapport aux trois triangles ABC, A'B'C', $A_1B_1C_1$, respectivement, sont égales à α, β, γ : Le point G, par exemple, est à l'intersection des droites Aa, Bb, Cc, divisant BC, CA, AB, aux points a, b, c dans les rapports $\gamma : \beta$, $\alpha : \gamma$, $\beta : \alpha$, et l'on a $Ga : Aa = \alpha : \alpha + \beta + \gamma \ldots$

Cela posé, rappelons la proposition suivante :

Soient M, N, P, Q *quatre points quelconques situés ou non dans un même plan; soient* X, Y *deux points divisant les droites* MN, QP *dans un même rapport* $m : n$, *et soient* Z, U *deux points divisant* NP *et* MQ *dans un même rapport* p, q. *Les droites* XY *et* ZU *se rencontrent en un même point* V *tel que* $UV : VZ = m : n$, $XV : VY = p : q$(*).

(*) M. EMMERICH démontre ce théorème au moyen des égalités

$$(p+q).\overline{XUY} = q.\overline{XMY} + p.\overline{XQY}, \quad (p+q)\ \overline{XZY} = q.XNY + p.XPY,$$
$$XMY : XNY = m : n = XQY : XPY,$$

lesquelles entraînent $XUY : XZY = m : n$. Cette démonstration suppose que les points M, N, P, Q soient situés dans un même plan.

La démonstration suivante, qui est probablement déjà connue, est plus générale. Construisons les parallélogrammes XMQq, XNPp, XMUu, XNZz. Au moyen de triangles semblables, on voit immédiatement que les droites QP, qp se coupent en un point Y tel que $QY : YP = qY : Yp = m : n$, que les droites UZ, uz se coupent en un point V tel que $UV : VR = uV : Vz = m : n$. Donc dans le triangle Xqp, les points v, z divisent les côtés Xq, Xp dans le même rapport, et les points Y, V divisent la base qp et sa parallèle uz dans un même rapport $m : n$. Par suite, les points X, V, Y sont en ligne droite et $XV : VY = p : q$.

D'après ce théorème, la droite B_1C_1, qui divise BB' et CC' dans le rapport $m : n$, et la droite aa', qui divise BC et B'C' dans le rapport $\gamma : \beta$, se coupent en un point a_1, tel que

$$B_1a_1 : a_1C_1 = \gamma : \beta, \quad aa_1 : a_1a' = m : n.$$

De même, la droite A_1a_1, qui divise AA' et aa' dans le rapport $m : n$, et la droite GG' qui divise Aa et A'a' dans le rapport $\beta + \gamma : \alpha$, se coupent en un point G_1, tel que

$$A_1G_1 : G_1a_1 = \beta + \gamma : \alpha, \quad GG_1 : G_1G' = m : n.$$

La première partie de la question 601 est donc démontrée.

2° Menons les droites AB_2, AC_2 respectivement égales et parallèles à A_1B_1 et A_1C_1; il est facile de voir que les points B_2, C_2 divisent les droites BP, CQ dans le rapport $m : n$, de sorte que les triangles A'B'C', $A_1B_1C_1$ sont égaux à APQ, AB_2C_2.

Entre les aires des triangles AB_2C_2. APC_2, ... , on a les relations

$$\begin{aligned}(m+n).AB_2C_2 &= m.APC_2 + n.ABC_2,\\ (m+n).APC_2 &= m.APQ + n.APC,\\ (m+n).ABC_2 &= m.ABQ + n.ABC;\end{aligned}$$

en éliminant APC_2, ABC_2, il vient

$$(m+n)^2.AB_1C_2 = m^2.APQ + n^2.ABC + mn(APC + ABQ.)$$

Si $m = n$, on déduit, de cette relation,

$$4\,A_1B_1C_1 = A'B'C' + ABC + APC + ABQ.$$

M. Aug. Denys a démontré, de la même manière, le cas particulier de $m = n$, $\alpha = \beta = \gamma$.

Solution analytique par MM. Denys, Déprez *et* François. 1° Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées rectangulaires de A, B, C et (x'_1, y'_1), ..., celles de A', B', C'. Celles des points A_1, B_1, C_1 qui divisent les droites AA', BB', CC' dans le rapport $m : n$, étant

$$\frac{mx'_1 + nx_1}{m+n}, \quad \frac{my'_1 + ny_1}{m+n}, \quad \ldots,$$

on trouve aisément pour les coordonnées du centre des moyennes distances G_1 de A_1, B_1, C_1

$$\frac{m(x'_1 + x'_2 + x'_3) + n(x_1 + x_2 + x_3)}{3(m+n)}, \ldots;$$

la forme de ces expressions montre que G_1 divise dans le rapport $m : n$

la distance des centres des moyennes distances des triangles ABC, A'B'C'.

2° D'après une formule connue,

$$2(m+n)^2 A_1B_1C_1 = \begin{vmatrix} nx_1+mx'_1 & ny_1+my'_1 & 1 \\ nx_2+mx'_2 & ny_2+my'_2 & 1 \\ nx_3+mx'_3 & ny_3+my'_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est la somme de quatre déterminants, savoir :

$$n^2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad m^2 \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$mn \begin{vmatrix} x_1 & y'_1 & 1 \\ x_2 & y'_2 & 1 \\ x_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad mn \begin{vmatrix} x'_1 & y_1 & 1 \\ x'_2 & y_2 & 1 \\ x'_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

D'autre part, les coordonnées des points P, Q étant

$$x_1+x'_2-x'_1, \quad y_1+y'_2-y'_1; \quad x_1+x'_3-x'_1, \quad y_1+y'_3-y'_1,$$

on a également

$$2ABQ = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_1+x'_3-x'_1 \\ y_1 & y_2 & y_1+y'_3-y'_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$2APC = \begin{vmatrix} x_1 & x_1+x'_2-x'_1 & x_3 \\ y_1 & y_1+y'_2-y'_1 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Si l'on retranche la première colonne respectivement de la 3e et de la 2e, et qu'on développe ensuite, on voit que

$$(m+n)^2 A_1B_1C_1 = m^2 . A'B'C' + n^2 . ABC + mn(ABQ + APC).$$

NOTE. 1° Pour établir la première partie du théorème par la Mécanique, considérons six forces parallèles, mesurées respectivement, par $n\alpha$, $n\beta$, $n\gamma$, $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$ et appliquées en A, B, C, A', B', C'. Pour trouver la résultante, on peut : 1° composer en une seule force les forces $n\alpha$, $n\beta$, $n\gamma$ d'une part, les forces $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$ d'autre part, puis combiner les deux résultantes partielles ainsi obtenues; 2° chercher les résultantes des trois paires $n\alpha$ et $m\alpha$, $n\beta$ et $m\beta$, $n\gamma$ et $m\gamma$, etc.

2° Plus généralement, soient A, B les barycentres de deux polygones $A_1A_2 \dots A_n$, $B_1B_2 \dots B_n$, dont les sommets portent, respectivement, les masses $m_1, m_2, \dots, m_n$. Si M est le barycentre des masses $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ appliquées en $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$,

on sait que A divise la droite MA_n dans le rapport $m_n : s - m_n$, s désignant la somme $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$. Il résulte de là qu'un déplacement de la masse m_n de A_n en B_n fait décrire à A un segment de droite AN parallèle à A_nB_n et égal à $\frac{m_n}{s} A_nB_n$. Par conséquent, si l'on fait décrire successivement, aux masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les droites $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$, leur barycentre A parcourt une ligne brisée $AD_1D_2 \ldots D_{n-1}B$, dont les composantes sont parallèles à ces droites et égales aux quotients des quantités $m_1 . A_1B_1, m_2 . A_2B_2, \ldots, m_n . A_nB_n$ divisées par s.

Supposons les polygones $A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$ situés dans un même plan, et construisons, dans ce plan, les triangles semblables $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., $A_nB_nC_n$. On passe du barycentre A des masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ placées en $A_1, A_2, \ldots, A_n$ au barycentre C de ces masses placées en $C_1, C_2, \ldots, C_n$ au moyen d'une certaine ligne brisée $AE_1E_2 \ldots E_{n-1}C$ dont les côtés sont parallèles aux droites $A_1C_1, A_2C_2, \ldots, A_nC_n$ et égaux à

$$\frac{m_1}{s} A_1C_1, \quad \frac{m_2}{s} A_2C_2, \quad \ldots, \quad \frac{m_n}{s} A_nC_n.$$

Les deux lignes brisées $AD_1D_2 \ldots B$, $AE_1E_2 \ldots C$ sont, évidemment, semblables : leurs côtés homologues sont entre eux dans un rapport constant et font un angle constant. Par suite, le triangle ABC est semblable à $A_1B_1C_1$.

Ce théorème, d'une grande généralité, nous a été communiqué par M. Déprez, avec une démonstration qui a été suggérée à son auteur par celle que nous avons donnée d'un théorème de M. Laisant (N. C. M., t. VI, p. 473).

3° M. Déprez signale également l'extension de la première partie de la question 601 à deux polygones tracés sur la même sphère.

4° Désignons par S et S' les aires ABC et A'B'C', par S'' l'aire du triangle qui a ses sommets aux milieux des droites AA', BB', CC', par T celle du triangle $A_1B_1C_1$ dont les sommets divisent AA', BB', CC' dans le rapport $m : n$. Nous aurons

$$4S'' = S + S' + ABQ + APC,$$
$$(m+n)^2 T = n^2 S + m^2 S' + mn\,(ABQ + APC)$$
$$= n^2 S + m^2 S' + mn\,(4S'' - S - S').$$

L'hypothèse $T = 0$ correspond à deux droites remarquables δ, δ', qui divisent les droites AA', BB', CC' dans un même rapport et qui sont des tangentes communes aux trois paraboles P_c, P_a, P_b inscrites, respectivement, aux trois quadrilatères AA'B'B, BB'C'C, CC'A'A. Ces droites δ, δ' partagent aussi les côtés correspondants des triangles ABC, A'B'C' dans les mêmes rapports ; ce sont donc les droites doubles des deux figures affines dans lesquelles ces triangles se correspondent. Pour qu'elles soient réelles, on doit avoir, en supposant les aires S, S', S'' positives

$$\sqrt{S''} \geqq \tfrac{1}{2}(\sqrt{S} + \sqrt{S'}), \quad \text{ou} \quad \leqq \tfrac{1}{2}(\sqrt{S} - \sqrt{S'}).$$

lorsque

$$\sqrt{S''} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{S} \pm \sqrt{S'}),$$

les paraboles P_a, P_b, P_c se touchent en un point commun. (J. N.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

641. Appelons, avec M. Neuberg, faisceau direct et faisceau rétrograde de Brocard les deux groupes de trois lignes (Aω, Bω, Cω), (Aω′, Bω′, Cω′), ω étant le point direct de Brocard (*angle* ωAC = ωBA = ωCB; coordonnées normales $b:c$, $c:a$, $a:b$), ω′ le point rétrograde.

Faisons tourner le faisceau direct dans le sens ACB d'un angle λ autour de ω, et le faisceau rétrograde dans le sens ABC du même angle λ autour de ω′. Alors

ωA	vient couper BC, CA, AB	respectivement en	ω_{aa}, ω_{ab}, ω_{ac} ;
ωB	»	»	ω_{ba}, ω_{bb}, ω_{bc} ;
ωC	»	»	ω_{ca}, ω_{cb}, ω_{cc} ;
ω′A	»	»	ω'_{aa}, ω'_{ab}, ω'_{ac}.

. . . . . .

On sait que ω_{ab}, ω'_{cb}, ω_{ca}, ω'_{ba}, ω_{bc}, ω'_{ac} sont sur un cercle de Tucker. Démontrer 1° que ω_{aa}, ω'_{aa}, ω_{bb}, ω'_{bb}, ω_{cc}, ω'_{cc} sont sur une conique; 2° que les droites $\omega_{ac}\omega'_{ab}$, $\omega_{cb}\omega'_{ca}$, $\omega_{ba}\omega'_{bc}$ sont respectivement parallèles à BC, AB, CA; 3° que si ω_λ est le centre d'homothétie de ABC et du triangle formé par les droites du n° 2, les coordonnées normales de ω_λ sont

$$\frac{1}{a}\,\frac{\operatorname{cotg}\lambda - \operatorname{cotg} A}{\operatorname{cotg}\lambda - \operatorname{cotg}(A-\omega)}, \quad \text{etc.}$$

4° Trouver le lieu de ω_λ. (E. Lemoine.)

×**642**. Soient x, y, z les distances des sommets du triangle ABC au centre I du cercle inscrit, et x', y', z' les distances de ces sommets à l'orthocentre H. Démontrer les relations

$$\mathrm{S}\,a^4x^4 + (a+b+c)^2x^2y^2z^2 = 2\,\mathrm{S}\,a^2b^2x^2y^2. \quad \text{(Miller.)}$$

$$x'y'z'\,\mathrm{S}^3\,ax' + abc\,\mathrm{S}\,x'^2\,\mathrm{S}^2\,ax' = 4a^2b^2c^2. \quad \text{(Ray.)}$$

643. Soient A, B, C trois points d'une courbe quelconque Σ. Il existe une conique inscrite au triangle ABC et ayant pour foyer un point donné F. Si les points B et C se rapprochent indéfiniment de A, le rayon de courbure de la conique au point A tend indéfiniment vers le quadruple de celui de la courbe Σ au même point. (Cl. Servais.)

Rectifications. Page 11, ligne 1, lire *devenu* au lieu de *devenant*. Page 51, ex. 17, au lieu de $n : R^2\delta^2$, lire $n : (R^2 - \delta^2)$. Page 71, question 267, le dernier numérateur est φ^6 et non φ^3.

QUELQUES PROPRIÉTÉS D'UNE QUARTIQUE PLANE TRINODALE;

par M. JOHN C. MALET.

I. Si l'on prend les trois points doubles pour sommets du triangle de référence, l'équation de la courbe est

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz(Ax + By + Cz) = 0,$$

et les équations des tangentes en ces points doubles sont

$$x^2 + y^2 + Cxy = 0, \quad y^2 + z^2 + Ayz = 0, \quad z^2 + x^2 + Bzx = 0.$$

Les deux premières de ces tangentes rencontrent la quartique en des points situés sur la conique,

$$xy + Axz + Byz = 0.$$

Or, on a identiquement

$$\begin{aligned} &AB(x^2 + y^2 + Cxy) + (A^2 + B^2 - ABC)(xy + Axz + Byz) \\ &= (Ax + By)[Bx + Ay + (A^2 + B^2 - ABC)z]. \end{aligned}$$

Les points d'intersection considérés sont donc aussi sur la droite

$$Bx + Ay + (A^2 + B^2 - ABC)z = 0.$$

De même, les intersections, avec la quartique, des deux autres couples de tangentes nodales sont respectivement à l'intersection de la droite et de la conique ayant pour équations :

$$Cy + Bz + (B^2 + C^2 - ABC)x = 0, \quad yz + Byx + Czx = 0,$$

et de la droite et de la conique représentées par

$$Az + Cx + (C^2 + A^2 - ABC)y = 0, \quad zx + Czy + Axy = 0.$$

Maintenant, considérons la conique

$$\begin{aligned} &(B^2 + C^2 - ABC)x^2 + (C^2 + A^2 - ABC)y^2 + (A^2 + B^2 - ABC)z^2 \\ &+ (C + C^2 + AB - ABC^2)xy + (A + A^2 + BC - A^2BC)yz \\ &+ (B + B^2 + AC - AB^2C)zx = 0. \end{aligned}$$

En multipliant cette équation par AB (BC ou CA) elle prend la forme suivante (et deux autres formes analogues qu'il est inutile d'écrire) :

$$\begin{aligned} &(A - BC)(B - AC)(C - AB)(xy + Axz + Byz) \\ &+ [Bx + Ay + (A^2 + B^2 - ABC)z] \\ &\times [A(B^2 + C^2 - ABC)x + B(A^2 + C^2 - ABC)y + ABz] = 0. \end{aligned}$$

On en conclut le théorème suivant : Les six points où les tangentes nodales rencontrent la quartique sont sur une conique.

II. Considérons maintenant les couples de tangentes, distinctes des tangentes nodales, et menées par chaque nœud.

Entre l'équation de la première polaire du point (x, y),

$$2z(x^2 + y^2 + Cxy) + xy(Ax + By) = 0,$$

et l'équation de la courbe, éliminons z ; nous trouverons pour les deux tangentes émanant du point (x, y),

$$4(x^2 + y^2 + Cxy) - (Ax + By)^2 = 0.$$

Les tangentes analogues issues des points (y, z) et (z, x) sont

$$4(y^2+z^2+Ayz) - (By+Cz)^2=0, \quad 4(z^2+x^2+Bzx) - (Cz+Ax)^2=0.$$

Ces trois couples de droites touchent la conique ayant pour équation

$$x^2(4 - A^2) + y^2(4 - B^2) + z^2(4 - C^2)$$
$$+ 2(2C - AB)xy + 2(2A - BC)yz + 2(2B - AC)zx = 0,$$

ce qui est un théorème connu.

Il est facile de voir que les points de contact des deux premières tangentes sont les points d'intersection, distincts du point (x, y), de ces tangentes avec la conique

$$2xy + Axz + Byz = 0.$$

Or, on a identiquement

$$4AB(x^2 + y^2 + Cxy) - AB(Ax + By)^2$$
$$+ 2(A^2 + B^2 - ABC)(2xy + Axz + Byz)$$
$$= (Ax + By)[B(4 - A^2)x + A(4 - B^2)y + 2(A^2 + B^2 - ABC)z].$$

Donc les points de contact des tangentes menées du nœud (x, y) sont les intersections de la conique

$$2xy + Axz + Byz = 0,$$

avec la droite

$$B(4 - A^2)x + A(4 - B^2)y + 2(A^2 + B^2 - ABC)z = 0.$$

De même, les points de contact des tangentes menées des autres nœuds sont donnés par les équations

$$2yz + Byx + Czx = 0,$$
$$2(B^2 + C^2 - ABC)x + C(4 - B^2)y + B(4 - C^2)z = 0;$$
$$2zx + Czy + Axy = 0,$$
$$C(4 - A^2)x + 2(A^2 + C^2 - ABC)y + A(4 - C^2)z = 0.$$

Maintenant, considérons la conique ayant pour équation

$$x^2(B^2+C^2-ABC)(4-A^2)+y^2(A^2+C^2-ABC)(4-B^2)$$
$$+z^2(A^2+B^2-ABC)(4-B^2)$$
$$+xy\{2C^3-3ABC^2+2C(A^2B^2-A^2-B^2+4)-A^3B-AB^3+4AB\}$$
$$+yz\{2A^3-3A^2BC+2A(B^2C^2-B^2-C^2+4)-B^3C-BC^3+4BC\}$$
$$+zx\{2B^3-3AB^2C+2B(A^2C^2-C^2-A^2+4)-C^3A-CA^3+4CA\}=0.$$

En multipliant cette équation par 2AB, on peut la mettre sous la forme

$$(2A-BC)(2B-AC)(2C-AB)\{2xy+Axz+Byz\}$$
$$+\{B(4-A^2)x+A(4-B^2)y+2(A^2+B^2-ABC)z\}\times$$
$$\{2A(B^2+C^2-ABC)x+2B(A^2+C^2-ABC)y+AB(4-C^2)z\}=0.$$

Il existe deux autres formes analogues faciles à trouver. On en conclut le théorème :

Si, par les points doubles d'une quartique trinodale, on mène des tangentes à la courbe, distinctes des tangentes nodales, les six points de contact sont sur une conique.

III. Joignons deux à deux les points où les tangentes nodales rencontrent la courbe; les droites ainsi obtenues rencontrent la courbe en trois couples de points, qui, joints aux points doubles correspondants, déterminent six droites qui touchent une conique.

Éliminant z entre l'équation de la courbe et

$$Bx+Ay+(A^2+B^2-ABC)z=0,$$

et divisant le résultat par (x^2+y^2+Cxy), nous trouvons l'équation de deux des six droites considérées, savoir :

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\left\{\frac{A}{B}+\frac{B}{A}-C-\frac{2}{AB}\right\}xy=0.$$

Les autres ont pour équations :

$$\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}-\left\{\frac{B}{C}+\frac{C}{B}-A-\frac{2}{BC}\right\}yz=0,$$
$$\frac{z^2}{C^2}+\frac{x^2}{A^2}-\left\{\frac{C}{A}+\frac{A}{C}-B-\frac{2}{CA}\right\}zx=0.$$

Ces six droites touchent la conique

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}-\left\{\frac{B}{C}+\frac{C}{B}-A-\frac{2}{BC}\right\}yz$$
$$-\left\{\frac{C}{A}+\frac{A}{C}-B-\frac{2}{CA}\right\}zx-\left\{\frac{A}{B}+\frac{B}{A}-C-\frac{2}{AB}\right\}xy=0.$$

IV. Joignons, deux à deux, les points de contact des tangentes menées des nœuds; les droites ainsi obtenues rencontrent la courbe en trois couples de points, qui, joints aux points doubles correspondants, déterminent six droites qui touchent une même conique.

Eliminant z entre l'équation de la courbe et

$$B(4 - A^2)x + A(4 - B^2)y + 2(A^2 + B^2 - ABC)z = 0,$$

et divisant le résultat par $4(x^2 + y^2 + Cxy) - (Ax + By)^2$, nous obtenons l'équation de l'un des couples de droites considérées, savoir :

$$B^2(4 - A^2)x^2 + A^2(4 - B^2)y^2 + AB\{ABC + 8 - 2A^2 - 2B^2\}xy = 0;$$

puis aisément les deux autres couples de droites analogues et l'équation de la conique inscrite, savoir :

$$\left(\frac{4}{A^2} - 1\right)x^2 + \left(\frac{4}{B^2} - 1\right)y^2 + \left(\frac{4}{C^2} - 1\right)z^2$$
$$+ \frac{1}{AB}(ABC + 8 - 2A^2 - 2B^2)xy + \frac{1}{BC}(ABC + 8 - 2B^2 - 2C^2)yz$$
$$+ \frac{1}{CA}(ABC + 8 - 2C^2 - 2A^2)zx = 0.$$

V. Si l'on joint, deux à deux, six des points d'intersection d'une conique et d'une quartique, les trois droites coupent la quartique en six points situés aussi sur une conique; ceux-ci à leur tour peuvent servir à en trouver six autres et ainsi de suite indéfiniment.

VI. Au moyen du principe de dualité, on déduit de ce qui précède les propriétés suivantes d'une sextique plane ayant six points de rebroussements et quatre points doubles :

(1) Si de chaque point de contact des tangentes doubles de la sextique, on mène une autre tangente, les six tangentes obtenues touchent une même conique.

(2) Les tangentes à la sextique, menées par les points d'intersection des tangentes doubles touchent une même conique.

(3) Soit O le point d'intersection des tangentes à la courbe menées par les deux points de contact d'une tangente double. Du point O, on pourra mener deux autres tangentes rencontrant la tangente double en A, B. Les six points des tangentes doubles analogues à A, B, sont sur une conique.

(4) Soit P le point d'intersection des tangentes à la courbe aux points d'intersection de la courbe avec une tangente double. Du point P, on

pourra mener deux autres tangentes rencontrant la tangente double en C et D. Les six points analogues à C et D sont sur une conique.

(5) Si un hexagone est circonscrit à la courbe et à une conique, les couples de tangentes, distinctes des côtés de l'hexagone, menées à la sextique, par trois sommets non consécutifs, touchent une conique. Ainsi, les six tangentes analogues aux deux émanant de O, dans le théorème (3), touchent une conique.

VII. Divers théorèmes relatifs à un système de deux coniques peuvent être devinés, mais non prouvés, en regardant ce système comme une quartique trinodale limite acquérant un quatrième nœud. En voici quelques-uns faciles à vérifier :

(1) Les huit points d'intersection des coniques avec les tangentes aux points où ces coniques se coupent, sont sur une conique.

(2) Si l'on joint, deux à deux, ceux de ces huit points qui correspondent à un même point d'intersection des deux coniques, on obtient quatre droites qui rencontrent les deux coniques, en huit points situés sur une autre conique.

(3) Si, par les points de contact des tangentes communes aux deux coniques, on leur en mène huit autres, celles-ci sont tangentes à une troisième conique.

(4) Si des quatre points d'intersection de ces tangentes deux à deux, on mène encore huit tangentes aux deux coniques, celles-ci sont aussi tangentes à une même troisième conique.

19 août 1887.

PROBLÈME DE LA DROITE INACCESSIBLE;

par M. l'abbé E. Gelin, professeur au collège Saint-Quirin à Huy.

1. Pour trouver la distance XY de deux points inaccessibles, on mesure une base quelconque $AB = a$; puis les angles $BAX = \alpha$, $BAY = \alpha'$, $XAY = \alpha''$, $ABX = \beta$, $ABY = \beta'$. Connaissant, dans chacun des triangles ABX, ABY, un côté et les angles, on a

$$AX = \frac{a \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}, \quad AY = \frac{a \sin \beta'}{\sin (\alpha' + \beta')};$$

puis, connaissant, dans le triangle XAY, l'angle XAY et les deux

côtés qui le comprennent, on a, pour calculer XY, la formule

$$\overline{XY}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{AY}^2 - 2AX.AY\cos\alpha'',$$

ou, en fonction explicite des données,

$$XY = a\sqrt{\frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} + \frac{\sin^2\beta'}{\sin^2(\alpha'+\beta')} - \frac{2\sin\beta\sin\beta'\cos\alpha''}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha'+\beta')}}.$$

Si l'on mesure aussi l'angle $XBY = \beta''$, on a encore

$$XY = a\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} + \frac{\sin^2\alpha'}{\sin^2(\alpha'+\beta')} - \frac{2\sin\alpha\sin\alpha'\cos\beta''}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha'+\beta')}}.$$

2. On peut se proposer de trouver la relation qui existe entre les six angles α, α', α'', β, β', β''. On obtiendra cette relation en égalant les deux valeurs de XY, ce qui donne successivement :

$$\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} + \frac{\sin^2\alpha'-\sin^2\beta'}{\sin^2(\alpha'+\beta')} - \frac{2\sin\alpha\sin\alpha'\cos\beta''-2\sin\beta\sin\beta'\cos\alpha''}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha'+\beta')} = 0,$$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{\sin(\alpha'-\beta')}{\sin(\alpha'+\beta')} - \frac{2\sin\alpha\sin\alpha'\cos\beta''-2\sin\beta\sin\beta'\cos\alpha''}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha'+\beta')} = 0,$$

$$\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha'+\beta') + \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha'-\beta') - 2\sin\alpha\sin\alpha'\cos\beta'' + 2\sin\beta\sin\beta'\cos\alpha'' = 0,$$

$$2\sin\alpha\sin\alpha'\cos\beta\cos\beta' - 2\cos\alpha\cos\alpha'\sin\beta\sin\beta' - 2\sin\alpha\sin\alpha'\cos\beta'' + 2\sin\beta\sin\beta'\cos\alpha'' = 0,$$

$$\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\beta\sin\beta'} = \frac{\cos\alpha\cos\alpha' - \cos\alpha''}{\cos\beta\cos\beta' - \cos\beta''},$$

$$\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\beta\sin\beta'} = \frac{\cos\alpha\cos\alpha' \mp \sin\alpha\sin\alpha' - \cos\alpha''}{\cos\beta\cos\beta' \mp \sin\beta\sin\beta' - \cos\beta''},$$

$$\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\beta\sin\beta'} = \frac{\cos(\alpha\pm\alpha') - \cos\alpha''}{\cos(\beta\pm\beta') - \cos\beta''},$$

$$\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\beta\sin\beta'} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha\pm\alpha'+\alpha'')\sin\frac{1}{2}(\alpha\pm\alpha'-\alpha'')}{\sin\frac{1}{2}(\beta\pm\beta'+\beta'')\sin\frac{1}{2}(\beta\pm\beta'-\beta'')}.$$

Telle est l'*équation de condition* à laquelle doivent satisfaire les six angles α, α', α'', β, β', β''(*). Nous l'avons donnée, sans démonstration, dans notre *Trigonométrie* (p. 141).

(*) On peut considérer cette équation comme exprimant la relation qui existe entre les six angles plans de deux angles trièdres d'un tétraèdre, ou de deux trièdres ayant un angle dièdre commun.

NOTE DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

par M. Cl. Thiry.

1. Théorème. Soit D un point quelconque de la base BC d'un triangle ABC, et soient B', C' les points de rencontre de la droite AD avec deux lignes parallèles quelconques BB', CC'. On a la relation

$$BC.AD = AB'.DC + AC'.BD. \qquad (1)$$

En effet, si, pour fixer les idées, D tombe sur BC, B' entre A et D, on a, par les triangles semblables BDB', CDC',

$$\frac{BD}{DC} = \frac{DB'}{CD'} = \frac{AD - AB'}{AC' - AD},$$

ou

$$BD\,(AC' - AD) = DC\,(AD - AB'), \text{ etc.}$$

Corollaire I. Soient B', C' les points de rencontre de AD avec les circonférences décrites de B et C comme centres avec les rayons BD, CD. Les droites BB', CC' étant parallèles, on a la relation (1). En multipliant celle-ci par AD et en remplaçant les produits AD.AB', AD.AC', qui sont les puissances de A par rapport aux deux cercles, par les expressions équivalentes $\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$, $\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$, il vient

$$\overline{AD}^2.\,BC = (\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2)\,DC + (\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2)\,BD, \qquad (2)$$

égalité qui ne diffère pas du théorème de Stewart.

Corollaire II. Si AD est la bissectrice de l'angle BAC, la relation (2) peut être remplacée par celle-ci :

$$\overline{AD}^2(AB + AC) = (\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2)\,AC + (\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2)\,AB.$$

2. L'expression $D^2 - R^2$ de la puissance d'un point par rapport à un cercle peut souvent servir utilement dans les démonstrations des théorèmes de géométrie. En voici des exemples.

I. Du sommet A d'un triangle ABC comme centre, avec la médiane AM comme rayon, décrivons une circonférence; soit N le second point où elle coupe BC. On a

$$BM.BN = \overline{BA}^2 - \overline{AM}^2, \quad CM.CN = \overline{CA}^2 - \overline{AM}^2,$$

d'où, par addition et par soustraction,

$$2\overline{BM}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 - 2\overline{AM}^2, \quad 2BM.MN = BC.MH = \overline{BA}^2 - \overline{CA}^2,$$

H étant le pied de la hauteur.

II. La circonférence décrite de A comme centre avec le rayon AB coupe BC en un second point P, tel que

$$CB.CP = \overline{CA}^2 - \overline{AB}^2.$$

D'où

$$\overline{CA}^2 - \overline{AB}^2 = CB\,(CH - BH) = CB.2MH,$$

$$\overline{CA}^2 - \overline{AB}^2 = CB\,(CB - 2BH).$$

La première égalité a été déjà trouvée ci-dessus; la seconde a ordinairement la forme

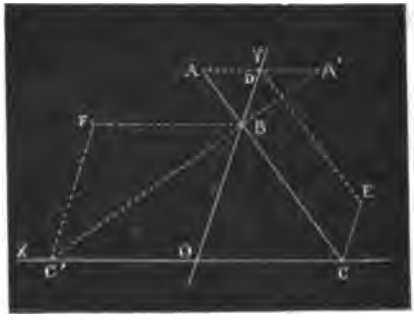
$$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 - 2BC.BH.$$

SUR UN PROBLÈME CLASSIQUE;

par M. G. Russo, à Catanzaro.

Étant donnés un angle XOY *et un point* A, *mener par* A *une sécante telle que le segment* BC *entre les côtés de l'angle ait une longueur donnée l.*

Menons par A une parallèle à OX, limitée en D à la droite OY, puis construisons le parallélogramme DBCE. Lorsqu'on fait tourner la sécante autour de A, les droites DE et CE engendrent deux faisceaux homographiques dont les sommets sont en D et à l'infini sur OY; leur intersection E décrit donc une hyperbole. Pour résoudre le problème proposé on cherche les points de rencontre de cette hyperbole avec la circonférence de cercle décrite de D comme centre avec le rayon l.



Note. Cette solution est très remarquable. En voici une autre que l'on rencontre dans quelques auteurs.

Posant $OC = x$, $OB = y$, et désignant par α, β les coordonnées de A, on a les équations

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos 0 = l^2, \quad \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} = 1;$$

les inconnues x, y sont donc les coordonnées des points d'intersection des lieux représentés par ces équations. Les courbes sont une ellipse et une hyperbole. La première peut être remplacée par une circonférence : il suffit de considérer les points ayant pour coordonnées $(-x, y)$.

Autrement dit, prenons $OC' = OC$, $DA' = DA$, et construisons le parallélogramme OC'FB; le point F qui correspond à la sécante cherchée BC, est à l'intersection d'une circonférence de centre O et de rayon l, avec l'hyperbole, lieu des sommets des parallélogrammes OBFC', dont deux côtés coïncident avec OX, OY et dont une diagonale BC' pivote autour du point fixe A'. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 243.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 118 et t. VIII, p. 148.)

A un certain jeu, le joueur A *gagne un point chaque fois qu'il tire une boule blanche d'une urne qui contient* 3 *boules blanches et* 2 *boules noires; chaque fois qu'il tire une boule noire, il perd tous ses points, et* B *en gagne un;* B *d'ailleurs ne fait jamais de tirage. Quelle est la probabilité pour* A *de faire h points le premier. Cas particulier où $h = 3$.* (B. Peirce.)

La probabilité de A de faire un point est $\frac{3}{5}$. Soit $P(a, b)$ la probabilité de A de gagner la partie, quand il a encore a points à faire et qu'il manque b points à B. On aura

$$P(0, b) = 1, \quad P(a, 0) = 0;$$

ensuite

$$P(a, b) = \tfrac{3}{5} P(a - 1, b) + \tfrac{2}{5} P(h, b - 1).$$

On déduit de là successivement

$$\begin{aligned} P(a, b) - P(h, b - 1) &= \tfrac{3}{5} [P(a - 1, b) - P(h, b - 1)] \\ &= (\tfrac{3}{5})^2 [P(a - 2, b) - P(h, b - 1)] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= (\tfrac{3}{5})^a [P(0, b) - P(h, b - 1)], \end{aligned}$$

c'est-à-dire, puisque $P(0, b) = 1$,

$$P(a, b) = (\tfrac{3}{5})^a + [1 - (\tfrac{3}{5})^a] P(h, b - 1).$$

Faisons dans cette formule $a = h$, et retranchons l'unité des deux membres. Il viendra

$$P(h, b) - 1 = [1 - (\tfrac{3}{5})^h][P(h, b-1) - 1]$$

et, de proche en proche,

$$P(h, b) - 1 = [1 - (\tfrac{3}{5})^h]^b [P(h, 0) - 1] = -[1 - (\tfrac{3}{5})^h]^b.$$

Donc enfin

$$P(h, b) = 1 - [1 - (\tfrac{3}{5})^h]^b, \quad P(h, b-1) = 1 - [1 - (\tfrac{3}{5})^h]^{b-1}.$$

$$P(a, b) = (\tfrac{3}{5})^a + [1 - (\tfrac{3}{5})^a]\{1 - [1 - (\tfrac{3}{5})^h]^{b-1}\} = 1 - [1 - (\tfrac{3}{5})^a][1 - (\tfrac{3}{5})^h]^{b-1}.$$

Au début du jeu, on a $a = b = h$, et

$$P(h, h) = 1 - [1 - (\tfrac{3}{5})^h]^h.$$

Dans le cas particulier où $h = 3$,

$$P(3, 3) = 1 - (\tfrac{98}{125})^3 = 0{,}518109696$$

et le jeu est presque équitable. (*Mathematical Visitor*, t. I, p. 66.)

Autrement. La probabilité que A fasse h points consécutifs est $(\frac{3}{5})^h$, celle que B gagne un point est $1 - (\frac{3}{5})^h$; la probabilité de B de gagner la partie est donc $[1 - (\frac{3}{5})^h]^h$, celle de A, $1 - [1 - (\frac{3}{5})^h]^h$. (P. M.)

Question 566.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 104.)

Une ellipsoïde se déplace parallèlement à lui-même, et son centre décrit une circonférence fixe. Trouver le lieu des courbes de contact des cylindres circonscrits à l'ellipsoïde parallèlement à une direction fixe. (H. Brocard.)

Solution par MM. Stuyvaert et Mosnat. La courbe de contact étant une ellipse dont le centre coïncide avec celui de l'ellipsoïde, la question proposée revient à celle-ci : déterminer la surface engendrée par une ellipse E qui se déplace parallèlement à elle-même et dont le centre décrit une circonférence fixe C; ou encore : déterminer la surface engendrée par une circonférence C qui se déplace parallèlement à elle-même et dont le centre décrit une ellipse fixe E'.

Adoptons la dernière génération, et prenons pour axes ceux de l'ellipse et une perpendiculaire au plan de cette courbe. Les équations de la ligne mobile sont

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = R^2, \quad A(x - \alpha) + B(y - \beta) + G = 0,$$

les coordonnées (α, β) du centre de C vérifiant l'égalité

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1.$$

Il faut éliminer α et β entre ces trois équations. On trouve une équation du quatrième degré.

Question 611.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 104.)

On donne un point O *et une droite* CD *sur laquelle on abaisse de* O *une perpendiculaire* OC. *Une circonférence passant par* O *et touchant* CD *en un point variable* E, *rencontre* OC *au point* A. *Trouver le lieu de la projection* M *de* A *sur* OE *et l'enveloppe de la droite* AM. (MANDART.)

Solution géométrique par MM. JEŘÁBEK, VERNIORY, SERVAIS, CONVERT, H. BROCARD, I. BEYENS, GOUX, BRUYR. 1° Supposons le point A situé entre O et C. Alors, *angle* CEO = CAE = CME; d'où CM = CE. Soit G le point de rencontre de CM avec une parallèle à CD menée par O; de l'égalité CM = CE, on conclut GO = GM. Donc le point M décrit une strophoïde ayant C pour sommet, O pour point double. 2° AM rencontre CD en un point K tel que EC = CK; car *angle* CAE = CEO = OAM = CAK. Si donc on mène KF parallèle à OE et coupant OC en F, on a OC = CF. Il résulte de là que la droite KM enveloppe une parabole ayant F pour foyer et CD pour tangente au sommet.

Solution analytique par MM. PISANI, BEYENS, RUSSO, GOUX, CONVERT, DENYS et EMMERICH. 1° Prenons pour axes CO et CD, et posons CO = a, CE = m, d'où CA = $m^2 : a$. Les équations des droites OE, AM seront

$$ay + mx = am, \quad ax - my = m^2.$$

Éliminons m; il vient

$$y^2 = \frac{x(a-x)^2}{2a-x} = x'^2\frac{a-x'}{a+x'},$$

l'abscisse x' correspondant à l'origine placée en O. Le lieu de M est donc une strophoïde. 2° De l'équation de AM, on déduit immédiatement, pour l'enveloppe de cette droite, $y^2 + 4ax = 0$.

×Question 614.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 128.)

Trouver la relation qui existe entre les angles d'un triangle dont l'orthocentre est situé sur la circonférence inscrite. (DE ROCQUIGNY.)

Solution par M. BEYENS, capitaine du génie, à Cadix. La distance d de l'orthocentre au centre du cercle inscrit est donnée par la formule (Voir CATALAN, *Théorèmes et problèmes*, 6e édition, p. 151) :

$$d^2 = 4R^2 + 2r^2 - \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Or, $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$, et l'on doit avoir

$$d = r = 4R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$$

donc la relation cherchée est

$$2 + 8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = 0.$$

En ayant égard à la formule connue

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C,$$

on peut écrire

$$4\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} = \cos A \cos B \cos C,$$

$$1 - S\cos A + S\cos A \cos B - 3\cos A \cos B \cos C = 0.$$

Solution par MM. VERNIORY *et* FR. FALISSE. L'équation du cercle inscrit, en coordonnées normales, est

$$\sqrt{x}\cos\frac{A}{2} + \sqrt{y}\cos\frac{B}{2} + \sqrt{z}\cos\frac{C}{2} = 0.$$

Exprimant qu'elle est vérifiée par les coordonnées de l'orthocentre, on obtient

$$\sqrt{\frac{1}{\cos A} + 1} + \sqrt{\frac{1}{\cos B} + 1} + \sqrt{\frac{1}{\cos C} + 1} = 0,$$

d'où, successivement,

$$S\left(\frac{1}{\cos^2 A} - 1\right) = 2S\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B \cos C}\right),$$

$$S\,tg^2 A = 2\,\frac{S(\cos A + \cos B \cos C)}{\cos A \cos B \cos C},$$

$$tg^2 A\, tg^2 B\, tg^2 C - \frac{S \sin^2 A}{\cos A \cos B \cos C} = 2\,\frac{S \sin B \sin C}{\cos A \cos B \cos C},$$

$$\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C = \cos A \cos B \cos C . S^2 \sin A,$$

$$4 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} = \cos A \cos B \cos C.$$

×Question 616.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 148.)

Dans le triangle ABC, ***on mène la médiane et la symédiane issues du sommet*** A; ***ces droites rencontrent*** BC ***en*** M, N ***et la circonférence*** ABC ***en*** M', N'. ***Démontrer :*** 1° ***que les droites de Simson des points*** M', N' ***sont perpendiculaires aux droites*** AN', AM'; 2° ***que leurs distances à*** M' ***et*** N' ***sont égales à*** $\frac{S^2}{m^2 n}$, $\frac{S^2}{m^3}$, S ***désignant l'aire*** ABC, ***m et n étant les longueurs*** AM et AN. (J. DÉPREZ.)

Solution par MM. EMMERICH, PISANI ***et*** BEYENS. 1° La première partie de la question résulte de ce que les droites AM, AN sont conjuguées isogonales par rapport à l'angle BAC (***Mathesis***, t. IX, p. 5).

2° Soient α, β, γ, δ les projections de M' sur BC, CA, AB, $\alpha\beta$, et soient λ, λ' les angles MAB, MAC. On trouve facilement

$$M'\delta = M'\gamma \sin M'\gamma\delta = AM' \sin\lambda \sin\lambda'. \qquad (1)$$

Si l'on prolonge AM de $MA_1 = AM$, le triangle ABA_1 donne

$$\frac{\sin\lambda}{b} = \frac{\sin\lambda'}{c} = \frac{\sin A}{2m};$$

et de la similitude des triangles AM'B, ACN, on déduit $bc = AM' . n$. Eliminant $\sin\lambda$, $\sin\lambda'$, AM', on obtient

$$M'\delta = \frac{b^2 c^2 \sin^2 A}{4m^2 n} = \frac{S^2}{m^2 n}.$$

La distance N'δ' du point N à sa droite de Simson se calcule de la même manière.

Remarque. Le milieu de la corde symédiane AN′ étant le foyer de la parabole touchant AB, AC en B, C, et touchant la droite joignant les milieux de AB, AC, la distance N′∂′ est égale à la moitié du paramètre de cette parabole; ce paramètre a été calculé par M. Artzt (*Mathesis*, t. VII, *Propriétés d'un groupe de trois paraboles*, par M. H. Brocard, p. 1).

(Emmerich.)

×Question 625.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 216.)

Soient données les deux progressions arithmétiques

$$1,\quad 1+2^m,\quad 1+2.2^m,\quad 1+3.2^m,\quad \ldots \qquad (A)$$
$$1,\quad 1+2^{m+1},\quad 1+2.2^{m+1},\quad 1+3.2^{m+1},\quad \ldots \qquad (B)$$

On partage les termes de la seconde en groupes de termes consécutifs, tels que le nombre de termes du p^e groupe soit égal au p^e terme de la première progression; soit S_p la somme des termes de ce groupe. Démontrer que S_p est un cube parfait.

Si l'on intervertit les rôles des deux progressions, la somme S'_p des termes du p^e groupe de la première progression est la somme de deux cubes.

(de Rocquigny.)

Solution par MM. François (La Haye), Beyens, A. de Bőzóky (Pesth), Klompers, Verniory *et* Denys. 1° Soient T_p la somme des p premiers termes de la progression (B), T'_p celle des p premiers termes de (A). Le dernier terme de T_p étant égal à $1+(p-1)2^{m+1}$, on trouve aisément

$$T_p = p + p(p-1)2^m. \qquad (1)$$

De même,

$$T'_p = p + p(p-1)2^{m-1}. \qquad (2)$$

Les p premiers groupes de (B) comprennent, évidemment, T'_p termes; la somme de ces termes est donc égale au deuxième membre de (1) où l'on remplace p par T'_p, et l'on a

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_p = T'_p + T'_p(T'_p - 1)2^m. \qquad (3)$$

Remplaçant p par $p-1$, on obtient

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_{p-1} = T'_{p-1} + T'_{p-1}(T'_{p-1} - 1)2^m. \qquad (4)$$

De (3) et (4), on déduit, par soustraction,

$$S_p = (T'_p - T'_{p-1})[1 + (T'_p + T'_{p-1} - 1)2^m].$$

Or

$$T'_p - T'_{p-1} = 1 + (p-1)\,2^m,$$
$$1 + (T'_p + T'_{p-1} - 1)\,2^m = 1 + 2(p-1)\,2^m + (p-1)^2 . 2^{2m};$$

d'où

$$S_p = [1 + (p-1)\,2^m]^3.$$

2° Un calcul analogue donne

$$S'_p = (T_p - T_{p-1})[1 + (T_p + T_{p-1} - 1)\,2^{m-1}],$$
$$T_p - T_{p-1} = 1 + (p-1)2^{m+1},$$
$$1 + (T_p + T_{p-1} - 1)\,2^{m-1} = 1 + (p-1)\,2^m + (p-1)^2\,2^{2m},$$

d'où l'on tire

$$S'_p = [1 + (p-1)\,2^m]^3 + [(p-1)\,2^m]^3.$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

386. Deux circonférences, de rayons R et R', se coupent aux points A, B et sont rencontrées par une sécante quelconque aux points (P, Q), (S, T). Démontrer les relations

$$\frac{AP.BP.AQ.BQ}{R^2} = \frac{AS.BS.AT.BT}{R'^2},$$

$$\frac{AP.BP.AS.BS}{\overline{PS}^2} = \frac{AQ.BQ.AT.BT}{\overline{QT}^2}.$$

(Lachlan, *Ed. Times.*)

387. Par les sommets d'un triangle ABC, on mène trois droites arbitraires AD, BE, CF, rencontrant les côtés opposés en D, E, F. Soient α le point de rencontre de AD et BE, β celui de BE et CF, γ celui de CF et AD. Démontrer la relation

$$\frac{\alpha E}{\beta E} \cdot \frac{\beta F}{\gamma F} \cdot \frac{\gamma D}{\alpha D} = \left(\frac{AE}{CE}\right)^2 \left(\frac{BF}{AF}\right)^2 \left(\frac{CD}{BD}\right)^2 = \left(\frac{A\alpha}{A\gamma}\right)^2 \left(\frac{B\beta}{B\alpha}\right)^2 \left(\frac{C\gamma}{C\beta}\right)^2.$$

(de Rocquigny.)

388. Un angle AOB, de grandeur constante, tourne autour de son sommet. Par un point fixe C, on mène une sécante rencontrant les côtés de l'angle en A et B. Trouver les lieux géométriques des points A et B, lorsque 1° le rapport CA : CB est constant; 2° le produit CA . CB est constant (Circonférences).

389. Un cercle O et deux droites d, d' étant donnés dans un même plan, construire une droite x parallèle à une droite donnée e et rencontrant la circonférence en deux points A et A', les droites d et d' en deux points B et B' tels que AB = A'B'.

Le milieu de AA' est à l'intersection d'une perpendiculaire par O à e avec la médiane du triangle $dd'e$. Le point B' est à l'intersection de d' avec la symétrique de d par rapport à la perpendiculaire abaissée de O sur e.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**644**. La perpendiculaire élevée au milieu du côté BC d'un triangle rencontre les deux autres côtés AB, AC en des points B' et C' tels, que les segments BB' et CC' sont vus de tout point de la circonférence ABC sous des angles égaux ou supplémentaires.

Autrement dit, si B', C' sont deux points divisant un diamètre d'une circonférence en parties harmoniques, et si BC est une corde quelconque perpendiculaire à ce diamètre, les droites BB', CC' sont vues de tout point de la circonférence sous des angles égaux ou supplémentaires. (STAMMER.)

×**645**. Soient I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle ABC, et soient T, T_a, T_b, T_c les points de concours des droites joignant A, B, C aux points de contact des côtés opposés avec l'un de ces cercles.

Démontrer que les droites IT, I_aT_a, I_bT_b, I_cT_c concourent en un même point T, et trouver les coordonnées de ce point. (E. LEMOINE.)

×**646**. Neuf nombres entiers consécutifs sont disposés en carré de la manière suivante :

$$\begin{vmatrix} n-4 & n+2 & n-2 \\ n-1 & n & n+4 \\ n+3 & n-3 & n+1 \end{vmatrix}.$$

Le centre est occupé par le nombre du milieu; les autres nombres se succèdent, d'après la loi du cavalier, dans l'ordre de grandeur croissante.

Choisir n de manière que la valeur de ce *déterminant du cavalier* soit un carré parfait. (DE ROCQUIGNY.)

Rectification. Page 73, dernière ligne, lire *quatre* au lieu de *huit*; page 74, ligne 1, *deux* au lieu de *quatre*; ligne 2, *quatre* au lieu de *huit*.

SUR UN CERTAIN CERCLE ANALOGUE AU CERCLE DE COURBURE;

par M. Cl. Servais, répétiteur à l'Université de Gand.

Théorème. *La limite du cercle circonscrit à un triangle circonscrit à une courbe, lorsque deux des points de contact se rapprochent indéfiniment du troisième* M, *est un cercle tangent à la courbe au point* M *et dont le rayon est le quart du rayon de courbure de la courbe en ce point.*

Ce théorème est vrai pour la parabole. En effet, si une parabole est inscrite à un triangle, le cercle circonscrit à ce triangle passe par le foyer. Donc, à la limite, ce cercle devient un cercle tangent en un point de la parabole et passant par le foyer. Soient D et N les points où la normale au point M rencontre la directrice et le cercle limite, on voit aisément que l'on a DM = MN, donc le rayon du cercle limite est le quart du rayon de courbure.

Cela étant, en un point M d'une courbe quelconque, imaginons une parabole ayant, en ce point, avec la courbe $y = \mathrm{F}t$, $x = ft$, un contact du troisième ordre. Les tangentes à la courbe $y = \mathrm{F}t$, $x = ft$, aux points t, t_1, t_2 contiennent les expressions

$$(\mathrm{F}t, ft, \mathrm{F}'t, f't), \quad (\mathrm{F}t_1, ft_1, \mathrm{F}'t_1, f't_1), \quad (\mathrm{F}t_2, ft_2, \mathrm{F}'t_2, f't_2).$$

Si l'équation de la première tangente est $\varphi t = 0$, celle de la seconde sera $\varphi t_1 = 0$, celle de la troisième $\varphi t_2 = 0$. Ces trois équations pourront être remplacées par

$$\varphi t = 0, \quad \varphi' t_3 = 0, \quad \varphi'' t_4 = 0,$$

où t_3 est intermédiaire entre t et t_1, t_4 entre t et t_1, ou entre t et t_2, et qui contiendront les expressions

$$\mathrm{F}t, \mathrm{F}'t, \mathrm{F}'t_3, \mathrm{F}''t_3, \mathrm{F}''t_4, \mathrm{F}'''t_4; \quad ft, f't, f't_3, f''t_3, f''t_4, f'''t_4.$$

Les coordonnées du centre et du rayon du cercle circonscrit s'exprimeront en fonction des mêmes quantités; donc, à la limite, quand t_1, t_2, t_3, t_4 tendent vers t, celui-ci ne dépendra que de $\mathrm{F}t$, $\mathrm{F}'t$, $\mathrm{F}''t$, $\mathrm{F}'''t$, ft, $f't$, $f''t$, $f'''t$ et sera le même, par conséquent, pour la parabole osculatrice(*).

(*) On peut résumer cette démonstration sous la forme suivante : La parabole et la courbe ayant avec elle trois tangentes infiniment voisines communes ont même cercle limite ; donc, etc. Il importe d'observer que si l'on recourt à ce langage conventionnel des infiniment petits (nuls), il faut toujours pouvoir le retraduire dans la langue plus précise de la méthode des indéfiniment petits.

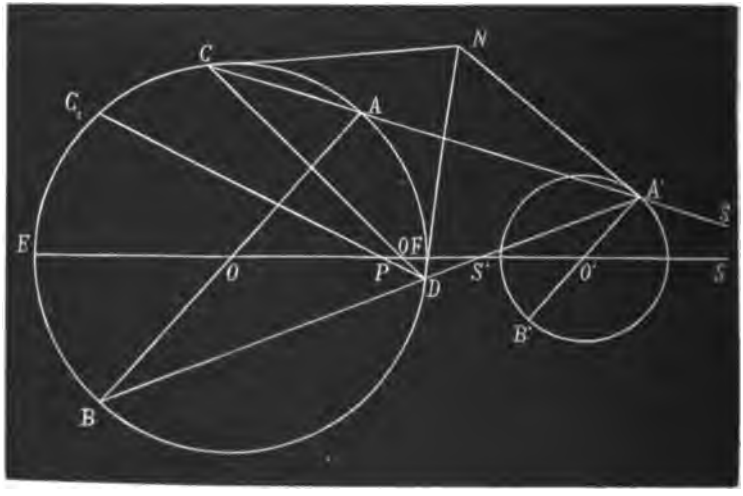
Note. Il y a quelque intérêt à chercher les limites d'autres éléments remarquables du triangle de trois tangentes consécutives. Par exemple, la limite de l'orthocentre s'obtient en prolongeant la normale vers l'extérieur d'une quantité égale à la moitié du rayon de courbure; en effet, cette limite, dans le cas d'une parabole, est le point désigné ci-dessus par D. De même, la limite du cercle des neuf points a son rayon égal au huitième du rayon de courbure. (J. N.)

SUR LES CENTRES DE SIMILITUDE DE DEUX CERCLES;

par M. E. Vigarié, élève-ingénieur.

1. Étant donnés deux cercles O, O', ayant S, S' pour centres de similitude, si l'on mène deux diamètres parallèles AB, A'B', on sait que les droites AA' et BB' concourent en S; les droites AB' et BA', en S'.

Réciproquement, *étant donnés un cercle* O *et deux points fixes* S, S' *sur un même diamètre, si l'on mène un diamètre quelconque* AB, *les*



droites SA *et* S'B, SB *et* S'A *se coupent en deux points* A', B' *qui décrivent une même circonférence* O'.

2. La droite SA rencontre la circonférence O en un second point C, l'*antihomologue* de A'; les tangentes menées en C et A' respectivement aux cercles O et O' se coupent en un point N de l'axe radical LL'. De

même, si D est le second point d'intersection de la circonférence O avec la droite S'B, les tangentes aux points antihomologues D et A' se rencontrent au même point N de l'axe radical, et la polaire CD du point N par rapport au cercle O passe par un point fixe Q de la ligne des centres, pôle de l'axe radical.

Autrement dit, *étant donnés un cercle* O *et deux points fixes* S, S' *sur un même diamètre, si l'on mène un diamètre quelconque* AB, *les droites* SA *et* S'B *rencontrent la circonférence en deux nouveaux points* C, D : *Les tangentes en* C *et* D *se coupent sur une droite fixe* LL' *perpendiculaire à* SS', *et la droite* CD *passe par un point fixe* Q *de* SS'.

3. Proposons-nous de déterminer la position du point Q par rapport au cercle O et aux points S, S'.

Le triangle S'A'S, coupé par les transversales AB et CD, donne

$$\frac{AA'}{AS}\frac{BS'}{BA'}\frac{OS}{OS'} = 1, \qquad \frac{CA'}{CS}\frac{DS'}{DA'}\frac{QS}{QS'} = 1.$$

En multipliant ces égalités membre à membre, et observant que $A'A.A'C = A'B.A'D$, on trouve

$$\frac{QS'}{QS} = \frac{OS}{OS'}\cdot\frac{P'}{P},$$

où P et P' sont les puissances de S et S' par rapport au cercle O.

Soient E, F les extrémités du diamètre SS' du cercle O; cherchons le rapport QE : QF. Les faisceaux (A, EFBC), (D, EFBC) ont même rapport anharmonique; donc, en les coupant par la transversale SS', on obtient(*)

$$\frac{OE}{OF}:\frac{SE}{SF} = \frac{S'E}{S'F}:\frac{QE}{QF}, \quad \text{ou} \quad \frac{QE}{QF} = -\frac{ES.ES'}{FS.FS'}.$$

4. Dans les propositions précédentes, transportons le point S à l'infini sur la droite OS', ce qui revient à prendre deux cercles égaux O, O'; nous aurons les propriétés suivantes :

Étant donnés un cercle O *et un point* S', *si l'on mène un diamètre quelconque* AB : 1° *la droite* S'B *et une parallèle tracée par* A *à* OS' *se rencontrent en un point* A_1, *qui décrit une circonférence symétrique de la circonférence*

(*) L'égalité (EFOS) = (EFS'Q), mise sous la forme (FESO) = (EFS'Q) montre que les trois couples de points (E, F), (S,S'), (O,Q) sont en involution. Donc à un point donné Q correspondent une infinité de couples S, S'. (J. N.)

O *par rapport à* S′; 2° *les droites* AA'_1, BS′ *rencontrent la circonférence* O *en deux nouveaux points* C_1, D_1, *tels que la droite* C_1D_1 *pivote autour d'un point fixe* P *du diamètre* OS′; 3° *les tangentes en* C_1 *et* D_1 *se coupent sur la perpendiculaire élevée en* S′ *sur* OS′.

Le point P est, évidemment, l'inverse de S′ par rapport au cercle O. Les points P et S′ peuvent donc échanger leurs rôles; par conséquent, *la droite* $S'C_1$ *rencontre la circonférence* O *en un second point qui est en ligne droite avec* B *et* P.

5. Un autre cas particulier des propositions 1° et 2° correspond à l'hypothèse où le cercle O′ se réduit à son centre; alors S et S′ se confondent avec ce centre, et l'on peut énoncer le théorème suivant : *Étant donnés un cercle* O *et un point* S, *si l'on mène un diamètre quelconque* AB, *les droites* SA *et* SB *rencontrent la circonférence en deux nouveaux points* C, D, *tels que la corde* CD *pivote autour d'un point fixe* Q *de la droite* OS. *Les tangentes en* C *et* D *se rencontrent en un point* N *de l'axe radical du cercle* O *et du point* S.

La dernière propriété peut servir à déterminer la position de Q. Car, si S est extérieur au cercle O et que P désigne l'inverse de S par rapport au cercle, l'axe radical passe aux milieux des tangentes issues de S, et, par suite, au milieu R de la droite PS; Q est l'inverse de R. N étant sur l'axe radical, on a $NC = ND = NS = NP$; donc les points C, D, P, S sont concycliques. De là une construction facile des points P, S quand on donne le point Q : on mène par Q une corde quelconque CD; les tangentes en C et D se rencontrent en un point N, qu'on prend pour centre d'une circonférence passant par C et D; cette ligne coupe OQ aux points cherchés P, S.

Pour terminer, signalons les relations suivantes (voir n° 3) :

$$\frac{\overline{QE}}{\overline{QF}} = -\frac{\overline{ES}^2}{\overline{FS}^2},$$

$$OQ = \frac{r^2}{\overline{OR}} = \frac{r^2}{\frac{1}{2}\left(OS + \frac{r^2}{\overline{OS}}\right)}, \quad \text{ou} \quad \frac{r}{\overline{OQ}} = \frac{1}{2}\left(\frac{OS}{r} + \frac{r}{\overline{OS}}\right),$$

r désignant le rayon du cercle O.

NOTE. L'intéressant article de M. Vigarié suggère plusieurs questions analogues, parmi lesquelles nous ne signalons que la suivante :

Étant donnés un cercle O *et deux points fixes*, O_1, S, *on mène par* O, *une sécante*

quelconque rencontrant la circonférence en A *et* B; *les droites* SA, SB *rencontrent la circonférence en deux nouveaux points* C, D, *tels que la corde* CD *pivote autour d'un point fixe* Q *de la droite* O_1S.

La démonstration élémentaire résulte de ce que la circonférence SAB passe par un point T de O_1S, tel que $O_1T.\ O_1S = O_1A.\ O_1B$, et a pour inverse par rapport au point S la droite CD, pourvu que la puissance d'inversion soit égale à SC. SA.

Lorsqu'on joint A et B à deux points différents S, S', les droites SA, S'B rencontrent la circonférence O en deux points C, D, qui se correspondent projectivement; donc la corde CD enveloppe une conique. (J. N.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

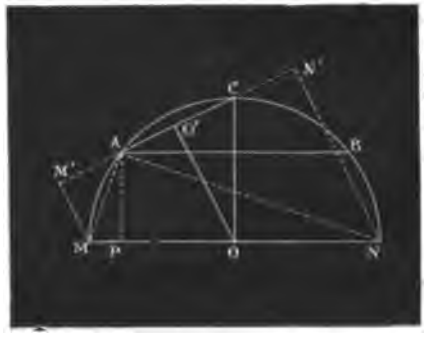
×**3.** ***Sur un problème du quatrième Livre de la Géométrie*** (par M. Edm. Francken). Ce problème est le suivant : ***Connaissant le rayon r d'un cercle*** O ***et le côté*** $AB = a$ ***d'un polygone régulier inscrit de n côtés, trouver la valeur du côté*** $AC = x$ ***d'un polygone régulier de 2n côtés.*** La plupart des auteurs démontrent géométriquement la formule

$$x = \sqrt{2r\left[r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}\right]},$$

et en déduisent algébriquement cette autre

$$x = \sqrt{r\left(r + \tfrac{1}{2}a\right)} - \sqrt{r\left(r - \tfrac{1}{2}a\right)}. \qquad (1)$$

Voici une démonstration purement géométrique de l'égalité (1). Comme je ne l'ai rencontrée dans aucun des traités que j'ai eu l'occasion de consulter, elle pourra intéresser les lecteurs de ***Mathesis.***



Menons le diamètre MN parallèle à AB, et abaissons sur la corde AC les perpendiculaires MM', OO', NN'. On voit immédiatement que $AM' = CN'$; par suite,

$$x = AN' - CN' = AN' - AM'. \qquad (2)$$

L'angle CAN a pour mesure la moitié du quadrant CBN; il en

résulte que les triangles N'AN, M'AM sont rectangles isoscèles. Donc, en menant AP perpendiculaire à MN, on a

$$AN' = \frac{AN}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{NM.NP}{2}} = \sqrt{r\left(r+\frac{a}{2}\right)},$$

$$AM' = \frac{AM}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{MN.MP}{2}} = \sqrt{r\left(r-\frac{a}{2}\right)}.$$

En substituant ces valeurs dans l'égalité (2), on trouve la formule (1).

×4. *Sur la question* 528 (*Mathesis*, t. VII, p. 73). Il faut modifier comme il suit les remarques sur les diviseurs des nombres de la forme $10^n \pm 1$. La somme des mêmes puissances impaires de deux quantités étant toujours divisible par la somme de ces quantités, les nombres de la forme $10^{2k+1} + 1$ sont tous divisibles par $10 + 1 = 11$; ceux de la forme $10^{3(2k+1)} + 1$ sont divisibles par $10^3 + 1 = 7.11.13$, ainsi que par $10^{2k+1} + 1$; ceux de la forme $10^{5(2k+1)} + 1$ sont divisibles par $10^5 + 1 = 101$. Enfin, la différence des mêmes puissances de deux quantités étant toujours divisible par la différence de ces quantités, les nombres de la forme $10^{3(2k+1)} - 1$ sont tous divisibles par $10^3 - 1 = 3^3.37$, ainsi que par $10^{2k+1} - 1$; etc. (E. Gelin.)

×5. *Sur le problème des joueurs*(*) (*Mathesis*, t. VI, p. 144, Question d'examen 273). Les problèmes de ce genre ne paraissent guère admissibles pour les raisons suivantes : D'abord, le gain possible de chaque joueur ne dépend que de sa mise, et la perte possible ne dépend que des mises des autres joueurs. Il y a plus : pour que le jeu soit possible, il faut, à chaque partie, que le joueur perdant ait une mise supérieure à la somme de toutes les autres mises; l'interprétation des résultats négatifs n'est guère possible dans cette question. (E. Gelin.)

6. *Sur les Wronskiens* (Extrait d'une lettre de M. G. Peano). La note ajoutée à la fin de mon petit article sur les Wronskiens (*Mathesis*, p. 75-76) si elle contribue à la clarté, n'ajoute rien à la rigueur de la proposition contestée; et je dois revenir sur ce sujet.

(*) Voici le problème dont il s'agit : n personnes jouent à la condition que le perdant double l'argent de chacun des autres. Après que chacune des personnes a perdu une partie, il se trouve que les joueurs ont respectivement les sommes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. On demande ce qu'ils avaient en entrant au jeu.

I. La proposition que je conteste est la suivante : *Si le déterminant formé avec n fonctions $x_1, \ldots, x_n$ d'une même variable t, et leurs dérivées des ordres* $1, \ldots, (n-1)$ *est nul pour toutes les valeurs de t, il y a entre ces fonctions une relation linéaire homogène à coefficients constants;* autrement dit, *on peut déterminer n constantes,* $C_1, \ldots, C_n$, *non toutes nulles à la fois, telles que* $C_1x_1 + \cdots + C_nx_n = 0$ *pour toutes les valeurs de t.*

Si une des fonctions, par exemple x_1, est identiquement nulle, ces fonctions sont liées par la relation linéaire $x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$. Donc la conclusion de la proposition en question n'est point modifiée si l'on ajoute les mots : *ou bien l'une des fonctions est identiquement nulle.*

Cette proposition peut encore s'énoncer ainsi : *Si le Wronskien des fonctions $x_1, \ldots, x_n$ est identiquement nul, le déterminant formé avec les valeurs des fonctions, lorsque l'on donne à la variable n valeurs quelconques, est également nul.*

Un cas particulier du théorème général est le suivant : *Si le déterminant formé avec les dérivées des ordres* 1, 2, 3 *des fonctions x, y, z d'une même variable t est identiquement nul, la courbe décrite par le point de coordonnées x, y, z est plane.*

II. Pour démontrer que ces propositions ne sont pas toujours vraies, j'ai indiqué dans ma note précédente, un exemple, où je ne considère que deux fonctions x et y de la variable t; le déterminant $xy' - x'y$ est identiquement nul; mais entre elles n'existe aucune relation linéaire. Ni l'une ni l'autre des deux fonctions n'est identiquement nulle, car x est > 0 si $t > 0$, et y est > 0 si $t < 0$.

Mais ces deux fonctions présentent cette particuliarité que, pour toutes les valeurs de t, l'une ou l'autre est nulle. Pour faire disparaître cette particularité, posons

$$X = t^2, \quad Y = t \bmod t.$$

Ces deux fonctions de t satisfont à la condition $XY' - X'Y = 0$; elles s'annulent seulement pour $t = 0$, et entre elles n'existe pas de relation linéaire homogène. La somme et la différence de ces fonctions sont les fonctions de mon premier exemple; le point de coordonnées (X, Y) décrit maintenant les deux demi-bissectrices des axes.

III. Les démonstrations qu'on donne de la proposition (la vôtre comprise) permettent seulement de prouver qu'elle est vraie si l'un des déterminants mineurs de la dernière ligne est toujours nul, ou s'il n'est jamais nul.

Pour les déterminants du deuxième ordre, on peut démontrer la proposition, sauf dans le cas où, pour quelque valeur de la variable indépendante, les deux fonctions données et leurs dérivées s'annulent en même temps.

Il serait intéressant de chercher tous les cas dans lesquels la proposition subsiste.

J'ai cru devoir publier cette petite note sur les Wronskiens, car je n'ai jamais vu la proposition bien énoncée (Voir HERMITE, *Cours d'Analyse*, p. 133; JORDAN, *Cours d'Analyse*, III, p. 150; LAURENT, *Traité d'Analyse*, I, p. 183).

×L'ARC DE GRAND CERCLE EST LE PLUS COURT CHEMIN D'UN POINT A UN AUTRE SUR LA SPHÈRE.

Le théorème dont nous venons de transcrire l'énoncé est l'un de ceux dont la démonstration laisse le plus à désirer dans la plupart des ouvrages de géométrie élémentaire(*).

Nous nous proposons, dans le présent article, de résumer les principales démonstrations qu'on en a données en énonçant explicitement les postulats sur lesquels elles s'appuient. Nous indiquerons, dans un autre article, comment on peut établir, d'une manière simple et rigoureuse, une proposition élémentaire qui en est très voisine.

I. LEGENDRE, BLANCHET et un grand nombre d'auteurs qui ont amélioré la démonstration de Legendre, procèdent à peu près de la manière suivante :

1. Soit AMB l'arc du grand cercle qui joint les points A et B de la sphère, AMB étant inférieur à une demi-circonférence.

2. Si AMB n'est pas le plus court chemin entre A et B, il existera une autre courbe ACDNEFB, qui sera ce plus court chemin.

3. Menons les arcs de grands cercles AN, NB. Prenons, sur AMB, l'arc de grand cercle AM, égal à l'arc de grand cercle AN. Alors l'arc de grand cercle MB sera inférieur à l'arc de grand cercle NB(**).

(*) Au fond, on n'en a nullement besoin dans les *Éléments*. Aussi d'excellents auteurs n'en parlent pas dans leurs manuels de Géométrie (par exemple, BALTZER, BRIOSCHI et BETTI, dans leur *Euclide* italien, FAIFOFER, etc.)

(**) Nous supprimons ici et, dans la suite, les démonstrations que le lecteur peut aisément rétablir, ou que l'on trouve dans des manuels très répandus.

4. Le plus court chemin de A en N est ACDN; il sera égal au plus court chemin de A en M; le plus court chemin de N en B est NEFB et sera supérieur au plus court chemin de M en B.

5 Donc le plus court chemin ACDNEFB de A en B serait supérieur au plus court chemin de A en M, plus le plus court chemin de M en B; ce qui est absurde(*).

Ce raisonnement de Legendre serait irréprochable, si l'on pouvait démontrer l'assertion du n° 2. Mais cette assertion suppose qu'entre toutes les courbes qu'il est possible de tracer entre A et B, il y en a réellement une plus courte que toutes les autres.

Ce postulat, admis sans preuve aucune, suffit pour infirmer la démonstration. Il n'est pas certain, en effet, que parmi toutes les grandeurs d'une certaine espèce, bien déterminées, il y en ait toujours une plus petite que toutes les autres. Ainsi, par exemple, entre toutes les aires comprises entre un carré fixe et un carré inscrit variable, il n'y en a aucune qui soit minima. Parmi tous les polygones réguliers de 2^n côtés circonscrits à un cercle, il n'y en aucun qui soit plus petit que tous les autres. Si $E(x)$ désigne le plus grand entier contenu dans x, supposé positif ou nul, $x - E(x)$ est nul pour x entier, inférieur à l'unité, si x n'est pas entier; par suite, $y = 1 - x + E(x)$ est une expression qui oscille de 1 inclusivement à 0 exclusivement, mais qui n'a pas de minimum.

Il y a donc des grandeurs qui n'ont pas de valeur plus petite que toutes les autres. Par suite, à priori, on ne sait pas s'il existe un plus court chemin sur la sphère, et la démonstration de Legendre est insuffisante.

II. Voici un autre essai de démonstration, par M. J. Delaunay, que nous trouvons dans les N. A. M. (2), VI, 1867, pp. 454-455.

1. Soit un arc de grand cercle AMB inférieur à une demi-circonférence et une autre courbe quelconque ayant mêmes extrémités A et B. Subdivisons la droite AB en n parties égales ou inégales, indéfiniment décroissantes Ak, kk, ..., lB.

(*) Voici une variante de ce raisonnement : nous l'empruntons à un article de M. Jarrige, dans les N. A. M. (2), V, 1866, pp. 72-73. Les cercles de centres A, B, de rayons AM, BM coupent ACDNEFB en D et E, par exemple; le plus court chemin de A en M égale ACD, celui de M en B égale EFB; donc ACDNEFB surpasse de DNE, le plus court chemin de A en M, plus le plus court chemin de M en B.

2. L'arc de grand cercle AMB pourra être regardé comme la limite d'un polygone inscrit AHK ... LB, dont les côtés AH, HK, ..., LB ont respectivement pour projections A*h*, *hk*, ..., *l*B sur la corde AB.

3. La courbe ANB peut aussi être regardée comme la limite d'un polygone inscrit AH'K' ... L'B dont les côtés AH', H'K', ..., L'B ont aussi pour projections A*h*, *hk*, ..., *l*B sur AB.

4. Il est facile de voir que l'on a

$$AH < AH', \quad HK < H'K', \quad \ldots, \quad LB < L'B,$$

et, par suite,

$$\text{polygone AHK} \ldots \text{LB} < \text{polygone AH'K'} \ldots \text{L'B}. \tag{1}$$

5. Donc, en passant à la limite,

$$\text{arc AMB} < \text{arc ANB}. \tag{2}$$

Cette démonstration contient, au n° 5, une vraie erreur de raisonnement. On ne peut pas déduire l'inégalité (2) de l'inégalité (1). Quand on a, entre deux quantités variables X et Y, une inégalité

$$X < Y,$$

on doit en conclure, non pas seulement

$$\lim X < \lim Y,$$

mais

$$\lim X < \lim Y \quad \textit{ou} \quad \lim X = \lim Y.$$

Ainsi, par exemple, si

$$X = 1 - \frac{2}{n}, \quad Y = 1 - \frac{1}{n}$$

on a toujours, pour n positif, $X < Y$; or, pour n croissant indéfiniment, on n'a pas $\lim X < \lim Y$, mais $\lim X = \lim Y = 1$. Le polygone régulier de 3.2^n côtés inscrit dans un cercle est inférieur à celui de 4.2^n côtés; cependant ils ont même limite.

III. Houel a donné, dans les N. A. M., 1868, VII, pp. 73-78, une démonstration qu'on peut rendre irréprochable. La voici en substance :

1. Inscrivons dans la courbe ANB un polygone quelconque A*hk* . . *l*B, dont le nombre des sommets augmente indéfiniment, par ***insertion continuelle de nouveaux sommets situés sur la courbe entre les premiers.***

2. A cause du mode d'insertion des sommets, le périmètre du polygone A*hk* ... *l*B est sans cesse croissant.

3. Il a pour limite la longueur de la ligne ANB.

4. Menons les arcs de grand cercle ayant pour cordes Ak, kk, ... lB. A cause du mode d'insertion des sommets du polygone Akk...lB, la somme S des arcs de grand cercle Ak, kk, ..., lB est toujours croissante.

5. Elle a aussi pour limite la longueur de la ligne ANB.

6. On a évidemment AMB $<$ S.

7. On déduit de là, en passant à la limite, puisque S croît sans cesse et a pour limite ANB,

$$\text{AMB} < \text{ANB}.$$

Il importe d'observer que la démonstration suppose essentiellement que S est une grandeur croissante; c'est pourquoi, au n° 1, on est forcé de supposer un mode spécial d'insertion des nouveaux sommets du polygone variable Akk ... lB. Si l'on ne prend pas cette précaution, une fois arrivé à la relation du n° 6, AMB $<$ S, on ne peut en déduire légitimement la relation 7, mais seulement AMB $<$ ANB, *ou* AMB $=$ ANB, pour la raison que nous avons exposée à propos de la seconde démonstration.

IV. Dans les diverses démonstrations que nous venons d'esquisser, on suppose implicitement connue la définition précise de la longueur d'une ligne courbe. Or cette définition repose sur un théorème vraiment difficile à démontrer(*), savoir : « Les périmètres de tous les polygones variables, à côtés indéfiniment décroissants, inscrits dans une courbe continue, tendent vers une même limite, appelée, *par définition*, la longueur de la courbe ».

Il en résulte qu'au fond, aucune des démonstrations précédentes, même la dernière qui est la seule rigoureuse, n'est vraiment élémentaire. De plus, il ne semble pas qu'on puisse jamais en trouver une plus simple, puisque la proposition à démontrer étant relative à la longueur d'une courbe tracée sur la sphère, on sera toujours forcé de définir préalablement cette quantité géométrique.

Mais, sans aller jusqu'à établir dans les *Éléments*, d'une manière complète, cette proposition que *l'arc de grand cercle est le plus court chemin*

(*) Voir, par exemple, sur ce point, la *Note* qui termine le *Cours d'Analyse* de M. Jordan, n° 46, ou l'article de M. Goedseels, B. B. 1888, (3), XVI, pp. 86-92, publié en supplément dans *Mathesis*, en 1888, et le commentaire dont nous l'avons accompagné (Ib., pp. 262-264)

d'un point à un autre sur la sphère, on peut au moins démontrer la proposition suivante qui en est très voisine :

On peut inscrire, d'une infinité de manières, dans une courbe quelconque tracée sur la sphère, un polygone dont le périmètre surpasse l'arc de grand cercle qui joint les extrémités de la courbe.

C'est ce que nous montrerons dans un prochain article, en refaisant, à ce point de vue, la démonstration de Houel. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

×Question 196.

(Voir *Mathesis*, t. II, p. 231 et t. VIII, p. 148.)

Si a et b sont deux nombres entiers donnés, premiers entre eux, et n un nombre entier variable, la probabilité que le nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation

$$ax + by = n \qquad (1)$$

est égal à $\mathrm{E}\left(\frac{n}{ab}\right)$, *est représentée par*

$$P_0 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right);$$

celle que le nombre de ces solutions est $\mathrm{E}\left(\frac{ab}{n}\right)+1$, *s'exprime par*

$$P_1 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{ab}. \qquad \text{(E. Cesáro.)}$$

M. Cesáro a publié une démonstration de ce théorème dans son mémoire « *Sur diverses questions d'Arithmétique*(**). » En voici une autre, quelque peu différente de celle de l'ingénieux analyste italien.

(*) Nous avons oublié de mentionner, dans la livraison d'avril, de bonnes solutions de la question 611, par MM. Falisse et Lalisse.

(**) Ce mémoire a paru dans le t. XII, 2e série, des publications de la Société Royale des Sciences de Liége. — Voir pp. 273 et suivantes l'article « *Sur l'équation* $ax + by = n$ (Extraits d'une lettre à M. Hermite). »

Soient p et r le quotient et le reste de la division de n par b, q et r' ceux de la division de p par a; nous aurons

$$n = pb + r, \quad p = qa + r', \quad n = abq + (r'b + r).$$

Le quotient de la division de n par le produit ab sera q, et le reste sera $R = r'b + r$.

Pour avoir les solutions non négatives de (1), remplaçons dans la formule

$$x = \frac{n - by}{a},$$

y par les nombres $0, 1, 2, \ldots, p$; $n - by$ prend les valeurs

$$n, \quad n - b, \quad n - 2b, \ldots, \quad n - pb = r, \tag{2}$$

et l'équation proposée a autant de solutions non négatives que la suite (2) renferme de multiples de a. Dans la progression arithmétique (2), la raison est première avec le diviseur a; donc a termes consécutifs comprennent toujours un multiple de a et un seul. Séparons de la suite (2) les aq premiers termes; il restera les termes

$$r, \quad r + b, \quad r + 2b, \quad \ldots, \quad r + r'b = R. \tag{3}$$

Si dans ceux-ci, il se trouve encore un multiple de a, le nombre des solutions non négatives de (1) est égal à $q + 1$; dans le cas contraire, il est égal à q.

Faisons maintenant passer n par tous les nombres entiers compris entre abq et $ab(q + 1)$ (inclusivement). Une même valeur de r entre dans a suites de la forme (3), qui sont

$$\begin{array}{l} r, \\ r, \quad r + b, \\ r, \quad r + b, \quad r + 2b, \\ \cdots\cdots\cdots \\ r, \quad r + b, \quad r + 2b, \quad \ldots, \quad r + (a - 1)b. \end{array} \tag{4}$$

La dernière ligne renferme un multiple de a, et un seul; soit $r + mb = \mu$ ce nombre. Le tableau (4) comprend m lignes ne renfermant pas μ; mais un autre multiple de a a la forme

$$\mu' = ab - (r + mb) = b(a - m - 1) + (b - r),$$

et le tableau analogue au précédent et relatif au nombre $b - r$ renferme $a - m - 1$ lignes dont aucun terme n'est divisible par a. Ces deux tableaux réunis correspondent donc à $m + (a - m - 1) = a - 1$ valeurs de n

donnant q solutions, non négatives, de l'équation (1). Si l'on répète ce raisonnement pour les valeurs.

$$r = 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad b-1,$$

on voit que parmi les ab valeurs de n comprises entre abq et $ab(q+1)-1$, il y en a $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$ qui donnent q solutions non négatives, de l'équation proposée. De là, on déduit aisément

$$P_0 = \frac{\frac{1}{2}(a-1)(b-1)}{ab} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right),$$

$$P_1 = 1 - P_0 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) - \frac{1}{ab}.$$

Remarque. Soit toujours $\mu = r + mb$ le multiple de a qui fait partie de la dernière ligne de (4). Si μ entre dans la suite (3), l'équation (1) a $q+1$ solutions, non négatives : alors R, c'est-à-dire, le reste de la division de n par ab, est de la forme

$$R = \mu + (r' - m)\,b = \alpha a + \beta b,$$

α et β étant des nombres positifs ou nuls. Dans le cas contraire, cette forme est impossible; car αa devrait alors être de la forme $r - \gamma b$, tandis que $r < b$.

Nous retrouvons ainsi le théorème suivant(**), qui est dû à M. Catalan : *L'équation*

$$ax + by = abq + R,\quad (0 \leqq R < ab)$$

admet $q+1$ ou q solutions non négatives, suivant que l'équation

$$ax + by = R$$

admet une telle solution ou n'en admet pas. (J. Neuberg.)

Question 206.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 23 et VIII, p. 148.)

Trouver l'enveloppe de l'axe d'une parabole P′ *de grandeur constante, qui reste tangente à une parabole donnée* P, *tandis que son foyer se déplace sur l'axe de la courbe fixe.* (H. Brocard.)

Soient : $y^2 = 2px$ l'équation de P, $(\alpha, 0)$ les coordonnées du foyer F′

(*) La valeur $r = 0$ donne, évidemment, $q+1$ solutions de (1).

(**) *Mélanges mathématiques*, t. I, p. 25.

de P', $2p'$ le paramètre de P'; les équations de l'axe et de la directrice de la parabole mobile seront de la forme

$$(x-\alpha)\cos\delta+y\sin\delta=0,\quad (x-\alpha)\sin\delta-y\cos\delta-2p'=0,$$

et la courbe elle-même peut être représentée par l'équation focale :

$$(x-\alpha)^2+y^2=[(x-\alpha)\sin\delta-y\cos\delta-2p']^2,$$

laquelle se réduit à

$$[(x-\alpha)\cos\delta+y\sin\delta]^2+4p'[(x-\alpha)\sin\delta-y\cos\delta]-4p'^2=0. \quad (1)$$

Pour exprimer qu'il y a contact entre P et P', remplaçons dans l'équation (1) x par $y^2:2p$, et éliminons y entre l'égalité ainsi obtenue et sa dérivée par rapport à y. Le résultat(*), assez compliqué, peut être considéré comme étant l'équation de l'enveloppe cherchée, en coordonnées tangentielles (α, δ).

Solution analogue par M. Déprez. (J. N.).

×Question 281.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 216 et t. VIII, p. 216.)

Décomposer l'expression

$$u_n=\tfrac{1}{6}(3n^4-4n^3+n)$$

en une somme algébrique de $n(n-1)$ ***carrés.*** (DE ROCQUIGNY.)

I. ***Extrait d'une lettre de*** M. V. JAMET. Si j'ai bien compris la pensée de l'auteur, il y a une faute d'impression dans l'énoncé(**); la décomposition de u_n en une somme algébrique de $n(n-1)$ carrés ***me paraît présenter une indétermination*** qui diminue l'intérêt de la question, tandis qu'il est assez intéressant de décomposer u_n en une somme algébrique de $2(n-1)$ carrés.

En effet,

$$u_{n+1}=u_n+n^2(2n+1)=u_n+[n(n+1)]^2-(n^2)^2,$$

de sorte que, si u_n est la somme algébrique de $2(n-1)$ carrés, u_{n+1}

(*) La condition de contact de deux coniques peut s'exprimer en fonction des invariants des deux coniques. Voir SALMON, *sections coniques*.

(**) L'énoncé est bien celui qui nous a été communiqué par M. de Rocquigny. (RÉD.).

sera bien la somme de $2n$ carrés. On a, d'ailleurs, pour $n = 1$,

$$u_2 = u_1 + 3 = 2^2 - 1^2,$$

car $u_1 = 0$. Donc

$$u_{n+1} = [n^2(n+1)^2 + n^2(n-1)^2 + \cdots + 2^2 \cdot 1^2] - [n^4 + (n-1)^4 + \cdots + 1^4].$$

L'expression proposée est donc la différence entre la somme des carrés des doubles des $(n-1)$ premiers nombres triangulaires, et la somme des $(n-1)$ premiers bicarrés.

II. La remarque de M. Jamet suggère la solution suivante de la question proposée. Si l'on pose $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$, on trouve immédiatement

$$v_{n-1} = (2n-1)(n-1)^2, \quad u_n = v_{n-1} + v_{n-2} + \cdots + v_1.$$

L'expression u_n est donc la somme arithmétique de

$$(2n-1) + (2n-3) + \cdots + 3 \quad \text{ou} \quad (n^2-1) \text{ carrés}$$

savoir :

$$3 \text{ fois } 1^2, \quad 5 \text{ fois } 2^2, \quad \ldots, \quad (2n-1) \text{ fois } (n-1)^2.$$

A la place de la valeur

$$v_p = (2p+1)p^2 = p^2 + p^2 + p^2 + \cdots + p^2, \ (2p+1 \text{ fois})$$

introduisons celle-ci :

$$v_p = p^2(p+1)^2 - p^4.$$

Le nombre des carrés entrant dans u_n sera diminué de $2p-1$, et devient égal à $n^2 - 2p$; mais l'un d'eux sera négatif, savoir $-p^4$.

Si n est pair, prenons $p = \frac{1}{2}n$, et le nombre des carrés entrant dans u_n sera $n^2 - n$. Si n est impair, prenons $p = \frac{1}{2}(n-1)$, et remplaçons aussi $1^2 + 1^2 + 1^2$ par $2^2 - 1^2$; u_n sera encore exprimé par une somme algébrique de $n^2 - n$ carrés, dont deux seront négatifs, savoir -1^2 et $-p^4$. (P. M.)

III. Si l'on admet que les $(n^2 - n)$ carrés composant u_n se retrouvent dans les $n^2 + n$ carrés composant u_{n+1}, la question revient à exprimer la différence

$$v_n = u_{n+1} - u_n = (2n+1)n^2$$

par une somme algébrique de $(n^2 + n) - (n^2 - n)$ ou $2n$ carrés. Ce der-

nier problème est, évidemment, indéterminé. On peut poser, par exemple,

$$(2n+1)n^2 = (x+2nr)^2 - [x+(2n-1)r]^2 + \cdots + (x+2r)^2 - (x+r)^2$$
$$= nr\,[2x + (2n+1)r](*).$$

On satisfait le plus simplement à cette équation en faisant

$$r = 1, \quad x = \frac{(2n+1)(n-1)}{2}; \quad r = n, \quad x = -\frac{(2n+1)(n-1)}{2};$$

$$r = 2n+1, \quad x = -\frac{(2n+1)^2 - n}{2}.$$

D'autres solutions de la question se déduisent de l'égalité

$$(2n+1)n^2 = (x+2nr)^2 + [x+(2n-1)r]^2 + \cdots + [x+(n+1)r]^2 (**)$$
$$-(x+nr)^2 - [x+(n-1)r]^2 - \cdots - (x+r)^2$$
$$= [2x + (2n+1)r]n^2 r.$$

Si l'on prend $r = 1$, on obtient $x = 0$, de sorte que

$$v_n = (2n)^2 + (2n-1)^2 + \cdots + (n+1)^2 - n^2 - (n-1)^2 - \cdots - 1^2.$$

Cette solution est peu satisfaisante, parce que certains carrés se retrouvent dans la somme $v_1 + v_2 + \cdots$ avec des signes opposés(***).

L'hypothèse $r = 2n+1$ correspond à $x = -2n(n+1)$.

Note. Voici une autre question de même genre, due également à M. de Rocquigny : *Décomposer l'expression*

$$U_n = \tfrac{1}{60}\, n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1)$$

en une somme de $\frac{1}{2}n(n+1)$ *cubes.*

L'auteur indique la solution suivante : U_n est la somme des carrés des n premiers nombres triangulaires; or le carré du n^e triangulaire est égal à la somme des n premiers cubes; donc..... (J. N.)

(*) Pour trouver ce résultat, on applique la formule $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ à deux termes consécutifs de la somme précédente.

(**) On groupe ensemble les termes équidistants des extrêmes et l'on applique encore la formule $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

(***) Il en est de même de la solution de l'auteur de la question 281. M. de Rocquigny a trouvé l'expression u_n en cherchant la somme des produits des n premiers nombres impairs, pris deux à deux; il a remplacé ensuite chaque produit par la différence des carrés de la demi-somme et de la demi-différence des deux facteurs.

Question 609.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 80.)

Soit GH *une corde quelconque d'une ellipse, parallèle au demi-diamètre* OC. *Les circonférences décrites des points* G *et* H *comme centres avec un rayon égal à* OC *se coupent en deux points* R *et* R'. *Démontrer que le lieu des points* R *et* R' *se compose de deux diamètres symétriques par rapport à un axe de l'ellipse.* (E. CATALAN.)

Solution par M. DROZ. 1° Soit OD le demi-diamètre conjugué avec OC; il passe par le milieu commun M des droites GH et RR'; GM et OM sont les coordonnées de G par rapport à OC et OD; donc si l'on fait $OC = a'$, $OD = b'$, on a, en vertu de l'équation de l'ellipse,

$$OM = \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - \overline{GM}^2}.$$

Or, dans le triangle rectangle MGR, $MR = \sqrt{a'^2 - \overline{GM}^2}$; par suite,

$$OM = \frac{b'}{a'}MR.$$

Le rapport OM : MR étant constant et la direction MR invariable, le point R décrit une droite OZ. De même R' décrit une seconde droite OZ'.

2° Lorsque les points G et H coïncident en D, les points R et R' se placent sur la perpendiculaire menée par D à OC; appelons S, S' ces positions. Si l'on se rappelle la solution, d'après Chasles, du problème de construire les axes d'une ellipse dont on connait deux diamètres conjugués OC, OD, on observera que $OS = a + b$, $OS' = a - b$, et que les directions des axes sont les bissectrices de l'angle SOS'.

REMARQUE. Soient P, Q, U les points de rencontre de OC avec les droites DS, RM, RG. Les rapports RM : MO, MO : MQ étant constants, il en est de même des rapports RM : MQ, RG : GU; donc RU a une longueur invariable, égale à $SP = a' + b' \sin\theta$. De là un moyen de décrire l'ellipse, connaissant les diamètres conjugués OC, OD : on prend sur la droite DP, perpendiculaire à OC une longueur $DS = OC$, puis l'on fait glisser la droite PS entre les droites OC et OS; le point D décrira la courbe. On peut aussi faire glisser PS' entre les droites OC et OS'.

Dans ces deux modes de génération, les points de la courbe situés sur les diamètres OS, OS′ sont distants de O d'une quantité égale à DP; donc ces diamètres ont même longueur et, par suite, sont symétriques par rapport à un axe de l'ellipse.

Solution par M. Molenbroek. 1° Démonstration identique à celle de M. Droz. 2° Soient AA′, BB′ les axes de l'ellipse; E le point diamétralement opposé à D, CP, DQ, EV des perpendiculaires à AA′ rencontrant en c, d, e, la circonférence de diamètre AA′; dW perpendiculaire à OB. Je dis que *le diamètre* OR *coïncide avec* Od. En effet, les rayons Oc, Od, qui correspondent à deux diamètres conjugués de l'ellipse sont rectangulaires; si donc une perpendiculaire élevée en O sur OC rencontre dW en K, les triangles OCc, OKd sont égaux, et OK = OC. Les droites OK, OE étant parallèles et proportionnelles à RM, MO, KE est parallèle à OR. Mais VW est parallèle à dOe, et

$$d\mathrm{K} : d\mathrm{W} = c\mathrm{P} : \mathrm{CP} = e\mathrm{V} : \mathrm{EV} = a : b;$$

par suite, de est parallèle à KE et se confond avec Od.

MM. Brocard et Déprez ont donné des solutions peu différentes de celle de M. Droz. M. Jeřábek élimine α et β entre les équations (axes de coordonnées OC, CD)

$$(x+\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x+\alpha)(y-\beta)\cos\theta=a'^2,$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta=a'^2,\quad \frac{\alpha^2}{a'^2}+\frac{\beta^2}{b'^2}=1,$$

et achève la solution comme M. Droz (2e partie).

Solution de M. Stenne (Lyon). Axes de coordonnées, OA et OB. Équation de OC, $y=mx$; longueur $\mathrm{OC}=ab\sqrt{1+m^2}:\sqrt{a^2m^2+b^2}=a'$.

Écrivons que la circonférence décrite du point R (X, Z) comme centre, avec le rayon a', coupe l'ellipse aux extrémités d'une corde GH parallèle à OC :

$$(x-\mathrm{X})^2+(y-\mathrm{Y})^2-a'^2+\lambda(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)=\mu(y-mx-p)(y+mx-p').$$

En éliminant λ, μ, p, p' entre les équations de condition, on trouve

$$y=\pm\frac{b}{am}x,$$

d'où l'on conclut que R et R′ décrivent les diamètres du cercle principal qui correspondent au diamètre conjugué avec OC et à son symétrique par rapport à OA.

Solution de M. François (La Haye). Axes, OA et OB. Équations de OC et GH, $y=x\,\mathrm{tg}\,\varphi$, $y=x\,\mathrm{tg}\,\varphi+p$. Cherchant les intersections de ces droites avec l'ellipse, on trouve les coordonnées de C, G, H, M (milieu de GH), et les longueurs OC, GH. On écrit ensuite l'équation de la droite RR′ perpendiculaire en M sur GH, et l'équa-

tion de la circonférence de centre M et de rayon $\sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{MG}^2}$; il reste à éliminer p entre ces deux équations.

Autres solutions exactes, par MM. Bruyr et Pisani.

Note. Le théorème de M. Catalan peut être considéré comme une réciproque du suivant : *Lorsqu'une droite* AB, *de longueur constante, glisse entre deux axes fixes* OX, OY, *un point* G *de cette droite engendre une ellipse*. En effet, si AB, A'B sont les deux positions de la droite mobile qui passent par un même point B de OY, G et H les positions correspondantes du point générateur, GH est une corde de l'ellipse parallèle à OX; GB et HB sont, évidemment, les longueurs du demi-diamètre OC dirigé suivant OX, etc. Pour trouver le conjugué de OC, il suffit de considérer la droite mobile dans la position A''B'' perpendiculaire à OX; alors les points G et H sont réunis en un seul D, extrémité du diamètre conjugué avec OC. (J. N.)

× Question 618.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 149.)

Par un point M, *pris d'une manière arbitraire sur le côté* BC *d'un triangle* ABC, *on mène* MB' *parallèle à* AB, MC' *parallèle à* AC; *on forme ainsi le parallélogramme* AB'MC'. *Soient* I *le point de rencontre des droites* BB' *et* CC', N *celui des droites* AI *et* B'C'. *Démontrer les relations*

$$NC' : NB' = MB : MC; \qquad \text{(d'Ocagne.)}$$

$$BI.CI : B'I.C'I = AI : NI;$$

$$BI.C'I : CI.B'I = \overline{MB}^3 : \overline{MC}^3. \qquad \text{(Ed. Times.)}$$

Cette question a été traitée par MM. Pisani, Emmerich, Verniory, Russo et Déprez. Nous allons en résumer les solutions.

1° Le triangle AB'C', coupé par les lignes concourantes AI, B'I, C'I donne

$$\frac{B'N}{NC'} \times \frac{BC'}{BA} \times \frac{CA}{CB'} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{B'N}{NC'} \times \frac{BM}{BC} \times \frac{CB}{CM} = 1, \text{ etc.}$$

Autrement. Soit P le concours de C'B' et CB. La diagonale B'C' du quadrilatère complet AB'IC'BC est coupée harmoniquement par les deux autres en N et P; donc

$$\frac{B'N}{NC'} = \frac{PB'}{PC'} = \frac{B'M}{C'B} = \frac{MC}{BM}.$$

2° Les triangles ABB', ACC', coupés par les transversales CC', BB', donnent

$$\frac{IB}{IB'}\cdot\frac{CB'}{CA}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1,\quad \frac{IC}{IC'}\cdot\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{BC'}{BA}=1;$$

d'où, par multiplication et par division,

$$\frac{IB.IC}{IB'.IC'}=\frac{CA}{CB'}\cdot\frac{C'B}{C'A}\cdot\frac{CB'}{AB'}\cdot\frac{BA}{BC'},$$
$$\frac{IB.IC'}{IB'.IC}=\frac{CA}{CB'}\cdot\frac{C'B}{C'A}\cdot\frac{AB'}{CB'}\cdot\frac{BC'}{BA}.$$

En tenant compte du parallélisme des droites AB et MB', AC et MC', on transforme ces égalités dans les suivantes :

$$\frac{IB.IC}{IB'.IC'}=\frac{\overline{BC}^2}{BM.MC},\quad \frac{IB.IC'}{IB'.IC}=\frac{\overline{MB}^2}{\overline{MC}^2}.$$

La seconde résout une partie de la question. Pour transformer la première, considérons le triangle AC'N coupé par la transversale B'B ; nous aurons

$$\frac{AI}{NI}\cdot\frac{B'N}{B'C'}\cdot\frac{BC'}{BA}=1,\quad \text{ou}\quad \frac{AI}{NI}=\frac{BC}{CM}\cdot\frac{BC}{BM},$$

en tenant compte du théorème de M. d'Ocagne. Par conséquent

$$\frac{IB.IC}{IB'.IC'}=\frac{AI}{NI}.$$

×Question 631.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 262.)

Combien de solutions distinctes admet l'équation

$$x+y+z=n+2,$$

les inconnues x, y, z ayant des valeurs égales ou inégales choisies parmi les nombres $1, 2, 3, \ldots, n$. (DE BÖZÓKY.)

Solution par M. BELLENS, *instituteur à Anvers*. Mettons l'équation sous la forme $y+z=n+2-x=m$, m ayant les valeurs $1, 2, \ldots, n+1$. A une valeur donnée de m, correspondent $\frac{1}{2}m$ ou $\frac{1}{2}(m-1)$ couples distincts de valeurs de y et z, suivant que m est pair ou impair. Nous désignons respectivement par (α, α, α), (α, α, β), (α, β, γ) les solutions de l'équation proposée qui renferment trois nombres égaux, deux nombres égaux ou trois nombres inégaux.

I. *n est pair.* Si l'on fait successivement $z = 1, 2, \ldots, n$, on a $m = n+1, n, \ldots, 2$, et l'on trouve respectivement $\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}(n-2), \frac{1}{2}(n-2), \ldots$ solutions. Le nombre des solutions ainsi trouvées est

$$n' = n + (n-2) + (n-4) + \cdots + 2 = \tfrac{1}{4}n(n+2).$$

Mais elles ne sont pas toutes distinctes. 1° Si $n+2$ est premier avec 3, il n'y a pas de solution (α, α, α). Toute solution (α, α, β) se trouve classée à la fois parmi celles qui correspondent à $z = \alpha$ ou à $z = \beta$, et n' comprend n de ces solutions. Enfin, toute solution (α, β, γ) a été rencontrée trois fois, et le nombre des solutions de cette espèce a été $n' - n$. Donc le nombre cherché est

$$N = \tfrac{1}{3}n + \tfrac{1}{3}(n' - n) = \tfrac{1}{12}n(n+4).$$

2° Si $n+2$ est divisible par 3, on a une solution (α, α, α); n' comprend $2(\frac{1}{2}n - 1)$ solutions (α, α, β), et $n' - 2(\frac{1}{2}n - 1) - 1 = n' - n + 1$ solutions (α, β, γ). Par conséquent

$$N = 1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right) + \tfrac{1}{3}(n' - n + 1) = \tfrac{1}{12}(n+2)^2$$

II. *n est impair.* A $x = 1, 2, \ldots, n$, ou à $m = n+1, n, \ldots, 2$, correspondent respectivement $\frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(n-3), \ldots$ couples distincts de valeurs de y et z. Le nombre des solutions ainsi obtenues est

$$n' = \tfrac{1}{2}(n+1) + (n-1) + (n-3) + \cdots + 2 = \tfrac{1}{4}(n+1)^2.$$

Raisonnant comme dans le cas précédent, on trouve : 1° si $n+2$ est premier avec 3,

$$N = \tfrac{1}{2}(n+1) + \tfrac{1}{3}(n' - n - 1) = \tfrac{1}{12}(n+1)(n+3).$$

2° Si $n+2$ est divisible par 3,

$$N = 1 + \left(\frac{n+1}{2} - 1\right) + \tfrac{1}{3}(n' - n) = \tfrac{1}{12}(n^2 + 4n + 7).$$

Solution par M. Verniory. Supposons $x \leqq y \leqq z$, et groupons ensemble les solutions qui correspondent à une même valeur de x. Pour $n = 6p$, nous obtenons le tableau suivant

1, 1, $6p$;	2, 2, $6p-2$;	3, 3, $6p-4$;	$2p$, $2p$,	$2p+2$.
1, 2, $6p-1$;	2, 3, $6p-3$;	3, 4, $6p-5$;	$2p$, $2p+1$,	$2p+1$.
. . . . .	. . . . .	. . . . .		
. . . . .	2, $3p$, $3p$,	3, $3p-1$, $3p$.		
1, $3p$, $3p+1$.				

Les différentes colonnes comprennent, respectivement,

$$3p,\quad 3p-1,\quad 3p-3,\quad 3p-4,\quad \ldots,\quad 2,$$

solutions distinctes. Donc le nombre demandé est

$$N=[3p+(3p-3)+\cdots+3]+[(3p-1)+(3p-4)+\cdots+2]$$
$$=\frac{3p(p+1)}{2}+\frac{p(3p+1)}{2}=3p^2+2p=\frac{n(n+4)}{12}.$$

Les autres cas se traitent de la même manière. En voici les réponses :

$$n=6p+1,\qquad 6p+2,\qquad 6p+3,$$
$$N=\tfrac{1}{12}(n^2+4n+7),\quad \tfrac{1}{12}n(n+4),\quad \tfrac{1}{12}(n+1)(n+3),$$

$$n=6p+4,\qquad 6p+5;$$
$$N=\tfrac{1}{12}(n+2)^2,\quad \tfrac{1}{12}(n+1)(n+3).$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

290. Construire un trapèze ABCD, connaissant les diagonales AC, BD, l'angle qu'elles forment et l'angle des côtés non parallèles.

Soient E et F le point de concours des diagonales et celui de AD avec BC. On peut construire un quadrilatère semblable à FAEB, connaissant le rapport EA : EB = CA : DB, les angles AEB, AFB et sachant que EF passe au milieu de AB.

291. Mener une droite x parallèle à une droite donnée d et divisant deux droites données AB, CD dans un même rapport.

Soient E, F les points de rencontre de x avec AB et CD. Une parallèle à BC par E, une parallèle à AD par F se rencontrent en un même point G de AC. Si le triangle EFG se déplace parallèlement à lui même, de telle sorte que EF glisse entre AB et CD, le sommet G glisse sur une droite, etc.

292. Construire un quadrilatère ABCD, connaissant les milieux M, N, P des côtés AB, BC, CD, et les angles A et B, ou les angles A et C.

Achever le parallélogramme MNPQ. Le milieu E de BD peut se déterminer par l'intersection des arcs de deux segments capables décrits, soit sur MQ et PQ, soit sur MQ et NP.

393. Si $a+\alpha+b+\beta+c+\gamma=0$, démontrer que

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}(a+\alpha) & \operatorname{tg}(a+\beta) & \operatorname{tg}(a+\gamma) \\ \operatorname{tg}(b+\alpha) & \operatorname{tg}(b+\beta) & \operatorname{tg}(b+\gamma) \\ \operatorname{tg}(c+\alpha) & \operatorname{tg}(c+\beta) & \operatorname{tg}(c+\gamma) \end{vmatrix} = 0.$$

Théorème analogue pour les sinus des arcs. (ROGERS.)

Si l'on développe le déterminant, le produit des trois tangentes qui entrent dans un terme peut être remplacé par la somme de ces tangentes.

394. On donne un cercle O et un diamètre fixe AA'. Sur la perpendiculaire MP abaissée d'un point quelconque M de la circonférence sur AA', on prend une longueur PQ égale à l'arc AM. Trouver le lieu du point Q.

L'équation du lieu est

$$y = r \operatorname{arc\,cos}\frac{x}{r}, \quad \text{ou} \quad x = r\cos\frac{y}{r}. \qquad \text{(FR. FALISSE).}$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

647. Deux droites qui se coupent en un point O sous un angle de 30°, forment avec les droites isotropes menées par O, un faisceau équianharmonique, c'est-à-dire tel que les trois rapports anharmoniques fondamentaux du faisceau sont égaux. En conclure une construction simple du point qui, avec trois points donnés, dont deux sont imaginaires conjugués, forme un groupe équianharmonique. (V. RETALI.)

×**648.** Résoudre le système

$$a\sqrt{(x-y+z)(x+y-z)} = x\sqrt{yz},$$
$$b\sqrt{(x+y-z)(-x+y+z)} = y\sqrt{xz},$$
$$c\sqrt{(-x+y+z)(x-y+z)} = z\sqrt{xy}.$$

×**649.** On projette un triangle ABC sur tous les plans passant par une même droite du plan ABC. Démontrer que les angles A', B', C' de l'une quelconque de ces projections vérifient une relation de la forme

$$\alpha \cot A' + \beta \cot B' + \gamma \cot C' = 0,$$

α, β, γ étant des constantes. (J. NEUBERG.)

SUR LES COORDONNÉES TRIPOLAIRES;

par M. Ed. Lucas, professeur de mathématiques spéciales, au lycée St-Louis, à Paris.

Cette étude a pour but de montrer l'utilité du système des coordonnées tripolaires dans la recherche des propriétés de systèmes formés par des points, des droites et des cercles.

1. Soit un triangle ABC; désignons par A, B, C les *angles extérieurs* du triangle, par a, b, c ses côtés pris dans l'ordre de grandeur décroissante, par R et S le rayon du cercle circonscrit et l'aire du triangle. Prenons pour origine des coordonnées cartésiennes orthogonales le centre O du cercle circonscrit au triangle et désignons par (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), les coordonnées cartésiennes des sommets, par ξ, η celles d'un point quelconque P. Nous appellerons *coordonnées tripolaires* du point P, les *carrés* des distances de ce point aux trois sommets du triangle. On a donc

$$(1)\qquad \begin{cases} X = (\xi - a_1)^2 + (\eta - b_1)^2, \\ Y = (\xi - a_2)^2 + (\eta - b_2)^2, \\ Z = (\xi - a_3)^2 + (\eta - b_3)^2. \end{cases}$$

Les formules précédentes permettent de passer du système tripolaire au système cartésien et, inversement, en résolvant ces équations par rapport à $\xi^2 + \eta^2$, ξ, η.

Considérons encore le système trilinéaire formé par les trois côtés du triangle et désignons par x, y, z les coordonnées trilinéaires (normales) du point P, supposées positives pour un point pris à l'intérieur du triangle. On obtient facilement par la considération des trois systèmes de coordonnées obliques formés par deux des trois côtés du triangle :

$$(2)\qquad \begin{cases} X \sin^2 A = y^2 + z^2 - 2yz \cos A, \\ Y \sin^2 B = z^2 + x^2 - 2zx \cos B, \\ Z \sin^2 C = x^2 + y^2 - 2xy \cos C. \end{cases}$$

Ces formules permettent de passer du système tripolaire au système trilinéaire; nous donnerons plus loin les formules inverses, qui sont linéaires.

2. *Équation du cercle.* L'équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z + q = 0,$$

représente un cercle quelconque. En effet, en développant en coordonnées cartésiennes, on trouve

$$L(\xi^2+\eta^2)-2M\xi-2N\eta+Q=0,$$

après avoir posé

$$L=\lambda+\mu+\nu,\quad M=\lambda a_1+\mu a_2+\nu a_3,\quad N=\lambda b_1+\mu b_2+\nu b_3,$$
$$Q=\lambda(a_1^2+b_1^2)+\mu(a_2^2+b_2^2)+\nu(a_3^2+b_3^2)+q.$$

Par conséquent, si l'on suppose $L \gtrless 0$, l'équation représente un cercle dont le centre a pour coordonnées cartésiennes

$$\xi=\frac{\lambda a_1+\mu a_2+\nu a_3}{\lambda+\mu+\nu},\quad \eta=\frac{\lambda b_1+\mu b_2+\nu b_3}{\lambda+\mu+\nu}.$$

Ce point est le centre des distances proportionnelles des trois points A, B, C pour les coefficients λ, μ, ν; par suite, les *coordonnées trilinéaires* x, y, z *du centre* sont

$$ax=2S\frac{\lambda}{L},\quad by=2S\frac{\mu}{L},\quad cz=2S\frac{\nu}{L}.$$

Par l'emploi des formules (2) on trouvera les coordonnées tripolaires du centre.

Si l'on désigne par ρ le rayon du cercle, on a

$$\rho^2=\frac{M^2+N^2-LQ}{L^2},$$

ou, par le développement,

$$\rho^2=-\frac{a^2\mu\nu+b^2\nu\lambda+c^2\lambda\mu+q(\lambda+\mu+\nu)}{(\lambda+\mu+\nu)^2}.$$

Par conséquent, si x_0, y_0, z_0 et X_0, Y_0, Z_0 désignent les coordonnées trilinéaires et tripolaires du centre d'un cercle de rayon ρ, la puissance d'un point par rapport au cercle a pour expression

$$\frac{ax_0(X-X_0)+by_0(Y-Y_0)+cz_0(Z-Z_0)}{2S}-\rho^2.$$

On trouve de même, pour l'angle V de deux cercles,

$$2\rho\rho'\cos V=\frac{2MM'+2NN'-QL'-Q'L}{LL'},$$

ou, par le développement,

$$2\rho\rho' \cos V$$
$$\frac{a^2(\mu\nu' + \nu\mu') + b^2(\nu\lambda' + \lambda\nu') + c^2(\lambda\mu' + \mu\lambda') + q(\lambda' + \mu' + \nu') + q'(\lambda + \mu + \nu)}{(\lambda + \mu + \nu)(\lambda' + \mu' + \nu')}.$$

L'équation d'un cercle passant par trois points donnés par leurs coordonnées tripolaires est

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. *Équation de la droite.* Lorsque la somme L des coefficients de X, Y, Z, dans l'équation du cercle est nulle, cette équation représente une droite. La distance δ d'un point à cette droite a pour dénominateur $2\sqrt{M^2 + N^2}$ ou $2\sqrt{M^2 + N^2 - QL}$, puisque $L = 0$. On a donc

$$\pm\delta = \frac{\lambda X + \mu Y + \nu Z + q}{2\sqrt{-a^2\mu\nu - b^2\nu\lambda - c^2\lambda\mu}}.$$

En particulier, deux droites dont les équations ont des termes constants égaux et de signes contraires, sont symétriques par rapport au centre du cercle circonscrit.

En général, pour obtenir l'équation d'une droite parallèle à une autre et k fois plus éloignée du centre du cercle circonscrit, il suffit de multiplier par k le terme constant.

On trouve aussi pour l'angle V de deux droites la formule

$$\cos V = \frac{a^2(\mu\nu' + \nu\mu') + b^2(\nu\lambda' + \lambda\nu') + c^2(\lambda\mu' + \mu\lambda')}{2\sqrt{a^2\mu\nu + b^2\lambda\nu + c^2\lambda\mu}\sqrt{a^2\mu'\nu' + b^2\nu'\lambda' + c^2\lambda'\mu'}}.$$

L'équation d'une droite passant par deux points donnés par leurs coordonnées tripolaires est

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On sait que, si X, Y, Z représentent les premiers membres des équations de trois cercles quelconques, l'équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0,$$

représente un cercle qui coupe orthogonalement le cercle radical des trois cercles donnés. Par conséquent, dans le cas présent, l'équation linéaire et homogène en coordonnées tripolaires représente un cercle orthogonal au cercle circonscrit ou un diamètre de ce cercle.

En particulier, le diamètre OA du cercle circonscrit a pour équation

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et la distance d'un point à ce diamètre est donnée par

$$\frac{b^2(Y - X) - c^2(Z - X)}{2abc}.$$

Le point A′ diamétralement opposé au point A sur le cercle circonscrit a pour coordonnées tripolaires

$$4R^2, \quad 4R^2 - c^2, \quad 4R^2 - b^2.$$

4. *Équation du cercle circonscrit.* Le cercle circonscrit au triangle ABC a pour équation

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Par le développement, on trouve pour la puissance U d'un point par rapport au cercle circonscrit

$$U = -\frac{R}{2S}[aX \cos A + bY \cos B + cZ \cos C + abc].$$

Les puissances d'un point aux cercles décrits sur les côtés BC, CA, AB pris comme diamètres sont

$$\tfrac{1}{2}(Y + Z - a^2), \quad \tfrac{1}{2}(Z + X - b^2), \quad \tfrac{1}{2}(X + Y - c^2).$$

La tangente en A au cercle circonscrit est l'axe radical de ce cercle et

du point A; la distance d'un point à cette droite a pour expression

$$\frac{X - U}{2R},$$

puisque la distance du centre O à cette droite est égale à R.

Les bissectrices intérieures des angles du triangle formé par les tangentes en A, B, C sont les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés de ABC; elles ont pour équations

$$Y - Z = 0, \quad Z - X = 0, \quad X - Y = 0;$$

on obtient les distances d'un point à ces trois droites en divisant les premiers membres, changés de signe, par $2a$, $2b$, $2c$.

Les distances d'un point aux bissectrices extérieures du triangle des tangentes sont données par les expressions

$$\frac{Y + Z - 2U}{-4R\cos A}, \quad \frac{Z + X - 2U}{-4R\cos B}, \quad \frac{X + Y - 2U}{-4R\cos C}.$$

5. *Équation des côtés du triangle de référence.* On trouve l'équation de BC en prenant l'équation de la droite qui passe par les deux points B et C; on a

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on développe le déterminant et si l'on calcule la constante, on obtient pour les distances x, y, z d'un point quelconque aux trois côtés, et pour la *distance circulaire* u de ce point au cercle circonscrit (c'est-à-dire le rapport de la puissance de ce point au diamètre), les formules

$$\begin{aligned}
-4Sx &= aX + bY\cos C + cZ\cos B + abc\cos A,\\
-4Sy &= aX\cos C + bY + cZ\cos A + abc\cos B,\\
-4Sz &= aX\cos B + bY\cos A + cZ + abc\cos C,\\
-4Su &= aX\cos A + bY\cos B + cZ\cos C + abc.
\end{aligned}$$

Ces formules permettent de transformer l'équation d'un lieu donné en coordonnées trilinéaires $f(x, y, z) = 0$, dans le système tripolaire. Ces formules donnent lieu, par la considération de la théorie des invariants à un grand nombre de propriétés métriques nouvelles.

6. *Distance de deux points.* On a, en coordonnées trilinéaires, pour le carré de la distance de deux points,

$$d_{12}^2 = -\frac{(x_1 - x_2)^2 \sin 2A + (y_1 - y_2)^2 \sin 2B + (z_1 - z_2)^2 \sin 2C}{2 \sin A \sin B \sin C};$$

par suite, en coordonnées tripolaires,

$$16S^2 d_{12}^2 = a^2 (X_1 - X_2)^2 + b^2 (Y_1 - Y_2)^2 + c^2 (Z_1 - Z_2)^2 + 2bc (Y_1 - Y_2)(Z_1 - Z_2) \cos A + \cdots.$$

7. *Aire d'un triangle.* On trouve de même, pour l'aire T d'un triangle dont les sommets sont donnés, en coordonnées tripolaires,

$$-16ST = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

8. *Relation fondamentale.* Si l'on exprime, par notre théorème fondamental, que le déterminant des puissances mutuelles des trois sommets A, B, C, du triangle, d'un point quelconque et de la droite de l'infini est nul, on trouve

$$a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 + 2bc \cos A\,[YZ + a^2X] + \cdots + a^2b^2c^2 = 0.$$

C'est la relation entre les coordonnées tripolaires d'un point; si l'on désigne le premier membre par F(X, Y, Z) et par F_1, F_2, F_3 les demi-dérivées partielles, on a, par le théorème d'Euler,

$$XF_1 + YF_2 + ZF_3 + abc\,(aX \cos A + \cdots + abc) = 0;$$

on a donc, entre les coordonnées trilinéaires x, y, z et les coordonnées tripolaires X, Y, Z, U d'un point quelconque, la relation

$$axX + byY + czZ + 2SU = 0.$$

(*A continuer.*)

NOTES MATHÉMATIQUES.

*7. *Note sur le parallélogramme* (par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin, à Huy). On définit le *parallélogramme* un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles, et on démontre que les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux, ainsi que les angles opposés.

Réciproquement, un quadrilatère convexe est un parallélogramme dans les quatre cas suivants : 1° lorsque les côtés opposés sont égaux; 2° lorsque deux côtés opposés sont à la fois égaux et parallèles; 3° lorsque les angles opposés sont égaux; 4° lorsque deux côtés opposés sont parallèles et deux angles opposés égaux.

Mais *un quadrilatère n'est pas nécessairement un parallélogramme, lorsque deux côtés opposés sont égaux et les deux autres côtés parallèles.* En effet, le quadrilatère peut être, dans ce cas, un trapèze isoscèle.

Un quadrilatère n'est pas non plus nécessairement un parallélogramme, lorsque deux côtés opposés sont égaux, ainsi que deux angles opposés.

Pour le démontrer, prenons, sur les côtés OX et OY d'un angle aigu quelconque XOY, des longueurs égales OB, OD; puis menons BE perpendiculaire sur OY et DF perpendiculaire sur OX : on aura BE = DF.

Sur OX, dans le sens XO, et sur OY, dans le sens OY, prenons les longueurs égales FA, EC, et tirons AD, BC : les deux triangles ADF et BCE seront égaux, et le quadrilatère ABCD, qui n'est pas un parallélogramme, aura les côtés opposés AD, BC égaux, et les angles opposés A et C aussi égaux.

Ou bien : soit l'angle aigu BAD; abaissons BH perpendiculaire sur AD, et prenons, sur AD, à droite et à gauche du point H, les longueurs égales HD, HE; tirons BD et BE; puis faisons l'angle BDC = ABE, et l'angle DBC = AEB : les triangles BCD et ABE seront égaux, et le quadrilatère ABCD aura les côtés opposés AB, CD égaux, et les angles opposés A et C aussi égaux; cependant ce quadrilatère n'est pas un parallélogramme, car les angles alternes-internes AEB, CBE sont inégaux.

8. *Transformée polaire de la développée d'une conique par rapport à cette conique* (par M. André de Bőzóky). En identifiant les équations

$$\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = c^2, \quad \frac{xX}{b^2} + \frac{yY}{a^2} = 1,$$

qui représentent, respectivement, la normale au point (x_1, y_1) et la polaire du point (X, Y), on trouve

$$x_1 = \frac{a^4}{c^2X}, \quad y_1 = -\frac{b^4}{c^2Y};$$

d'où l'équation du lieu des pôles des normales

$$\frac{a^6}{X^2}+\frac{b^6}{Y^2}=c^4.$$

Dans le cas de la parabole $y^2=2px$, on trouve

$$Y^2+\frac{p^3}{2(X+p)}=0.$$

9. *Remarque sur une propriété fondamentale des Wronskiens* (par M. A. Dumoulin, élève à l'École normale de Gand). Si y, z, u, v sont des fonctions de x, on a, comme il est aisé de le voir,

$$\begin{vmatrix} y & z & u & v \\ y' & z' & u' & v' \\ y'' & z'' & u'' & v'' \\ y''' & z''' & u''' & v''' \end{vmatrix} =$$

$$y^4\begin{vmatrix} \left(\frac{z}{y}\right)' & \left(\frac{z}{y}\right)'' & \left(\frac{z}{y}\right)''' \\ \left(\frac{u}{y}\right)' & \left(\frac{u}{y}\right)'' & \left(\frac{u}{y}\right)''' \\ \left(\frac{v}{y}\right)' & \left(\frac{v}{y}\right)'' & \left(\frac{v}{y}\right)''' \end{vmatrix} = y^4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{z}{y} & \left(\frac{z}{y}\right)' & \left(\frac{z}{y}\right)'' & \left(\frac{z}{y}\right)''' \\ \frac{u}{y} & \left(\frac{u}{y}\right)' & \left(\frac{u}{y}\right)'' & \left(\frac{u}{y}\right)''' \\ \frac{v}{y} & \left(\frac{v}{y}\right)' & \left(\frac{v}{y}\right)'' & \left(\frac{v}{y}\right)''' \end{vmatrix}.$$

Donc, en employant la notation proposée par Muir pour les Wronskiens,

$$W(y,z,u,v)=y^4W\left(1,\frac{z}{y},\frac{u}{y},\frac{v}{y}\right).$$

De même,

$$W(y,z,u,v)=-W(z,y,u,v)=-z^4W\left(1,\frac{y}{z},\frac{u}{z},\frac{v}{z}\right)=z^4W\left(\frac{y}{z},1,\frac{u}{z},\frac{v}{z}\right);$$

$$W(y,z,u,v)=u^4W\left(\frac{y}{u},\frac{z}{u},1,\frac{v}{u}\right)=v^4W\left(\frac{y}{v},\frac{z}{v},\frac{u}{v},1\right).$$

Le signe W possède donc la même propriété que le signe fonctionnel des fonctions homogènes.

10. *Sur le cercle osculateur* (par M. Cl. Servais). Théorème. *Le cercle osculateur est la limite d'un des cercles ex-inscrits à un triangle circons-*

crit à une courbe, lorsque deux des points de contact se rapprochent indéfiniment du troisième. En effet, si R, r, r_a, r_b, r_c sont les rayons des cercles circonscrit, inscrit et ex-inscrits du triangle considéré on a

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R.$$

Or, les limites des rayons du cercle inscrit et de deux cercles ex-inscrits, sont nulles; donc la limite du troisième est égale à la limite de 4R, ou égale au rayon du cercle osculateur (*Mathesis*, t. IX, p. 105).

Dans le cas d'une courbe gauche, on considère le triangle formé par la tangente en un point A et les projections des tangentes en deux autres points sur le plan osculateur au point A. La limite d'un des cercles ex-inscrits est le cercle osculateur, et celle du cercle circonscrit, un cercle tangent dont le rayon est le quart du rayon de courbure.

QUESTIONS DE LICENCE;

par M. H. Brocard, chef de bataillon du Génie.

XXXVII. *L'équation d'une courbe rapportée à deux axes rectangulaires étant* $a^2y - x^3 = 0$, *chercher le lieu géométrique des points* M *d'où l'on peut mener, à cette courbe, deux tangentes faisant avec la direction des* x *positives des angles* MAx, MBx, *complémentaires l'un de l'autre. Construire ce lieu géométrique et déterminer les points qui lui sont communs avec la courbe proposée, ainsi que les angles sous lesquels il la rencontre.*

(*Bourses de licence*, août 1879.)

Soient A′ (x, y), B′ (ξ, η) les points de contact des tangentes issues du point M (X, Y). Les équations de ces droites sont

$$Ya^2 = x^2(3X - 2x), \quad Ya^2 = \xi^2(3X - 2\xi).$$

La condition relative aux angles MAx, MBx est exprimée par la relation $x\xi = \pm \frac{1}{3}a^2$.

Si l'on égale les deux valeurs de Y, il vient

$$3X(x^2 - \xi^2) = 2(x^3 - \xi^3) \quad \text{ou} \quad 3X(x + \xi) = 2[(x + \xi)^2 - x\xi],$$

ou encore, en posant $x + \xi = u$,

$$3Xu = 2u^2 \mp \frac{2a^2}{3}. \qquad (1)$$

En égalant les valeurs de X tirées des équations des deux tangentes, on trouve de même successivement

$$Ya^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\xi^2}\right)=2(\xi-x),\quad Ya^2\left(\frac{\xi^2-x^2}{\xi^2x^2}\right)=2(\xi-x)$$

$$Ya^2\left(\frac{\xi+x}{\xi^2x^2}\right)=2,\quad Ya^2\varkappa=2\frac{a^4}{9},\quad \varkappa=\frac{2a^2}{9Y}. \qquad (2)$$

Éliminons $\varkappa$ entre les équations (1) et (2); il vient

$$3X\cdot\frac{2a^2}{9Y}=2\frac{4a^4}{81Y^2}\mp\frac{2a^2}{3},\quad \text{c'est-à-dire}\quad 27XY=4a^2\mp 27Y^2.$$

Nous laissons aux lecteurs le soin d'achever la solution de la question.

II. ***Trouver l'intégrale générale de l'équation aux différentielles partielles***

$$(x-6y)p+(10x-y)q=6y^2-4x^2-36xy.$$

(LYON, novembre 1884.)

On a à intégrer les équations auxiliaires

$$\frac{dx}{x-6y}=\frac{dy}{10x-y}=\frac{dz}{6y^2-4x^2-36xy}. \qquad (1)$$

La première est homogène et en posant $y=ux$, elle donne successivement

$$\frac{dx}{x}=\frac{(1-6u)\,du}{6u^2-2u+10},\quad lx+\tfrac{1}{2}l(3u^2-2u+5)=\tfrac{1}{2}lC,$$

$$3y^2-xy+5x^2=C.$$

Le dénominateur de dz dans les équations (1) est égal à la somme des deux autres multipliés par $-4x$ et par $-6y$. Par suite,

$$dz+4x\,dx+6y\,dy=0,\quad z+2x^2+3y^2=C'.$$

L'intégrale générale demandée est donc

$$z=\varphi(3y^2-xy+5x^2)-2x^2-3y^2.$$

REMARQUE. On peut aussi obtenir l'intégrale de la première équation différentielle mise sous la forme

$$10x\,dx+6y\,dy=x\,dy+y\,dx,$$

en observant qu'elle est immédiatement intégrable. Ce procédé d'intégration s'applique à toutes les équations de la forme

$$(ax+by+g)\,dx+(bx+cy+h)\,dy=0.$$

VARIÉTÉS.

Une discussion sur la ligne droite;

par FOURIER et MONGE. (*)

FOURIER. Après avoir considéré les points, les lignes, les plans, la sphère et la circonférence du cercle, il semble que les définitions de ces divers objets n'aient pas été données d'une manière bien rigoureuse dans les éléments de géométrie ordinaire; et il me semble que, des considérations qui ont été exposées dans ces leçons de géométrie descriptive, on peut déduire des définitions exactes. Cette remarque peut paraître frivole; car on n'a peut-être pas besoin de définir très exactement ces différents objets pour en connaître les propriétés. Je crois cependant, qu'il est important de rechercher s'il est possible de définir bien exactement la ligne droite. On ne connaît guère de définition de la ligne droite que celle d'Archimède (**), qui a paru insignifiante à plusieurs géomètres; soit que le texte fût mal compris, soit qu'aux anciennes définitions, Archimède ait substitué une définition qui n'est pas encore à l'abri de toute attaque. Dans un excellent ouvrage qui vient d'être publié sur la science de l'étendue (***), on l'a adoptée; mais on a dit qu'il fallait y joindre un axiome différent qui pourrait faire la base de tous les éléments. Quant aux définitions qui s'en trouvent dans quelques écrits modernes, ce ne sont que des principes, la question reste toujours ce qu'elle était. Personne ne doute que la définition de la circonférence du cercle ne soit exacte; peut-être pourrait on faire une remarque à ce sujet. La définition de la circonférence du cercle telle qu'on la donne ordinairement, suppose toujours la définition du plan; car on dit que la circonférence du cercle est une ligne dont tous les points sont également éloignés d'un point donné; il faudrait ajouter, et qui est tracée sur un même plan; ainsi, pour que la définition de la circonférence du cercle fût exacte, il faudrait que celle du plan fût rigoureuse. Or, on a coutume de dire qu'un plan est une surface sur laquelle une ligne droite peut s'appliquer dans tous les sens; donc la définition du plan supposant celle de la ligne droite, la circonférence du cercle ne sera pas définie, si la ligne droite ne l'est rigoureusement. Ainsi nous voyons que la définition principale est celle de la ligne droite.

(*) Extrait des *Séances de l'École normale;* Débats, tome I^er^, p. 28-33; séance du 26 Pluviose, an III (14 février 1795), sous le titre : *Géométrie descriptive*, Monge, Professeur.

(**) Fourier attribue à Archimède la définition donnée par Legendre : *La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.* Archimède ne rejette nullement la définition d'Euclide : *La droite est une ligne qui est située de même par rapport à tous ses points*, mais afin de pouvoir trouver la longueur d'une courbe, il admet comme postulat, qu'*une courbe est plus longue que la droite qui réunit ses extrémités*, et *qu'elle est* aussi *plus longue qu'une autre courbe convexe aboutissant aux mêmes points et située entre la première courbe et la droite.* C'est un principe et non une définition.

(***) Il s'agit sans doute de la *Géométrie* de Legendre, publiée en 1794.

Dans les considérations qui ont été développées dans le programme de la géométrie descriptive, pour fixer la position d'un point, on dit qu'il faut rapporter ce point à trois points connus. Si nous appelons ces trois points connus A, B, C, le point fixe dont il s'agit se trouvera distant des trois points A, B, C, de grandeurs qui peuvent être différentes pour chaque point, mais aussi qui peuvent être les mêmes. Supposons que D soit la distance connue du point, aux trois points A, B, C; si l'on cherche la position de ce point dans l'espace, on vous a très bien exposé qu'il y en a deux, l'un d'un côté du plan, l'autre de l'autre : actuellement, si l'on fait varier la distance D, et qu'on demande un autre point qui ait la propriété d'être à égales distances des trois points données et d'en être éloigné de la quantité égale à la nouvelle valeur de D, on trouvera encore deux nouveaux points; et il n'est pas difficile de remarquer que ces deux nouveaux points seront dans la même ligne droite que les deux premiers. Il me semble que si l'on suppose dans l'espace trois points fixés, et qu'on prenne une série de points, dont chacun soit également éloigné de ces trois points, on aura une ligne droite; ainsi l'on pourrait dire que la ligne droite est une série de points, dont chacun est à égale distance de trois point donnés.

De même que la surface de la sphère a tous ses points à une distance donnée d'un point donné, on dirait que le plan est une série de points, dont chacun est à égale distance de deux points donnés; puis on passerait à la définition de la ligne droite; on dirait que c'est un assemblage de points, dont chacun est à égale distance de trois points donnés; et si l'on définissait la circonférence du cercle, on dirait que la circonférence est un assemblage de points, dont chacun est à une distance donnée de deux points donnés. En supposant les nombres 1, 2, 3, on peut donc définir très rigoureusement le plan, la circonférence du cercle et la ligne droite.

Le Professeur. Citoyen, la clarté avec laquelle tu viens d'exposer tes réflexions, et l'exactitude des observations que tu as faites précédemment sur des objets de physique (*), sont une preuve de la sagacité de ton esprit. La définition que tu viens de donner de la ligne droite, est rigoureuse; et l'analogie que tu as remarquée entre cette définition et celles que l'on pourrait faire du plan, de la circonférence du cercle et de la surface de la sphère, a quelque chose de très piquant. Permets-moi cependant de te faire à cet égard quelques observations.

Les considérations dont tu fais usage dans ta définition, ont quelque chose de plus compliqué que la ligne droite que tu veux définir; et elles supposent une habitude de la géométrie, que l'on ne peut avoir acquise sans la notion de la ligne droite.

Il est vrai que, pour bien définir un certain genre d'objets, il faut exposer une propriété qui convienne à tous les individus du genre, et qui ne convienne qu'à eux seuls; mais cela ne suffit pas; il faut encore, parmi toutes les propriétés, choisir

---

(*) On sait que l'œuvre capitale de Fourier est la *Théorie analytique de la chaleur* publiée en 1822; mais dès 1801 au moins (et sans doute auparavant, comme on peut le conjecturer par les paroles de Monge), il s'était occupé d'expériences et de calculs relatifs à la chaleur. Fourier naquit à Auxerre en 1768 et mourut à Paris en 1830.

celle qui est la plus simple et la plus facile à concevoir : e vais en apporter un exemple frappant.

Si, pour donner une idée de la circonférence du cercle, je disais qu'elle est la courbe parcourue par le sommet d'un angle droit qui se meut de manière que ses deux côtés soient perpétuellement tangents à une même section conique quelconque; je ferais une définition rigoureuse parce que cette propriété convient à toutes les circonférences de cercle et ne convient qu'à elles; mais cette définition manquerait de simplicité; parce que pour faire connaître un objet assez simple en lui-même, j'emploierais les relations qu'il a avec d'autres objets beaucoup plus compliqués, et dont on acquiert, pour l'ordinaire, la connaissance qu'au moyen de celle même de la circonférence du cercle. Cette définition ne serait donc pas propre à être employée au commencement des éléments de géométrie.

Il ne suffit même pas que la propriété qui doit servir de base à une définition, soit simple et facile à concevoir; il faut encore, si cela est possible, et surtout en géométrie, qu'elle fasse image Ainsi, par exemple, si pour définir la ligne droite, on disait: « concevons qu'un corps tourne autour de deux de ses points, comme un morceau « de bois tourné entre les deux points d'un tour; la plupart des points de ce corps « décriront des circonférences de cercle plus ou moins grandes; mais un certain « nombre d'entre eux ne changera pas de place pendant le mouvement du corps; la « suite de ces points dont la position ne change pas, forme une ligne droite ». On ferait une définition qui, d'abord, ne serait pas assez simple, à cause des idées du cercle et du mouvement circulaire qu'elle comporte, et qui ensuite aurait de l'obscurité; car, on conçoit bien qu'il doit y avoir des points qui ne changent pas de place, mais on ne se présente pas leur position avec la même facilité. Cette définition ne montrerait pas la ligne droite; elle pécherait donc encore parce qu'elle ne ferait pas image.

Il faut enfin que la propriété qui sert de base à une définition soit féconde et qu'elle conduise de la manière la plus directe aux autres propriétés plus compliquées, qu'il est important ou de découvrir ou d'enseigner (*).

Bénoni-Lebrun. Il me semble que la définition proposée par un de nos camarades, comporte une pétition de principe. Il définit la ligne droite, une ligne dont tous les points sont à égales distances de tous les points donnés. De deux choses l'une : ou j'ai déjà la notion de distance, ou je ne l'ai pas. Si j'ai déjà cette notion, il est plus simple de dire que la ligne droite est la plus courte distance d'un point à un autre; si je ne l'ai pas, je suis obligé de recourir à celle de la ligne droite, et c'est un cercle vicieux (**).

(*) Comme on le sait, les idées défendues par Fourier se retrouvent chez les auteurs qui se sont occupés des principes de la *Géométrie* élémentaire. La discussion entre Monge et Fourier semble donc le premier document de l'histoire des mathématiques relatif à la géométrie non euclidienne.

(**) Dans tous les cas, il reste à établir que la définition du plan ne renferme pas des conditions incompatibles.

Dans les considérations qui ont été développées dans le progr
trie descriptive, pour fixer la position d'un point, on dit qu'il f
à trois points connus. Si nous appelons ces trois points co
fixe dont il s'agit se trouvera distant des trois points A, F
peuvent être différentes pour chaque point, mais aussi qu
Supposons que D soit la distance connue du point, au
l'on cherche la position de ce point dans l'espace, on
y en a deux, l'un d'un côté du plan, l'autre de l'autre
varier la distance D, et qu'on demande un autre poi
égales distances des trois points données et d'en êt
la nouvelle valeur de D, on trouvera encore deu
difficile de remarquer que ces deux nouveaux
droite que les deux premiers. Il me semble que
points fixés, et qu'on prenne une série de
éloigné de ces trois points, on aura une lign
la ligne droite est une série de points, dor
point donnés.

De même que la surface de la sphère a
point donné, on dirait que le plan est u
distance de deux points donnés; puis o
on dirait que c'est un assemblage de
trois points donnés; et si l'on défi
la circonférence est un assemblage
de deux points donnés. En suppos
rigoureusement le plan, la circon

Le Professeur. Citoyen, la c
et l'exactitude des observation
physique (*), sont une preuve
de donner de la ligne droite
cette définition et celles qu
et de la surface de la sph
dant de te faire à cet égar

Les considérations do
compliqué que la ligne
de la géométrie, que l

Il est vrai que, p
propriété qui convi
seuls; mais cela

c angles est un nombre
s par 3 entiers consécutifs,
bres 4, 5, 6. (Weill.)
ue, dans tout triangle ABC,
et AC, est égale au produit du
jections des deux premiers côtés
férence est égale à la distance de
pport à la perpendiculaire élevée
B, le triangle ACD est évidem-

$= b$, et l'on a

$= bc$. (1)

entre les côtés d'un triangle, pour
d'un autre.
avoir ses côtés en progression arithmé-
possibles :

$$\begin{cases} b = a - \partial, \\ c = a - 2\partial, \end{cases} \qquad \begin{cases} b = a - 2\partial, \\ c = a - \partial. \end{cases}$$

on devrait avoir, d'après (1), $a = 2\partial$, et, par suite,
inadmissible. Dans la deuxième hypothèse, la

$$b = (3 + \sqrt{13})\frac{\partial}{2}, \quad c = (1 + \sqrt{13})\frac{\partial}{2},$$

si l'on exige que a, b, c soient commensurables.
hypothèse, on doit avoir, en vertu de (1),

$$a = 6\partial, \quad b = 4\partial, \quad c = 5\partial.$$

(*) On sait qu
publiée en 1822
le conjecturer
relatifs à la ch

(1) Nous avons reçu cette solution en février 1885. Elle a été égarée jusqu'à pré-
sent, sans que nous ayons reçu la bonne solution de la question 282, que nous aurions dû signaler,
t. IV, p. 192.

3° Cela posé, considérons le triangle ABC, dont les côtés sont

$$a = n + 1, \quad b = n - 1, \quad c = n,$$

n étant un nombre entier, *non inférieur à* 3, sans quoi le triangle n'existerait pas. Si $2p$ est le périmètre, on a

$$p = \frac{3}{2}n, \quad p - a = \frac{n}{2} - 1, \quad p - b = \frac{n}{2} + 1, \quad p - c = \frac{n}{2},$$

et, par suite, en vertu de formules connues,

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n-2}}, \quad \operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{n-2}{n+2}}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{4}{n^2}\right)},$$

α, β, γ étant les *demi-angles* du triangle, n croissant indéfiniment, les angles α, β, γ varient jusqu'à une limite commune, 30°, le premier en diminuant, les autres en augmentant toujours. Pour $n = 3$, ils sont à peu près de 53°, 14°, 23°, et l'on voit directement qu'il ne peut exister entre eux de rapport entier. Si l'on calcule leurs valeurs, pour $n = 4$, on trouve que, exception faite du cas de $n = 3$, on a toujours

$$46° > \alpha > 30°, \quad 18° < \beta < 30°, \quad 26° < \gamma < 30°,$$

d'où :

$$1 < \frac{\alpha}{\beta} < 3.$$

Ainsi, le rapport du plus grand angle au plus petit est inférieur à 3. Il en est de même, à plus forte raison, des autres rapports. Il en résulte que le rapport de deux angles du triangle ABC ne peut être un entier, différent de 2. Mais l'on a vu que, dans ce cas, les côtés sont nécessairement 4, 5, 6.

4° Remarque. Les développements qui précèdent se prêtent à des considérations arithmétiques assez curieuses. Par exemple, la proposition même de M. Weill se transforme aisément en celle-ci : *L'équation*

$$\left(1 + i\sqrt{\frac{3y}{y+4}}\right)\left(1 + i\sqrt{\frac{y}{3(y+4)}}\right)^x + \left(1 - i\sqrt{\frac{3y}{y+4}}\right)\left(1 - i\sqrt{\frac{y}{3(y+4)}}\right)^x = 0$$

admet, en nombres positifs et entiers, la solution unique $x = 2$, $y = 3$.

Question 417(*).

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 46 et t. VI, p. 183.)

On donne une circonférence C, *un point* O *sur cette ligne et deux directions fixes. Par un point quelconque* M *de* C, *on trace les cordes* MA, MB, *parallèles aux directions fixes ; trouver le lieu du point* P *où se coupent les droites* MO, AB. *Déterminer les asymptotes et démontrer que ces droites forment un triangle équilatéral.* (E. Dewulf.)

Solution par M. Brunel, *professeur à la faculté des sciences de Bordeaux*. Prenons comme origine des coordonnées le point fixe O et comme axes les bissectrices des deux directions données.

Désignons par a, b les coordonnées du centre de la circonférence, par x, y celles d'un point de cette circonférence, pour lequel on a

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(a^2+b^2); \qquad (1)$$

et, donnons-nous enfin l'équation représentant l'ensemble des deux droites parallèles aux directions données menées par l'origine :

$$\lambda x^2+\mu y^2=0.$$

Au point (x, y), la tangente a pour équation

$$X(x-a)+Y(y-b)-ax-by=0. \qquad (2)$$

L'équation de la droite AB est évidemment de la forme

$$X(x-a)-Y(y-b)-p=0. \qquad (3)$$

Nous déterminerons p en remarquant que les droites (2) et (3) constituent une conique passant par l'intersection du cercle et des deux droites passant par M, c'est-à-dire qu'il suffit d'identifier le produit des premiers membres de (2) et (3) avec le premier membre de l'équation :

$$X^2+Y^2-2aX-2bY+\lambda\nu(X-x)^2+\mu\nu(Y-y)^2=0,$$

ce qui donne

$$\frac{(x-a)^2}{1+\lambda\nu}=\frac{-(y-b)^2}{1+\mu\nu}=\frac{p(ax+by)}{(\lambda x^2+\mu y^2)\nu}=\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(\lambda-\mu)\nu}.$$

(*) En présence des progrès constants de l'enseignement de la géométrie analytique en France, progrès dont nous devrons tenir compte en Belgique, nous n'hésitons pas à communiquer aux lecteurs de *Mathesis* une seconde solution de la question 417, dans laquelle on trouve l'application des méthodes récentes. (Réd.)

Le lieu cherché se présente donc comme lieu de l'intersection des droites AB et OM représentées par les équations

$$X(x-a)-Y(y-b)-\frac{(a^2+b^2)(\lambda x^2+\mu y^2)}{(\lambda-\mu)(ax+by)}=0,$$

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y} \qquad (4)$$

x et y satisfaisant à l'équation (1). On peut écrire autrement :

$$X=\frac{x(a^2+b^2)(\lambda x^2+\mu y^2)}{(\lambda-\mu)(ax+by)[x(x-a)-y(y-b)]}$$

$$Y=\frac{y(a^2+b^2)(\lambda x^2+\mu y^2)}{(\lambda-\mu)(ax+by)[x(x-a)-y(y-b)]} \qquad (5)$$

et ces équations établissent complètement la relation qui existe entre les points du cercle et les points du lieu cherché. Nous voyons dès à présent que le lieu a trois points à l'infini. Ces points, tous trois réels, correspondent aux points d'intersection du cercle avec l'hyperbole équilatère

$$x(x-a)-y(y-b)=0.$$

L'origine ne correspond pas, dans ce cas, à un point à l'infini, puisque pour de petites valeurs de x et de y les numérateurs de X et Y sont infiniment petits d'ordre supérieur au dénominateur. Cette dernière remarque s'applique également au facteur $ax+by$. Si nous observons que l'on peut écrire(*)

$$x=2\frac{a+bt}{1+t^2},\quad y=2\frac{t(a+bt)}{1+t^2},$$

nous voyons que X et Y s'expriment rationnellement en fonction d'un paramètre. La courbe cherchée est du troisième degré, et de plus elle est unicursale, ce qui était évident d'après le mode de définition. On a

$$X=\frac{2(a^2+b^2)(\lambda+\mu t^2)}{(\lambda-\mu)(a+3bt-3at^2-bt^3)},$$

$$Y=\frac{2t(a^2+b^2)(\lambda+\mu t^2)}{(\lambda-\mu)(a+3bt-3at^2-bt^3)}. \qquad (6)$$

(*) On tire x et y des équations $x^2+y^2-2ax-2by=0$, $y=tx$, dans lesquelles on considère t comme un paramètre variable avec M.

Les points à l'infini correspondent aux valeurs de t satisfaisant à l'équation

$$\frac{a}{b} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

qui, si l'on pose $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$, n'est autre que celle qui donne $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}$. Nous trouvons donc ainsi que les asymptotes forment un triangle équilatéral. Les courbes du troisième degré jouissant de cette propriété ont déjà été étudiées en partie par Clifford (*Educ. Times*).

Les équations (6) nous fournissent immédiatement l'équation de la courbe cherchée :

$$(\lambda - \mu)(aX^3 + 3bX^2Y - 3aXY^2 - bY^3) - 2(a^2 + b^2)(\lambda X^2 + \mu Y^2) = 0. \quad (7)$$

L'origine est un point double où les tangentes sont les parallèles aux directions données. L'équation (7) peut se mettre également sous la forme

$$(X^2 + Y^2 - 2aX - 2bY)\,[(\lambda + 3\mu)\,aX + (\mu + 3\lambda)\,bY - 2(\lambda b^2 + \mu a^2)] - 4(aX + bY)\,[\mu(X - a)^2 + \lambda(Y - b)^2] = 0, \quad (8)$$

laquelle montre que, outre l'origine, la courbe a quatre points sur la circonférence, qui sont les points de contact des tangentes parallèles aux directions données.

La tangente à l'origine et les perpendiculaires aux directions données menées par le point (a, b) rencontrent la courbe du troisième ordre chacune en un point non situé sur la circonférence. On sait que les trois points en question sont en ligne droite. La dernière forme donnée à l'équation de la courbe nous fournit l'équation de cette droite :

$$(\lambda + 3\mu)\,aX + (\mu + 3\lambda)\,bY - 2(\lambda b^2 + \mu a^2) = 0. \quad (9)$$

Le point de la courbe situé sur la tangente à la circonférence à l'origine : $aX + bY = 0$, se trouve donc facilement. On a

$$(\mu - \lambda)\,aX = \lambda b^2 + \mu a^2, \quad (\lambda - \mu)\,bY = \lambda b^2 + \mu a^2.$$

Si l'on transporte l'origine au centre de la circonférence, et si l'on désigne par ξ, η les nouvelles coordonnées et par r le rayon, on aura

$$(\mu - \lambda)\,a\xi = \lambda r^2, \quad (\lambda - \mu)\,b\eta = \mu r^2.$$

On en conclut que pour les mêmes directions, si le point choisi sur la

circonférence change, le lieu du point que nous venons de définir est du quatrième degré et a pour équation

$$1 = \frac{r^2}{(\lambda - \mu)^2}\left(\frac{\lambda^2}{\xi^2} + \frac{\mu^2}{\eta^2}\right).$$

L'origine restant la même, mais les directions variant, il y a lieu de considérer le lieu des derniers points de rencontre de la courbe du troisième degré avec les perpendiculaires à ces directions passant par l'origine. Il suffit, dans l'équation (9), de remplacer λ et μ par les quantités qui leur sont alors proportionnelles $(X - a)^2$ et $(Y - b)^2$. Nous obtenons une courbe du troisième degré

$$aX\,[(X-a)^2 - 3(Y-b)^2] + bY\,[3(X-a)^2 - (Y-b)^2] - 2\,[b^2(X-a)^2 - a^2(Y-b)^2] = 0,$$

facile à discuter.

Il convient encore de remarquer que la droite (9) passe, quels que soient λ et μ, par le point déterminé par les équations

$$aX + 3bY = 2b^2, \quad 3aX + bY = 2a^2$$

ou bien, en coordonnées ξ et η,

$$4a\xi = -r^2, \quad 4b\eta = -r^2.$$

Nous avons donc là un point fixe lorsqu'on change la direction, et qui, lorsqu'on fait varier le point sur la circonférence, se déplace sur la courbe

$$16\xi^2\eta^2 = r^2(\xi^2 + \eta^2),$$

c'est-à-dire sur une courbe excessivement simple du quatrième ordre.

×Question 615.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 128.)

Soient O *le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC, H *l'orthocentre*, I *le centre du cercle inscrit*, K *le point de Lemoine, et* $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ *les inclinaisons des droites* OA, OB, OC, OH, OI, OK *sur un axe quelconque* OX. *Démontrer les formules*

$$\sin(\alpha - x) + \sin(\beta - x) + \sin(\gamma - x) = 0,$$

$$\sin(x-y)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) + \sin(\beta-y)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) + \sin(\gamma-y)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = 0,$$

$$\sin(\alpha - z)\sin^2\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) + \sin(\beta-z)\sin^2\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) + \sin(\gamma-z)\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = 0.$$

(J. Neuberg.)

Solution par M. VERNIORY. Plus généralement, soient M, N deux points quelconques des plans ABC; ρ_a, ρ_b, ρ_c les distances MA, MB, MC; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, les inclinaisons de MA, MB, MC, MN sur un axe quelconque; m_a, m_b, m_c les masses qui, appliquées en A, B, C, ont pour centre de gravité le point N. D'après un théorème connu, la somme des produits de ces masses par leurs distances à un axe MN passant par leur centre de gravité, est nulle. Donc

$$m_a\rho_a \sin(\alpha - \delta) + m_b\rho_b \sin(\beta - \delta) + m_c\rho_c \sin(\gamma - \delta) = 0.$$

Faisons coïncider M avec O; alors $\rho_a = \rho_b = \rho_c = R$, et les angles A, B, C du triangle ABC ont mêmes sinus que $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, $\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$, $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, au signe près.

Cela posé, pour la ligne OH qui passe par le centre de gravité de ABC, on peut prendre $m_a = m_b = m_c$; pour OI,

$$m_a : m_b : m_c = \sin\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) : \sin\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) : \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta);$$

pour OK,

$$\frac{m_a}{\sin^2 A} = \frac{m_b}{\sin^2 B} = \frac{m_c}{\sin^2 C}.$$

M. Déprez a résolu la même question, non seulement pour le plan, mais aussi pour la sphère.

×Question 619.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 176)

ABC *étant un triangle donné, soit* D *le point de contact, avec* BC, *du cercle inscrit,* I. *On projette les sommets* B, C *en* E, F *sur la bissectrice* AI; *puis l'on construit les parallélogrammes* DEBG, DFCH. *Cela posé:* 1° *Les points* B, G, C, H *appartiennent à une circonférence;* 2° *le centre de cette circonférence et le centre* I *du cercle inscrit, sont également distants du côté* BC (E. CATALAN, *Mél. Math.*, t. III, p. 129).

De bonnes solutions de cette question nous ont été envoyées par MM. FRANÇOIS (La Haye), PISANI, DÉPREZ et MOLENBROEK. Nous résumerons celles de la première partie, et indiquerons pour la seconde partie une solution géométrique plus simple. La figure suppose AC > AB, de manière que E tombe sur la bissectrice AO (O est le pied de cette droite), F à l'extérieur de ABC.

I. 1° A cause des quadrilatères cycliques BDIE, IDFC, l'on a

$$\textit{angle}\ \mathrm{GBD} = \mathrm{BDE} = \mathrm{BIA} = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\mathrm{C},$$
$$\textit{angle}\ \mathrm{DHC} = \mathrm{DFC} = 180^\circ - \mathrm{DIC} = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\mathrm{C};$$

donc *angle* GBD = DHC, et les points B, G, H, C sont sur une même circonférence.

2° Il suffit de démontrer que DB.DC = DG.DH. Or

$$\mathrm{BE} = c\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{A},\quad \mathrm{CF} = b\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{A},\quad \sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{A} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc},\quad \text{etc.}$$

3° Soient M le milieu de BC, B′ le point de rencontre de BE avec AC; E étant le milieu de BB′, on a $\mathrm{ME} = \frac{1}{2}\mathrm{B'C} = \frac{1}{2}(b-c) = \mathrm{MD}$, et par analogie ME = MF. Donc, dans le triangle EDF, DH est la hauteur et DM est un rayon du cercle circonscrit; d'où l'on déduit l'égalité des angles EDC, HDF, puis celle de GBD, DHC.

II. Le centre N du cercle BGCH est à l'intersection des perpendiculaires élevées aux milieux M, K des droites BC, GH. On a $\mathrm{DK} = \frac{1}{2}(\mathrm{DH} - \mathrm{DG}) = \frac{1}{2}(\mathrm{CF} - \mathrm{BE})$, mais la distance de M à AO a la même valeur $\frac{1}{2}(\mathrm{CF} - \mathrm{BE})$. Donc KN et AO sont des droites symétriques par rapport au milieu de DM, point qui est aussi un centre de symétrie de ID et MN; par conséquent MN = DI. (J. N.)

Remarques. 1° DE, perpendiculaire à CI, passe par le point de contact du cercle inscrit avec AC.

2° La question 619 peut être étendue aux cercles ex-inscrits. (Déprez.)

×Questions 623 et 624.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 216.)

623. *Un triangle* ABC *tourne autour d'un point fixe* X *de son plan. Soient* A′, B′, C′ *les intersections des côtés homologues de deux positions quelconques du triangle. Démontrer que le quadrilatère* XA′B′C′ *est toujours semblable à lui-même, et trouver comment il faut choisir le point* X *par rapport à* ABC, *pour qu'il soit le centre du cercle circonscrit ou inscrit à* A′B′C′, *ou l'orthocentre ou le centre de gravité de* A′B′C′. (J. Neuberg.)

624. *Lorsqu'un quadrilatère* ABCD, *inscrit dans un cercle, tourne autour du centre* O *de ce cercle, les intersections de ses côtés avec leurs homologues dans une nouvelle position du polygone sont les sommets d'un parallélogramme.* (Beyens.)

I. *Rotation d'une figure plane formée de droites, autour d'un point fixe;* par M. LAISANT, député. **1**. Quand un segment de droite AB tourne dans un plan autour d'un point fixe O, si nous le considérons dans deux de ses positions différentes AB, A'B', l'intersection des deux droites aura lieu en un point M. En regardant ce point comme lié à la droite AB, il viendra sur A'B', dans la nouvelle position, occuper une position M', telle que OM = OM'. Abaissons la hauteur OP du triangle isoscèle OMM', et appelons θ l'angle dont a tourné la figure pour passer d'une position à l'autre. L'angle POM sera égal à $\frac{1}{2}\theta$ et la longueur OM à $(OP : \cos\frac{1}{2}\theta)$.

2. Si au lieu d'une seule droite nous prenons un système de plusieurs droites, et si nous voulons étudier la figure formée par les intersections de ces droites avec leurs homologues dans deux positions différentes, on voit que cette figure sera constamment semblable à celle obtenue en abaissant de O des perpendiculaires sur les diverses droites de la figure dans une position quelconque. C'est là une conséquence immédiate de ce qui précède.

3. Si la figure mobile est un quadrilatère inscrit dans un cercle et tournant autour du centre, les points P sont les milieux des côtés, et forment par conséquent un parallélogramme. Donc les points M formeront aussi un parallélogramme, semblable au premier (question 624 de *Mathesis*, BEYENS).

4. Si la figure mobile est un triangle tournant autour d'un point X, et si A', B', C' sont les intersections des côtés homologues de deux positions quelconques, nous venons de voir que la figure XA'B'C' reste toujours semblable à elle-même et à $XA_1B_1C_1$, XA_1, XB_1, XC_1 étant les perpendiculaires abaissées de X sur les côtés du triangle ABC. Par conséquent, et en vertu de propriétés du triangle, très simples et très connues, nous voyons que X occupera en particulier les positions suivantes par rapport aux triangles ABC, A'B'C' :

ABC	A'B'C'
Centre du cercle inscrit.	Centre du cercle circonscrit.
Orthocentre.	Centre du cercle inscrit.
Centre du cercle circonscrit.	Orthocentre.
Point de Lemoine.	Centre de gravité.

Ce tableau contient entièrement la solution de la question 623 posée dans *Mathesis*. Ajoutons que si X est un point de Brocard de ABC, il est aussi un point de Brocard de A'B'C'.

5. Nous n'ajouterons qu'une simple remarque, conséquence des observations qui précèdent, et s'appliquant à la rotation d'une courbe plane dans son plan :

Si l'on prend les intersections des tangentes homologues pour deux positions quelconques, l'ensemble de ces points d'intersection forme une courbe semblable à la podaire de la courbe mobile, par rapport au centre de rotation pris comme pôle.

II. NOTE. Nous avons également reçu des solutions très complètes des questions 623 et 624 de la part de MM. SCHOUTE (professeur à Groningue), F. X. DEWACHTER (Schaerbeek), DÉPREZ, BRUYR, LAURENS et MEURICE. MM. FRANÇOIS, DENYS, PISANI et LALISSE ont très bien traité la question 624.

Le théorème de M. Beyens a donné lieu à quelques remarques intéressantes. 1° Si l'on fait tourner autour du centre du cercle circonscrit un quadrilatère cyclique à diagonales rectangulaires, ou un carré, ou un trapèze, les côtés homologues, dans deux positions quelconques, se rencontrent aux sommets d'un rectangle, ou d'un carré, ou d'un losange. (DÉPREZ.)

2° Soient ABC, A'B'C' deux triangles directement égaux, inscrits à la même circonférence; A_1, B_1, C_1 les intersections des côtés égaux; A_2, B_2, C_2 les points de concours des tangentes aux extrémités des cordes AA', BB', CC'. Dans la question 624, remplaçons le quadrilatère ABCD par le triangle ABC et la tangente AA_2; on verra que la figure $C_1A_1B_1A_2$ est un parallélogramme. Si l'on considère de même les tangentes en B, C, on trouve que A_1, B_1, C_1 sont les milieux des droites B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2. Autrement dit, les pôles de deux cordes égales AA', BB' et le point d'intersection des diagonales du trapèze AA' BB' sont colinéaires. La démonstration directe de cette proposition ne présente pas de difficulté. (A. C.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

395. Vérifier les identités

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha\,(2\cos\alpha - 1)(2\cos\alpha + \cos 2\alpha) + \sin\tfrac{1}{2}\alpha\,(2\cos\alpha + 1)(2\sin\alpha + \sin 2\alpha) = 3\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\frac{3 - (2\cos\alpha - 1)(2\cos\alpha + \cos 2\alpha)}{(2\cos\alpha + 1)(2\sin\alpha + \sin 2\alpha)} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha.$$ (E. CATALAN.)

396. Trouver les racines de l'équation

$$x^2+(p+p'\sqrt{-1})x+(q+q'\sqrt{-1})=0 \qquad (1)$$

sous la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

a) Résoudre par la formule $-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ et transformer le radical $\sqrt{A+B\sqrt{-1}}$.

b) Remplacer x par $y+r\sqrt{-1}$ et décomposer le résultat de la substitution en

$$y^2-r^2+py-p'r+q'=0, \quad yr+\frac{p'}{2}y+\frac{p}{2}r+\frac{q'}{2}=0.$$

Ces égalités peuvent prendre la forme

$$\left(y+\frac{p}{2}\right)^2-\left(r+\frac{p'}{2}\right)^2=\frac{p^2-p'^2-4q}{4}, \quad \left(y+\frac{p}{2}\right)\left(r+\frac{p'}{2}\right)=\frac{pp'-2q}{4}.$$

En ajoutant le carré de la première au quadruple carré de la seconde, on obtient

$$\left(y+\frac{p}{2}\right)^2+\left(r+\frac{p'}{2}\right)^2.$$

(Extrait du *Cours d'Algèbre* de M. DE LONGCHAMPS).

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**650** Trouver pour a et b des valeurs entières telles que l'expression

$$\frac{249a^2}{113a+89b},$$

se réduise à un nombre entier.

651. Intégrer

$$\frac{(\lambda-1)\cos(\lambda+1)x+(\lambda+1)\cos(\lambda-1)x}{\cos^2 x}\,dx. \quad \text{(E. CATALAN.)}$$

652. Soient A un point quelconque pris dans le plan d'une ellipse E; B, C, les points de contact des tangentes issues de A. 1° Démontrer que l'orthocentre du triangle ABC et le point A sont conjugués harmoniques par rapport au cercle de Monge (cercle circonscrit au rectangle des axes). 2° Examiner le cas particulier où le point A est situé sur E, et démontrer le théorème suivant :

La normale en un point A d'une ellipse E rencontrant le cercle de Monge aux points P et Q, le centre de courbure correspondant est le symétrique, par rapport à A, du conjugué harmonique de ce point, relativement au segment PQ. (G. DE LONGCHAMPS.)

SUR LE CERCLE DE JOACHIMSTHAL ;

par M. G. DE LONGCHAMPS, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

Voici un extrait de la lettre dont l'auteur de cet article a accompagné l'envoi du manuscrit ; il est de nature à intéresser les lecteurs de *Mathesis* :

« Vers la fin de l'année 1877, j'avais écrit un mémoire assez volumineux sur les normales aux coniques et je me proposais alors de le publier, d'une façon ou d'une autre. Mais le manuscrit me fut dérobé un certain jour par quelque pauvre diable qui se méprit singulièrement, je suppose, sur la nature des papiers qui eurent la mauvaise chance d'exciter sa convoitise. C'était d'ailleurs une fort petite perte et je n'eus pas le courage de rédiger à nouveau ces recherches, dont les résultats se sont, peu à peu, effacés de ma mémoire. Quelques-unes des propriétés que j'avais trouvées ont été pourtant communiquées au *Congrès de Paris*, en 1878, et à la *Nouvelle Correspondance*, 1878, p. 279. Le hasard vient de me faire retrouver deux ou trois théorèmes qui sont, peut-être, assez élégants pour être mis au jour. Dans tous les cas, la méthode exposée dans la note que je vous adresse, intéressera sans doute plusieurs lecteurs de votre excellent journal. Si vous en jugez ainsi, vous pourrez publier cette note en prévenant ceux qui la liront, que le sujet est loin d'être épuisé et qu'ils pourront trouver, par le procédé indiqué, beaucoup d'autres théorèmes, plus simples, probablement, que ceux que je vous signale. »

La méthode suivie par notre honorable correspondant dans sa *Géométrie analytique*, t. I, p. 399, pour trouver l'équation du cercle de Joachimsthal est très simple.

Sur une ellipse donnée Γ, prenons un point quelconque $D(x_1, y_1)$, et sur la normale menée en ce point, choisissons un point arbitraire $M(\alpha, \beta)$; soient A, B, C les points d'incidence des trois autres normales issues de M. Les coordonnées des points A, B, C, D vérifient les deux équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad xy+\frac{b^2\beta}{c^2}x-\frac{a^2\alpha}{c^2}y=0.$$

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point D, ces équations deviennent

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{2Xx_1}{a^2}+\frac{2Yy_1}{b^2}=0,$$

$$XY+X\left(\frac{b^2}{c^2}\beta+y_1\right)+Y\left(x_1-\frac{a^2}{c^2}\alpha\right)=0,$$

ou encore

$$-\frac{X}{a^2}(X+2x_1)=\frac{Y}{b^2}(Y+2y_1),$$

$$-X\left(Y+y_1+\frac{b^2}{c^2}\beta\right)=Y\left(x_1-\frac{a^2}{c^2}\alpha\right).$$

Divisant ces égalités l'une par l'autre et ordonnant le résultat, on obtient

$$Y^2+Y\left(3y_1+\frac{b^2}{c^2}\beta\right)-X\frac{b^2}{a^2}\left(x_1-\frac{a^2}{c^2}\alpha\right)+2y_1\left(y_1+\frac{b^2}{c^2}\beta\right)$$
$$+2x_1\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c^2}\alpha-x_1\right)=0, \qquad (1)$$

équation qui est, nécessairement, vérifiée par les coordonnées des points A, B, C. Un calcul analogue, ou, préférablement, une permutation des lettres (X, Y), (x_1, y_1), (α, β), (a, b) donne

$$X^2+X\left(3x_1-\frac{a^2\alpha}{c^2}\right)-Y\frac{a^2}{b^2}\left(y_1+\frac{b^2}{c^2}\beta\right)+2x_1\left(x_1-\frac{a^2\alpha}{c^2}\right)$$
$$-2y_1\frac{a^2}{b^2}\left(y_1+\frac{b^2}{c^2}\beta\right)=0. \qquad (2)$$

Ajoutons les équations (1) et (2), le résultat représente le cercle ABC. En revenant aux axes primitifs, on trouve l'équation (J) rapportée ci-après. Si l'on pose

$$u=a^2+\frac{b^2\beta}{y_1}=b^2+\frac{a^2\alpha}{x_1},$$

et si l'on tient compte de la relation

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1=0,$$

on peut mettre l'équation du cercle de Joachimsthal sous cette forme remarquable

$$x^2+y^2+xx_1+yy_1=u\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+1\right). \qquad (3)$$

On voit immédiatement que l'équation (3) est vérifiée par les coordonnées $(-x_1, -y_1)$ du point D' diamétralement opposé à D, de sorte que le cercle ABC passe par D' (théorème de Joachimsthal). Si l'on égale à zéro les deux membres de (3), on obtient l'équation du cercle décrit sur OD' comme diamètre, et celle de la tangente au point D' de l'ellipse Γ (O est le centre de Γ); donc le cercle ABC passe par la projection de O sur la tangente. Ce dernier théorème a été trouvé presque simultanément et indépendamment par Laguerre, d'abord, et par M. de Longchamps ensuite. Laguerre n'a pas fait connaître la démonstration qui l'avait conduit à cette propriété; il l'a simplement énoncée, avec plusieurs autres, dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, de l'année 1877.

Les développements précédents étaient nécessaires pour faciliter la lecture de l'article suivant :

1. Dans une note communiquée à l'Association Française, au congrès de Paris, en 1878, nous avons donné l'équation du cercle de Joachimsthal sous la forme

$$x^2+y^2+x\left(\frac{c^2x_1}{a^2}-\alpha\right)-y\left(\frac{c^2y_1}{b^2}-\beta\right)=\frac{b^2x_1^2}{a^2}+\frac{a^2y_1^2}{b^2}+\alpha x_1+\beta y_1. \quad (J)$$

On peut écrire cette équation, d'une infinité de façons différentes, sous la forme

$$U = P,$$

U étant une expression du second degré commençant par x^2+y^2, et P désignant une expression linéaire. Le cercle de Joachimsthal passe ainsi par les points communs au cercle et à la droite qui correspondent respectivement aux équations $U = 0$, $P = 0$.

Nous allons indiquer quelques propriétés du cercle de Joachimsthal, trouvées par le procédé précédent.

1. L'équation (J) peut s'écrire ainsi :

$$x^2+y^2-\alpha x-\beta y=-c^2\frac{xx_1}{a^2}+c^2\frac{yy_1}{b^2}+\dots.$$

Le premier membre, égale à zéro, représente un cercle Δ passant par le centre O de Γ et ayant son centre au milieu de la droite OM ; le second membre, égale à zéro, représente une droite ∂ parallèle à la tangente au point D″, symétrique de D par rapport à un axe de Γ. Cette droite ∂ étant l'axe radical des cercles J, Δ, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Soient A, B, C, D *les pieds des quatre normales menées d'un point* M *à une conique* Γ, *de centre* O. *La perpendiculaire abaissée du centre du cercle* ABC *sur la corde commune à* Γ *et au cercle osculateur en* A, *et les trois autres droites analogues concourent au milieu* O′ *de* OM.

2. Écrivons maintenant l'équation (J) sous la forme

$$x^2+y^2-\alpha x-\beta y-x_1^2-y_1^2-\alpha x_1-\beta y_1$$
$$=c^2\left(\frac{yy_1}{b^2}-\frac{xx_1}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{x_1^2}{a^2}\right).$$

On peut alors observer que l'équation

$$x^2+y^2-\alpha x-\beta y-x_1^2-y_1^2-\alpha x_1-\beta y_1=0,$$

représente un cercle ayant pour centre O′ et passant par D′ ; et que, d'autre part,

$$\frac{yy_1}{b^2}-\frac{xx_1}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{x_1^2}{a^2}=0,$$

représente la corde commune à Γ et au cercle osculateur correspondant à D′. D'où le théorème :

Soient A, B, C, D *les pieds des normales menées d'un point* M *à une conique* Γ, *de centre* O. *Le cercle* ABC *passe, comme on sait, par le point* D′

symétrique de D *par rapport à* O. *Il passe aussi par* D'', *second point d'intersection du cercle ayant pour centre* O', *milieu de* OM, *et* O'D' *pour rayon, avec la corde commune à* Γ *et au cercle osculateur en* D'.

4. Écrivons encore l'équation (J) sous la forme

$$x^2+y^2-(\alpha-x_1)x-(\beta-y_1)y-\alpha_1 x-\beta_1 y=\frac{b^2x_1}{a^2}(x+x_1)+\frac{a^2y_1}{b^2}(y+y_1).$$

Le premier membre, égalé à zéro, représente le cercle décrit sur MD' comme diamètre. D'autre part,

$$\frac{b^2x_1}{a^2}(x+x_1)+\frac{a^2y_1}{b^2}(y+y_1)=0$$

caractérise la droite qui joint D' au point D''', où la normale en D rencontre l'ellipse. Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Le cercle ABC, *considéré ci-dessus, passe par la projection de* M *sur la corde supplémentaire de la normale en* D, *relativement au diamètre* DD'.

QUESTIONS D'EXAMEN.

Concours d'admission à l'École Polytechnique de Paris.

(5 juin 1889).

Étant donnés, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires OX et OY et deux séries de paraboles; les unes (P), de paramètre p, tangentes à OY du côté des X positifs, et ayant leur axe parallèle à OX ; les autres (Q), de paramètre q, tangentes à OX du côté des Y positifs et ayant leur axe parallèle à OY. On demande

1° de trouver le lieu décrit par le centre d'une conique qui se déplace sans changer de grandeur, en passant constamment par les points communs à l'une des paraboles (P) et à l'une des paraboles (Q);

2° de démontrer que, quand on associe une parabole P et une parabole Q, de manière que la droite qui joint leurs foyers respectifs reste constamment parallèle à une direction donnée, la somme des angles que font les tangentes communes à ces deux paraboles avec un axe fixe, OX par exemple, demeure constante; et de trouver, dans ces conditions le lieu du point de rencontre des axes des deux paraboles;

3° de placer une parabole P et une parabole Q de façon qu'elles aient trois points communs confondus en un seul, et de calculer, pour cette position des deux courbes, les coordonnées de leur point commun, et le coefficient angulaire de leur tangente commune en ce point;

4° de démontrer que tout triangle circonscrit à la fois à l'une quelconque des paraboles P et à l'une quelconque des paraboles Q est inscrit dans une conique fixe, et de trouver l'équation de cette conique.

Concours d'admission à l'École Navale.

(4 juin 1889, de 7 à 10 1/2 h.).

Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point M dont les coordonnées sont (a, b), on demande de mener par le point M deux droites MA, MA′ faisant entre elles l'angle donné V et telles que les quatre points A, B, A′, B′ de rencontre avec les axes (A, A′ sont situés sur Ox) soient sur une même circonférence.

1° Le problème admet pour chaque valeur de V deux solutions : équations des deux circonférences correspondant à chacune de ces solutions; les distinguer.

2° Le point M étant fixe, on suppose que l'angle V varie d'une manière continue : démontrer que le lieu des centres de toutes les circonférences est une ligne droite et qu'elles ont même axe radical : étudier comment varie la grandeur du rayon, trouver ses valeurs minima.

3° L'angle V étant constant, on suppose que le point M décrit une circonférence autour du point O comme centre : trouver le lieu des centres de chacune de ces circonférences.

Solution. Équation de l'une des circonférences

$$\{y - b - m(x - a)\}\{y - b - m'(x - a)\} + 2\lambda xy = 0, \qquad (1)$$

sous les conditions

$$mm' = 1, \quad m + m' = 2\lambda, \quad \operatorname{tg} V = \frac{m - m'}{1 + mm'} = \pm\sqrt{\lambda^2 - 1}. \qquad (2)$$

La dernière égalité donne

$$\lambda = \pm\frac{1}{\cos V}.$$

L'équation (1) peut donc s'écrire ainsi :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 \pm \frac{2}{\cos V}(ay + bx - ab) = 0. \qquad (3)$$

Les coordonnées du centre et le rayon sont donnés par

$$\alpha = a \mp \frac{b}{\cos V}, \quad \beta = b \mp \frac{a}{\cos V}, \quad R = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{\cos^2 V} \mp \frac{2ab}{\cos V}}.$$

2° Soient MP, MQ des perpendiculaires à OX, OY. Toutes les circonférences AB A'B' ont pour axe radical la droite PQ représentée par $ay + bx - ab = 0$.

L'équation du lieu des centres est $a(\alpha - a) - b(\beta - b) = 0$; ce lieu est donc la perpendiculaire abaissée de M sur PO.

L'égalité $m\,m' = 1$ indique (ce qui est évident à *priori*) que les droites MA, MA' sont également inclinées sur la bissectrice MI de l'angle PMQ. Lorsque ces droites coïncident avec MP, MQ, on a cos V = 0, et la circonférence AB A'B' est remplacée par la droite PQ (jointe à la droite de l'infini). Supposons ensuite que ces droites passent à l'intérieur de l'angle PMQ et soient MA_1, MA_1' leurs symétriques par rapport à MP, soit V l'angle aigu AMA'. Les circonférences qui correspondent aux deux angles AMA', A_1MA_1' sont représentées par l'équation (3) où l'on prend respectivement, les signes — et + devant $\frac{2}{\cos V}$; c'est ce que l'on reconnaît par les valeurs de α et β (on suppose a et b positifs).

Les lignes MA, MA' peuvent se confondre avec MI et les lignes MA_1, MA_1' avec une perpendiculaire à MI; alors les circonférences deviennent tangentes à OX, OY et $R = a + b$. La figure montre aisément que ces circonférences correspondent à des minima de R. On peut également observer que dans un faisceau de cercles, à points fondamentaux imaginaires, le rayon augmente à mesure que le centre s'éloigne de l'axe radical, de sorte que la discussion de R peut être appuyée sur celle de α et β....

3° Il faut éliminer a et b entre les équations

$$a^2 + b^2 = r^2, \quad \alpha = a \pm \frac{b}{\cos V}, \quad \beta = b \pm \frac{a}{\cos V}, \quad \text{etc.} \qquad \text{(J. N.)}$$

BIBLIOGRAPHIE.

A Treatise on Spherical Trigonometry, and its application to Geodesy and Astronomy, with numerous examples, by J. CASEY, LL. D., F. R. S., Professor of the Higher mathematics and Mathematical Physics in the Catholic University of Ireland. Dublin, Hodges, Figgis and C°; London, Longmans, Green and C°, 1889. Un volume de XV-165 pages avec 62 figures dans la texte.

La Trigonométrie plane, publiée en 1888, a été signalée presque aussitôt, dans *Mathesis* (t. VIII, pp, 114 et 222). La Trigonométrie sphérique ne devait point tarder à paraître et nous pouvons aujourd'hui la recommander à l'attention du public mathématique, car nous y retrouvons les qualités que nos lecteurs ont eu depuis longtemps l'occasion de reconnaître dans les ouvrages du savant professeur de l'Université catholique de Dublin.

Voici l'indication sommaire des matières contenues dans le Traité :

Chapitre I. Géométrie sphérique. — Propriétés des grands cercles. Définition et construction des triangles sphériques (1-18).

Ch. II. Relations entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique. — Trois classes de formules, suivant que celles-ci renferment quatre, cinq ou six éléments du triangle (19-47).

Ch. III. Résolution des triangles sphériques. — Triangles rectangles et triangles obliquangles. Types de calcul et exercices numériques proposés (48-66).

Ch. IV. Applications diverses. — Théorie des transversales. Cercles inscrits. Cercles circonscrits. Centre des moyennes distances (67-84).

Ch. V. Excès sphérique. — Aire du triangle sphérique, théorème de Lexell (85-98).

Ch. VI. Petits cercles sur la sphère. — Axe radical. Centre de similitude. Pôles et polaires. Puissance de deux cercles (99-118).

Ch. VII. Inversions. — Inversion dans l'espace. Projection stéréographique (119-127).

Ch. VIII. Polyèdres. — Polyèdres réguliers. Parallélipipèdes et tétraèdres (128-142).

Ch. IX. Applications de la trigonométrie sphérique à la géodésie et à l'astronomie (143-155).

On comprend que les applications données comme exemples dans ce dernier chapitre soient tout élémentaires; ce sont celles que l'on rencontre au début de l'étude de la géodésie et de l'astronomie: réduction d'un angle à l'horizon; théorème de Legendre; relations entre les quatre systèmes de coordonnées sphériques employées en astronomie.

Comme la plupart des ouvrages ayant trait à l'enseignement classique de l'Angleterre, celui-ci se recommande par le grand nombre d'exemples proposés : 509 questions, dont 29 exercices numériques, sont groupées par séries à la suite de chacun des chapitres. Elles renferment d'intéressantes applications pour les professeurs comme pour les étudiants. L'auteur en a emprunté le sujet aux recueils mathématiques les plus justement réputés. Nous sommes heureux de constater ici surtout la part qui revient à M. J. Neuberg, dans la Trigonométrie sphérique de M. Casey, comme dans sa Trigonométrie plane, ainsi que l'auteur nous l'apprend d'ailleurs dans la Préface. (H. Brocard.)

Mathématiques et Mathématiciens, pensées et curiosités, recueillies par A. Rebière. Paris, Nony et Cie, 1889. Un volume in-8° de 282 pages. Prix : fr. 3,50. Édition de luxe : fr. 7,50.

Préface : « Ce livre, sans figures et sans équations, peut être facilement parcouru par le lecteur. Nous espérons qu'il y trouvera quelque profit et quelque agrément. Dans la première partie, qui est la plus importante, nous réunissons divers aperçus sur les Mathématiques, empruntés aux philosophes, aux historiens et surtout aux mathématiciens eux-mêmes. Dans les deux parties suivantes, se trouvent les anecdotes, les paradoxes, les singularités. Enfin les deux dernières parties contiennent un choix de problèmes célèbres ou piquants. »

Le livre tient les promesses de la préface : il est instructif, il est amusant. La valeur de la première partie serait augmentée si l'on en supprimait certaines citations de Comte, Bourdeau, Ch. Simon, M. Marie, Condillac, Poisson, H. Spencer, Macé, Rousseau, Gratry, qui, suivant nous, contiennent des propositions inexactes, vagues, ou sans portée. Parmi les extraits les meilleurs, signalons ceux qui sont empruntés à Pascal, à Duhamel, à Bertrand, à un anonyme, qui, sans doute, est M. Rebière, et surtout à M. Tannery. C'est à celui-ci que l'on doit le passage suivant : « *La notion de l'infini, dont il ne faut pas faire un mystère en Mathématiques, se réduit à ceci :* **Après chaque nombre entier, il y en a un autre.** Nous appelons, sur cet aphorisme, l'attention de ceux qui s'imaginent qu'il y a une métaphysique du calcul infinitésimal.

Le chapitre le meilleur est celui qui est consacré au calcul des probabilités, le moins bon celui où l'auteur parle de l'histoire des mathématiques. Ce dernier est extrêmement superficiel ; l'auteur ne nomme pas Cantor sur l'histoire des mathématiques ; il ne fait nulle mention d'Euler, de Gauss, d'Abel, de Jacobi ni de Riemann ; parmi les journaux de mathématiques, il ne cite aucun recueil étranger, pas même celui de Crelle.

Malgré ce défaut et d'autres moins graves que nous signalons dans un compte rendu plus détaillé publié par la *Revue des questions scientifiques*, *Mathématiques et Mathématiciens* est un livre intéressant ; mais il ne deviendra un bon livre que si l'on en publie une seconde édition, sérieusement revue et corrigée. (P. M).

Kort begrip der Rekenkunde door E. Gelin, vertaald door P. Kerkhofs. I. Geheele Getallen. Brussel, Schepens ; Namen, Wesmael-Charlier ; Gent, Leliaert, Siffer en C^ie^ ; Huy, chez l'auteur. Un volume cartonné in-12 de 96 pages ; prix 75 centimes.

Traduction flamande de l'excellent *Précis d'Arithmétique* de M. l'Abbé Gelin, (Première partie : Nombres entiers). Les définitions et les règles qu'il est le plus nécessaire d'inculquer dans la mémoire des élèves sont imprimés en caractère gras ; un bon choix de problèmes termine l'ouvrage.

SUPPLÉMENT.

La présente livraison est accompagnée d'un supplément intitulé : *Note sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants*, par l'abbé B.-I. Clasen. Nous engageons nos jeunes lecteurs à s'initier à la nouvelle méthode, en lisant d'abord, la plume à la main, l'exemple de la page 10 ; puis s'ils connaissent la théorie des déterminants, l'exposition générale de la méthode que nous avons donnée dans notre rapport, p. 33. A la page 35, ligne 4, au lieu de $-(b)(acad)$, il faut lire $-(ab)(acd)$. (P. M.)

LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE RÉDUITE A UNE SEULE FORMULE,

d'après J. Ozanam, professeur de mathématiques.

Dans un petit traité publié en 1699 et aujourd'hui presque introuvable, Ozanam (1640-1717) a indiqué, sans démonstration, une curieuse formule approximative donnant une méthode empirique de résolution des triangles rectangles et, par suite, de tous les triangles, sur laquelle il paraît utile d'appeler l'attention.

Elle a été récemment exposée par M. le colonel F. A. Protche, dans un travail intitulé : *Manière de résoudre les triangles sans le secours des logarithmes*, et publiée dans le t. LI, 1887, des *Mémoires de la société académique de l'Aube* (pp. 149-162).

Le traité original a pour titre : *Nouvelle trigonométrie, où l'on trouve le moyen de calculer toutes sortes de triangles rectilignes sans les tables de sinus, et aussi par les tables de sinus, avec une application de la trigonométrie à la mesure des lignes droites accessibles et inaccessibles*, par Ozanam, professeur de mathématiques .

Ce moyen est fondé sur la remarque suivante : Dans un triangle rectangle scalène ABC, le nombre des degrés du plus petit angle, divisé par 172, est à peu près égal au rapport du plus petit côté à la somme de l'autre côté et du double de l'hypoténuse de sorte que

$$\frac{B}{172} = \frac{b}{c+2a}.$$

Ozanam ne donne pas l'origine de cette proportion : « C'est, dit-il, un principe dont je n'ai pas d'autre démonstration que l'expérience, mais qui donne des résultats tellement approchés, que l'erreur à craindre en l'employant est moindre que celles, absolument fatales, qui ont pour causes multiples les imperfections de l'observation, qu'elles proviennent de la malfaçon des instruments ou du fait des observateurs. »

On pourra juger de cette approximation sur les exemples suivants où B_1 désigne la valeur de B calculée par la formule d'Ozanam :

b	c	a	sin B	B_1	B
1	1	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	45,05	45
3	4	5	0,6	36,85	36,83...
161	240	289	0,557	33,85	33,83...
1	2	$\sqrt{3}$	0,50	30,00069	30

b	c	a	sin B	B_1	B
8	15	17	0,470	28,08	$28,16 + \cdots$
1	$\sqrt{15}$	4	0,25	14,487	$14,5 - \cdots$
1	$\sqrt{63}$	8	0,125	7,18	$7,166 + \cdots$
1	$\sqrt{80}$	9	0,111	6,382	$6,33 + \cdots$
1	$\sqrt{143}$	12	0,08333...	4,78	$4,666 + \cdots$

Le cas le plus défavorable pour l'application de cette formule est celui du triangle rectangle isoscèle, pour lequel on a $B = 45°$, valeur maxima du plus petit angle.

C'est, d'ailleurs, probablement en appliquant la recherche au triangle ayant un angle de 30° qu'Ozanam a été amené à ce résultat. On a, en effet

$$30(\sqrt{3} + 4) = 171,96,$$

soit très sensiblement 172, tandis que la formule donnerait

$$\frac{172}{4 + \sqrt{3}} = 30,00069.$$

L'accord est remarquablement satisfaisant.

Ceux de nos lecteurs qui sont curieux de vérifier cette formule sur d'autres triangles seront amplement dédommagés de leur peine par le degré d'exactitude qu'elle leur fournira.

Il serait, d'ailleurs, intéressant de tenter une démonstration directe de cette formule. (H. Brocard.)

Note. Voici la démonstration de la curieuse formule d'Ozanam, qui au fond, appartient à la trigonométrie générale, et, par suite, peut même servir en trigonométrie sphérique.

I. La valenr β, en parties du rayon, d'un angle de B degrés, est

$$\beta = \frac{2\pi B}{360},$$

ou, approximativement,

$$\beta = \frac{3B}{172}.$$

On a, approximativement aussi,

$$\sin B^0 = \sin\beta = \beta - \tfrac{1}{6}\beta^3, \quad \cos B^0 = \cos\beta = 1 - \tfrac{1}{2}\beta^2,$$
$$2 + \cos B^0 = 2 + \cos\beta = 3 - \tfrac{1}{2}\beta^2.$$

Or, si B° est un des angles aigus d'un triangle rectangle, le plus petit par exemple, on a

$$\frac{b}{2a+c}=\frac{a\sin B^\circ}{2a+a\cos B^\circ}=\frac{\sin B^\circ}{2+\cos B^\circ}=\frac{\sin\beta}{2+\cos\beta}.$$

D'où, approximativement, la formule d'Ozanam :

$$\frac{b}{2a+c}=\frac{\beta-\frac{1}{6}\beta^3}{3-\frac{1}{2}\beta^2}=\frac{\beta}{3}=\frac{B}{172}.$$

II. On peut enfermer la valeur du rapport $(b:2a+c)$ entre deux limites l'une inférieure, l'autre supérieure à $(B:172)$. La fonction

$$f(\beta)=\frac{\beta}{3}-\frac{\sin\beta}{2+\cos\beta}=\frac{\beta}{3}-\frac{b}{2a+c}$$

nulle pour $\beta=0$, a une dérivée positive et toujours croissante, savoir

$$f'(\beta)=\frac{(1-\cos\beta)^2}{3(2+\cos\beta)^2}.$$

Par suite, comme on le voit en considérant la courbe qui a pour coordonnées β et $f(\beta)$, le rapport $[f(\beta):\beta]$ croît de 0 à

$$\frac{1}{3}-\frac{\sin\frac{1}{4}\pi}{\frac{1}{4}\pi(2+\cos\frac{1}{4}\pi)}=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi(2\sqrt{2}+1)},$$

quand β croît de 0 à $\frac{1}{4}\pi$. On a donc, pour les valeurs intermédiaires de β,

$$0<\frac{1}{3}-\frac{\sin\beta}{\beta(2+\cos\beta)}>\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi(2\sqrt{2}+1)};$$

ou encore successivement,

$$\frac{1}{3}>\frac{\sin\beta}{\beta(2+\cos\beta)}>\frac{4}{\pi(2\sqrt{2}+1)},$$

$$\frac{\beta}{3}>\frac{\sin\beta}{2+\cos\beta}>\frac{4\beta}{\pi(2\sqrt{2}+1)},$$

$$\frac{2\pi B}{3.360}>\frac{b}{2a+c}>\frac{8\pi B}{360\,\pi(2\sqrt{2}+1)},$$

$$\frac{B}{540\times0{,}3183}>\frac{B}{540\pi^{-1}}>\frac{b}{2a+c}>\frac{B}{45(2\sqrt{2}+1}>\frac{B}{45(2\times1{,}41422+1)}.$$

Donc enfin

$$\frac{B}{171{,}88}>\frac{b}{2a+c}>\frac{B}{172{,}28}.$$

La formule d'Ozanam est donc établie rigoureusement.

On peut remplacer avantageusement 172 par 171,9 de 0° à 28°; par 171,1 de 37° à 40°; par 171,2 de 41° à 44°; enfin par 171,3 de 44° à 45°. Si l'on emploie la division décimale de l'angle droit, il faut remplacer 172 par 191. (P. MANSION.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 558.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 56.)

On donne, sur un plan, des ellipses O, O'. *Soient* X, X' *deux points de ces courbes ayant même anomalie excentrique. Trouver le lieu du point* Z *tel que le triangle* ZXX' *soit semblable à un triangle donné.* (LAISANT.)

Solution par MM. DÉPREZ *et* STUYVAERT. Prenons les axes de l'ellipse O pour axes des coordonnées. Soient p, q les coordonnées du centre de la seconde ellipse, β l'angle des grands axes des deux courbes. Les coordonnées des points X, X' seront

$$\begin{cases} x_1 = a\cos\varphi, \\ y_1 = b\sin\varphi. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = p + a'\cos\varphi\cos\beta - b'\sin\varphi\sin\beta, \\ y_2 = q + a'\cos\varphi\sin\beta + b'\sin\varphi\cos\beta. \end{cases}$$

Désignons par α l'angle ZXX', par K.XX' la longueur XZ; α et K sont des quantités données. Les coordonnées de Z par rapport au système d'axes rectangulaires XX', XY' sont K.XX' cos α, K.XX' sin α; une transformation de coordonnées donne pour les coordonnées de Z relatives aux axes de l'ellipse O, γ étant l'inclinaison de XX' sur le grand axe de cette courbe :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \mathrm{K.XX'}\cos\alpha\cos\gamma - \mathrm{K.XX'}\sin\alpha\sin\gamma, \\ &= x_1 + \mathrm{K}\cos\alpha\,(x_2 - x_1) - \mathrm{K}\sin\alpha\,(y_2 - y_1), \\ y &= y_1 + \mathrm{K}\cos\alpha\,(y_2 - y_1) + \mathrm{K}\sin\alpha\,(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Si l'on y remplace x_1, y_1, x_2, y_2 par les valeurs indiquées ci-dessus et que des formules ainsi obtenues, on tire cos φ, sin φ pour les substituer dans la relation $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, on obtient une équation du 2e degré, qui représente le lieu du point Z.

Question 569.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 126.)

Trouver l'enveloppe des cercles décrits sur les cordes focales d'une conique comme diamètres. (Gob.)

Solution géométrique, d'après M. Mandart(*). Une sécante menée par le foyer F rencontrant la conique en M, N, et la directrice correspondante en P, soient M', N', F' les projections de M, N, F sur la directrice. On a

$$PM : PN = MM' : NN' = MF : FN;$$

donc PF est divisé harmoniquement par MN, et l'on a, par un théorème connu (en observant la règle des signes des segments d'une même droite) :

$$\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{2}{FP}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{2}{PF}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{M'M} + \frac{1}{N'N} = \frac{2}{F'F}. \tag{2}$$

Si e désigne l'excentricité numérique ($c : a$), l'égalité (2) donne aussi :

$$\frac{1}{FM} - \frac{1}{FN} = \pm \frac{2}{e.FF'}. \tag{3}$$

Faisons une inversion de la figure en prenant pour pôle d'inversion le foyer F; soient m, n, p, f' les inverses de M, N, P, F'. Les égalités (2) et (3) donnent immédiatement les suivantes :

$$Fm + Fn = 2Fp, \quad Fm - Fn = \pm \frac{2}{e} Ff'.$$

Elles indiquent que le milieu de mn parcourt la circonférence inverse de la directrice de la conique, et que le segment mn est constant; donc les points m et n appartiennent à un limaçon ayant pour cercle directeur Σ

(*) Nous reproduisons la solution de M. Mandart en y introduisant une démonstration géométrique de la transformation de la conique en limaçon de Pascal.

Cette transformation résulte *immédiatement* du théorème suivant : Le lieu des pôles des tangentes menées à une circonférence Δ, par rapport à une seconde circonférence Δ' est une conique ayant pour foyer le centre de Δ' ; en effet, ce lieu est une courbe inverse de la podaire du centre de Δ' par rapport à Δ.

la transformée de la directrice; le paramètre du limaçon est égal au diamètre de Σ multiplié par $\frac{a}{c}$.

Il est évident que la circonférence décrite sur MN comme diamètre se transforme en la circonférence qui a pour diamètre mn. Mais cette dernière a pour enveloppe deux circonférences concentriques avec le cercle directeur du limaçon; cependant, l'une de ces circonférences se confond avec la circonférence directrice, lorsque $e = 1$, et elle se réduit à un point, lorsque $e = 2$. Donc l'enveloppe demandée se compose généralement de deux circonférences. Dans le cas d'une parabole, elle se compose d'une circonférence et de la directrice; dans le cas d'une hyperbole dont les asymptotes font entre elle un angle de 120°, la circonférence variable passe par un point fixe de l'axe focal et touche une circonférence fixe.

Solution analytique, par MM. Mosnat et Verniory. Les rayons vecteurs FM, FN des extrémités d'une corde focal MFN sont donnés par

$$FM = \frac{p}{1 - e\cos\omega}, \quad FN = \frac{p}{1 + e\cos\omega}.$$

Donc, si Q est le milieu de MN, on a

$$QM = \tfrac{1}{2}(FM + FN) = \frac{p}{1 - e\cos^2\omega}, \quad FQ = \tfrac{1}{2}(FM - FN) = \frac{pe\cos\omega}{1 - e\cos^2\omega}.$$

En prenant Fx et une perpendiculaire Fy pour axes, on a pour équation du cercle décrit sur MN comme diamètre :

$$x^2 + y^2 - 2\frac{pe\cos\omega}{1 - e^2\cos^2\omega}(x\cos\omega + y\sin\omega) - \frac{p^2}{1 - e^2\cos^2\omega} = 0(*)$$

ou

$$(x^2 + y^2)(\operatorname{tg}^2\omega + 1 - e^2) - 2pe(x + y\operatorname{tg}\omega) - p^2(1 + \operatorname{tg}^2\omega) = 0.$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe, on écrit que cette équation en tg ω a une racine double, ce qui donne, après une décomposition du résultat en facteurs :

$$(x^2 + y^2)(1 \pm e) - pex - p^2 = 0.$$

Donc l'enveloppe se compose généralement de deux circonférences.

(*) Les coordonnées du centre Q sont égales à FQ cos ω, FQ sin ω; la constante de l'équation du cercle est égale à la puissance de F ou à — FM. FN.

Mais la seconde circonférence, si l'on fait $e = 1$ (parabole), ou $e = 2$ (hyperbole), est remplacée par une droite (directrice de la parabole) ou un point.

Généralisation par M. Déprez. Soit à chercher l'enveloppe des circonférences Δ qui ont pour diamètres les cordes d'une conique Γ menées par un point fixe quelconque O. Ce point étant pris pour origine d'axes rectangulaires, soient

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0, \quad y = mx$$

les équations de la courbe et d'une sécante OMN. On trouve aisément pour l'équation de la circonférence décrite sur la corde MN comme diamètre

$$(x^2 + y^2)(Am^2 + 2Bm + C) + 2(x + my)(Dm + E) + F(1 + m^2) = 0.$$

L'équation de l'enveloppe s'obtient en égalant à zéro le discriminant de l'égalité précédente par rapport à m; on trouve

$$[B(x^2 + y^2) + Dx + Ey]^2$$
$$- [A(x^2 + y^2) + 2Dy + F][C(x^2 + y^2) + 2Ex + F] = 0,$$

équation d'une quartique (d'une cubique dans le cas d'une parabole) passant par les points cycliques.

Note. La seconde corde commune à la circonférence Δ et à la conique Γ passe par un point fixe et l'intersection de MN avec cette corde engendre une hyperbole équilatère (N. A. M., 1861, p. 66). Toutes les circonférences Δ sont de puissance constante par rapport à un point fixe O′ (Steiner, *Œuvres complètes*, t. II, p. 666); le centre parcourant une conique, l'enveloppe de Δ est une anallagmatique du 3e ou du 4e ordre.

Question 579.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 170.)

On donne un triangle ABC *et un point fixe* O. 1° *Si les droites* AM, BM, CM *qui joignent les sommets à un point quelconque* M *rencontrent* BO, CO, AO *respectivement en* μ_1, μ_2, μ_3, *et* CO, AO, BO *en* ν_1, ν_2, ν_3, *démontrer que les droites* $C\mu_1$, $A\mu_2$, $B\mu_3$, *concourent en un point* M′ *et les droites* $B\nu_1$, $C\nu_2$, $A\nu_3$, *en un point* M″. 2° *Lorsque* M *décrit une droite*, M′ *et* M″ *décrivent des coniques. Les points* M′ *et* M″ *parcourent, en général, des courbes du même ordre.* (Cl. Servais.)

Solution par M. E. Lemoine. 1° Les trois coniques formées par les couples de droites (CM, BO), (BM, AO), (AM, CO) ont pour corde com-

mune MO; donc les cordes non communes $B\mu_3$, $A\mu_2$, $C\mu_1$ concourent en un même point M'. On verrait de même que $A\nu_3$, $C\nu_2$, $B\nu_1$ concourent en un point M''.

On peut dire aussi : les droites $\mu_1 B$, $\mu_2 C$, $\mu_3 A$ se coupent en O, et les droites $\mu_1 A$, $\mu_2 B$, $\mu_3 C$ se coupent en M; donc les triangles ABC, $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3$ étant doublement homologiques, le sont triplement et les droites $C\mu_1$, $A\mu_2$, $B\mu_3$ concourent en un même point M'. Un raisonnement analogue s'applique aux triangles ABC, $\nu_1\ \nu_2\ \nu_3$.

Soient (p, q, r) les coordonnées de O, et (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ celles de M, M', M''. On trouve facilement

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = \frac{1}{\beta r} : \frac{1}{\gamma p} : \frac{1}{\alpha q}, \quad \alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{\gamma' q} : \frac{1}{\alpha' r} : \frac{1}{\beta' p},$$

$$\alpha'' : \beta'' : \gamma'' = \frac{1}{\gamma q} : \frac{1}{\alpha r} : \frac{1}{\beta p}, \quad \alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{\beta'' r} : \frac{1}{\gamma'' p} : \frac{1}{\alpha'' q},$$

d'où

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = \frac{p\gamma''}{r} : \frac{q\alpha''}{p} : \frac{r\beta''}{q}.$$

Donc si M parcourt la droite $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$, les points M' et M'' décrivent les coniques

$$\frac{Arp}{\gamma'} + \frac{Bpq}{\alpha'} + \frac{Cqr}{\beta'} = 0, \quad \frac{Apq}{\beta''} + \frac{Bqr}{\gamma''} + \frac{Crp}{\alpha''} = 0.$$

Si M' décrit une courbe d'ordre m, représentée par l'équation homogène $\varphi(\alpha', \beta', \gamma') = 0$, le lieu de M'' aura évidemment pour équation $\varphi(p^2 q\gamma'', q^2 r\alpha'', r^2 p\beta'') = 0$.

Remarques. I. Si M et O sont les points de Brocard, M' et M'' sont les points (a^2, b^2, c^2), (a^{-2}, b^{-2}, c^{-2}), déjà souvent rencontrés.

II. La première partie de la question 579 n'est qu'une forme d'une partie de la proposition que nous avons donnée (J. M. E.; *exercice* XV, p. 270, 1883). Cette proposition nous permet de compléter le théorème de M. Servais par ce qui suit :

Les droites $\mu_1\nu_2$, $\mu_2\nu_3$, $\mu_3\nu_1$ ***se coupent en un point*** M''', ***et les trois points*** M', M'', M''' ***sont en ligne droite.***

Les coordonnées de M''' sont

$$p\alpha(q\gamma + r\beta), \quad q\beta(r\alpha + p\gamma), \quad r\gamma(p\beta + q\alpha).$$

III. *Si* M *et* O *sont les points de Brocard*, M''' *a pour coordonnées*

$$\frac{a^4+b^2c^2}{a},\quad \frac{b^4+c^2a^2}{b},\quad \frac{c^4+a^2b^2}{c}, \tag{1}$$

et la droite M'M''M''' contient aussi le point

$$\frac{a^4-b^2c^2}{a},\quad \frac{b^4-c^2a^2}{b},\quad \frac{c^4-a^2b^2}{c}. \tag{2}$$

Les points (1) et (2) se présentent souvent dans la geométrie du triangle.

Note. MM. Emmerich, Gérondal, Mineur et Stuyvaert nous ont également envoyé de bonnes solutions analytiques de la question 579. M. Emmerich adopte pour coordonnées d'un point les quotients des coordonnées normales de ce point divisées par les coordonnées de même nom du point fixe; autrement dit, il prend O pour *point-unité*. Les coordonnées de M' et M'' sont alors, en fonction des coordonnées (λ, μ, ν) de M,

$$\frac{1}{\mu},\ \frac{1}{\nu},\ \frac{1}{\lambda};\quad \frac{1}{\nu},\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{\mu}.$$

M. Molenbroek nous a adressé une très bonne solution synthétique du théorème de M. Servais. Pour démontrer la première partie, il s'appuie sur la proposition suivante : Dans deux faisceaux projectifs O (*abc*...), O' (*a' b' c'*...), les points d'intersection *kl'*, *k'l* de deux couples *kk'*, *ll'* de rayons correspondants sont alignés avec un point fixe. Si l'on ne considère que deux ternes homologues *abc*, *a'b'c'*, on a le cas particulier du théorème de Brianchon où la conique est remplacée par deux points O, O' : les droites qui joignent les points *ab'* et *a'b*, *bc'* et *b'c*, *ca'* et *a'b* concourent en un même point. Ce cas particulier ne diffère pas de la propriété des triangles doublement homologiques invoquée par M. Lemoine. Dans le théorème de M. Servais, les deux faisceaux de trois rayons auxquels on applique le théorème de Brianchon sont M (ABC) et O (CAB).

Pour établir la 2^{me} partie de la question 579, MM. Molenbroek, Mineur et Servais considèrent que les faisceaux perspectifs engendrés par les rayons AM, BM se coupant sur une droite fixe *d* déterminent sur les droites BO, CO deux ponctuelles projectives; celles-ci sont projetées à partir des points C, A par deux faisceaux projectifs dont les rayons homologues se coupent sur une conique. M et M', M et M'' se correspondent dans deux transformations quadratiques; donc M' et M'' se correspondent dans une transformation homographique.

×Question 617.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 148.)

Si n est premier avec 6, *on a*

$$C_{2n-4,n-2} = M(n^2 - n). \qquad \text{(E. CATALAN.)}$$

Solution par MM. EMMERICH *et* DÉPREZ. On a

$$C_{2n-4,n-2} = \frac{n-1}{n-2} C_{2n-4,n-3}, \quad C_{2n-4,n-2} = \frac{n(n-1)}{(n-2)(n-3)} C_{2n-4,n-4}.$$

La première égalité prouve que $C_{2n-4,n-2}$ est divisible par $n-1$; la seconde, que ce nombre est divisible par n, car n est premier avec $n-2$ et $n-3$, parce que, d'après l'hypothèse, les différences $n-(n-2)$, $n-(n-3)$ ne divisent pas n.

×Question 627.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 240.)

Construire un tétraèdre équifacial SABC, *connaissant la droite sur laquelle est l'arête* SA, *le plan mené par* SA *parallèlement à* BC, *un point de* BC, *enfin un triangle* LMN *semblable à* ABC. (LEMOINE.)

Solution par MM. BEYENS *et* DÉPREZ. Désignons par α le plan donné, par P le point donné sur BC. Si l'on construit sur LMN un tétraèdre équifacial OLMN, il sera semblable à SABC, et les angles (SA, BC), (OL, MN) seront égaux. Donc on peut obtenir la droite indéfinie BC en construisant, dans le plan mené par P parallèlement à α, une droite faisant avec une parallèle à SA par P un angle égal à l'angle (OL, MN). Soient maintenant DE, QR les plus courtes distances des couples SA et BC, OL et MN. Les proportions

$$\frac{DE}{QR} = \frac{DS}{QO} = \frac{DA}{QL} = \frac{EB}{RM} = \frac{EC}{RN}$$

serviront à déterminer les segments inconnus DS, DA, EB, EC.

×Question 629.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 240.)

Étant donnés deux points A, B *et une droite* AX, *trouver sur celle-ci un point* C, *tel que le produit des projections des droites* CA, CB *sur la bissectrice de l'angle* ACB *soit égal à un carré donné* k^2. (Barbarin.)

Solution par MM. Brocard, Beyens, Laurens, Déprez. Employant les notations ordinaires pour les éléments du triangle ABC, on a la condition

$$ab\cos^2\frac{C}{2} = k^2,$$

avec la relation

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = (a+b)^2 - 4ab\cos^2\frac{C}{2};$$

donc

$$a + b = \sqrt{c^2 + 4k^2}.$$

D'où la solution : Sur AB élevez une perpendiculaire $BD = 2k$; prenez sur AX la longueur $AE = AD$, et la perpendiculaire au milieu de BE rencontrera AX au point cherché C.

Remarques. 1° S'il s'agit des projections de CA, CB sur la bissectrice extérieure de l'angle ACB, on est conduit à l'équation $a - b = \sqrt{c^2 - 4k^2}$, d'où une construction analogue à la précédente.

2° Remplaçons la droite AX par une droite quelconque YZ. Alors on trouvera le point C en cherchant l'intersection de YZ avec une ellipse ayant pour foyers A et B, pour grand axe $\sqrt{c^2 + 4k^2}$.

3° Étant donnés sur une sphère deux points A, B et un arc de grand cercle AX, soit proposé de trouver sur AX un point C tel que le produit des sinus des distances de A et B à l'arc bissecteur de l'angle ACB soit égal à $\cos^2 k$, k étant un arc donné. On a

$$\sin b \sin c \sin^2\frac{C}{2} = \cos^2 k, \quad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C;$$

la dernière relation peut se transformer en

$$\cos^2\frac{c}{2} = \cos^2\frac{1}{2}(a-b) - \sin a \sin b \sin^2\frac{C}{2},$$

de sorte que

$$\cos^2\frac{1}{2}(a-b) = \cos^2\frac{c}{2} + \cos^2 k.$$

(J. Déprez.)

Autres solutions, un peu moins simples, par MM. François, Bellens, de Bözóky.

10. *Hauteurs du triangle.* Les hauteurs d'un triangle sont les axes radicaux des cercles décrits de deux sommets comme centres et passant par le troisième; par suite la distance d'un point à la hauteur AH est donnée par

$$\frac{Y - Z + b^2 - c^2}{2a}.$$

La puissance d'un point par rapport au cercle conjugué a pour expression

$$\frac{X \operatorname{tg} A + Y \operatorname{tg} B + Z \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} + 4R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

11. *Cercles d'Apollonius.* Le cercle passant par le sommet A et les pieds de bissectrices de l'angle A a pour équation

$$b^2 Y = c^2 Z,$$

et la tangente en A à ce cercle a pour équation

$$\frac{b^2 Y - c^2 Z}{b^2 - c^2} = X,$$

puisque c'est l'axe radical du cercle et d'un point de ce cercle.

Les trois cercles d'Apollonius sont orthogonaux au cercle circonscrit; ils ont le même axe radical qui a pour équation

$$\begin{vmatrix} a^2 X & b^2 Y & c^2 Z \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou en développant

$$a^2 X (b^2 - c^2) + b^2 Y (c^2 - a^2) + c^2 Z (a^2 - b^2) = 0.$$

Les cercles d'Apollonius se coupent en deux points dont les distances aux trois sommets sont inversement proportionnelles aux côtés opposés.

Ces points sont appelés *centres isodynamiques;* le premier, à l'intérieur du cercle circonscrit, est déterminé par les équations

$$\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - A\right)} = \frac{y}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - B\right)} = \frac{z}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - C\right)},$$

le second par les équations analogues. Ces points sont les inverses des *centres isogones,* etc.

SUR LES COORDONNÉES TRIPOLAIRES;

par M. Ed. Lucas, professeur de mathématiques spéciales, au lycée St-Louis, à Paris.

(*Suite et fin*, voir p. 129.)

9. ***Segments capables.*** Si l'on désigne par V l'angle de la direction CM avec la direction MB, le cercle BCM a pour équation

$$Y + Z - a^2 + 2ax \cot V = 0,$$

x désignant la distance du point M au côté BC.

La puissance d'un point quelconque, par rapport au cercle, est représentée par la moitié du premier membre de l'équation précédente, et le rayon ρ de ce cercle est donné par la formule

$$\rho = R \frac{\sin A}{\sin V}.$$

En particulier, pour $V = A$, on retrouve le cercle circonscrit au triangle ABC, et l'on a

$$2U \equiv Y + Z - a^2 + 2ax \cot A;$$

par conséquent, la puissance d'un point, par rapport au cercle lieu du segment capable de l'angle V décrit sur BC, peut s'écrire

$$U = 2Rx \frac{\sin (V - A)}{\sin V}.$$

En particulier, la puissance d'un point par rapport au cercle passant par B, C et l'orthocentre a pour expression, si l'on fait $V = \pi - A$,

$$U = Rx \cos A.$$

La puissance d'un point par rapport à l'un des *cercles de Torricelli* (*), s'obtient en faisant $V = \frac{1}{3}\pi$ ou $V = \frac{2}{3}\pi$.

Les trois premiers cercles de Torricelli ont pour axes radicaux

$$x \sin\left(\frac{\pi}{3} - A\right) = y \sin\left(\frac{\pi}{3} - B\right) = z \sin\left(\frac{\pi}{3} - C\right).$$

(*) Ce sont les cerles circonscrits aux triangles équilatéraux construits extérieurement ou intérieurement sur BC, CA, AB; leurs points de concours détermine les *centres isogones*, Z, Z'. Le point Z jouit de la propriété de rendre minimum la somme ZA + ZB + ZC. Fermat avait proposé à Torricelli le problème de déterminer le point jouissant de cette propriété. Le géomètre italien a donné plusieurs solutions de cette question. (J. N.)

Les formules (1) donnent les équations des figures inverses par rapport au cercle circonscrit pris pour cercle d'inversion. Ainsi l'inverse du cercle ayant pour équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z + q = 0,$$

a pour équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z + \frac{q}{R^2}(U + R^2) = 0.$$

En particulier, l'inverse du côté BC est le cercle BCO qui a pour équation

$$aX + bY\cos C + cZ\cos B + abc\cos A\,\frac{U + R^2}{R^2} = 0;$$

on peut lui donner la forme suivante

$$U - \frac{Rx}{\cos A} = 0,$$

comme segment capable de l'angle $V = 2A - \pi$, décrit sur BC.

Exemple. Le cercle décrit sur le segment formé sur le côté BC par le pied de la hauteur, et par la droite joignant les pieds des deux autres hauteurs, a pour équation

$$Y\,\mathrm{tg}^2 B = Z\,\mathrm{tg}^2 C.$$

L'axe radical des trois cercles de cette nature est la droite de Lemoine.

13. *Cercles isotomiques.* Aux trois cercles ayant pour équations

$$\frac{X}{X_0} = \frac{Y}{Y_0} = \frac{Z}{Z_0},$$

correspondent les cercles ayant pour équations

$$XX_0 = YY_0 = ZZ_0;$$

ils ont même axe radical et sont symétriques des précédents par rapport aux milieux des côtés du triangle ABC.

En particulier, si les trois premiers cercles sont ceux d'Apollonius, les cercles *isotomiques* (*) ont pour équations

$$\frac{X}{a^2} = \frac{Y}{b^2} = \frac{Z}{c^2},$$

et pour axe radical la droite ayant pour équation

$$X(b^2 - c^2) + Y(c^2 - a^2) + Z(a^2 - b^2) = 0.$$

(*) Ces cercles se coupent aux deux centres *isologiques*. Voir *Mathesis*, VII, p. 117.

C'est la droite d'Euler qui passe par le barycentre et par l'orthocentre du triangle ABC.

14. *Bissectrices et cercles tangents.* Les coordonnées tripolaires du centre I du cercle inscrit sont

$$\overline{AI}^2 = \frac{bc(p-a)}{p}, \quad \overline{BI}^2 = \frac{ca(p-b)}{p}, \quad \overline{CI}^2 = \frac{ab(p-c)}{p}.$$

La droite joignant le centre I du cercle inscrit au centre O du cercle circonscrit, a pour équation

$$aX(b-c) + bY(c-a) + cZ(a-b) = 0;$$

c'est l'axe radical des cercles ayant pour équations

$$aX = bY = cZ.$$

La puissance d'un point par rapport au cercle inscrit a pour expression

$$\frac{aX + bY + cZ}{2p} - r(2R + r),$$

et la distance d'un point à la bissectrice intérieure de l'angle A est donnée par la formule

$$\frac{X(c-b) + bY - cZ + bc(b-c)}{2bc\cos\frac{A}{2}}.$$

Les coordonnées tripolaires du centre I_a du cercle ex-inscrit de rayon r_a sont(*)

$$\overline{AI_a}^2 = bc\frac{p}{p-a}, \quad \overline{BI_a}^2 = ac\frac{p-c}{p-a}, \quad \overline{CI_a}^2 = ab\frac{p-b}{p-a}.$$

La droite OI_a a pour équation

$$-aX(b-c) + bY(c+a) - cZ(a+b) = 0.$$

La puissance d'un point par rapport au cercle ex-inscrit de rayon r_a a pour expression

$$\frac{-aX + bY + cZ}{2(p-a)} - r_a(2R - r_a);$$

la puissance d'un point par rapport au cercle décrit sur II_a comme diamètre est

$$\frac{-a^2X + b(b+c)Y + c(b+c)Z - a^2bc}{4p(p-a)}.$$

(*) Voir ma *Note sur un nouveau principe des signes*, dans la N. C. M., t. II, p. 384, III, p. 1 et mon article *Aire du triangle*, dans *Mathesis*, t. III, p. 167.

Les formules (1) donnent les équations des figures inverses au cercle circonscrit pris pour cercle d'inversion. Ainsi cercle ayant pour équation

$$\lambda X - \mu Y + \nu Z + q = 0,$$

a pour équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z - \frac{q}{R^2} UV + R^2 = 0.$$

En particulier, l'inverse du côté BC est le c équation

$$aX - bY\cos C + cZ\cos B + abc\cos$$

on peut lui donner la forme suivante

$$U - \frac{Rr}{\cos A} = 0.$$

comme segment capable de l'angle $V = 2A$

Exemple. Le cercle décrit sur le segmen pied de la hauteur, et par la droite joi hauteurs, a pour équation

$$Y\,tg^2 B = Z$$

L'axe radical des trois cercles de cet

12. *Cercles isotomiques.* Aux trois

$$\frac{X}{X_0} = \frac{Y}{Y}$$

correspondent les cercles ayant pou

$$XX_0 =$$

ils ont même axe radical et sont aux milieux des côtés du triangl

En particulier, si les trois pr cercles isotomiques (*) ont pour

et pour axe radical la droite

$$X(b^2 - c^2) +$$

(*) Ces cercles se coupent

angle

par rap-

en C, A, B aux côtés

$$\frac{a}{c},$$

distance d'un point par rapport
distances du point F sont

$$\frac{abc}{(b^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$$

$$\frac{16R^2S^2}{\cdot^2 + a^2b^2}.$$

i coupe ortho-

ıts entre eux
Si l'on désigne
ıe que la distance
ı obtient trois équa-

$$\cdot) \cos 2C = (\lambda + \mu)^2,$$

$$\text{ı}^2\, C = \lambda\mu,$$
$$\sin^2 A = \mu\nu,$$
$$\text{ı}) \sin^2 B = \nu\lambda.$$

ı membre, on en déduit

$$- \nu) \sin A \sin B \sin C = \pm \lambda\mu\nu.$$

$$+,$$

$$- \lambda) \sin B \sin C = \lambda \sin A,$$

$$\lambda = \frac{Rbc}{bc + 2aR}.$$

ı trois cercles intérieurs au cercle circonscrit; avec le urait les trois cercles extérieurs, inverses des premiers par cercle circonscrit.

---

ucas, si les cercles n'ont pas été considérés encore. *(Rédaction.)*

on a pour le rayon ρ_a de ce cercle

$$4\rho_a^2 = \overline{\Pi}_a^2 = \frac{a^2bc}{p(p-a)}.$$

La distance d'un point à la bissectrice extérieure de l'angle A a pour expression

$$\frac{(b+c)X - bY - cZ + bc(b+c)}{2bc\cos\frac{A}{2}}.$$

On peut obtenir une autre expression de la puissance d'un point par rapport au cercle décrit sur Π_a comme diamètre, qui est encore le segment capable de l'angle $\frac{A}{2}$ décrit sur BC; on trouve ainsi

$$U + 2Rx.$$

La puissance d'un point au cercle décrit sur I_bI_c comme diamètre a pour expressions équivalentes

$$\frac{a^2X + b(c-b)Y + c(b-c)Z - a^2bc}{4(p-b)(p-c)} \equiv U - 2Rx.$$

Enfin, si l'on pose

$$J = aX + bY + cZ + abc,$$

l'équation du cercle passant par les trois points $I_aI_bI_c$ (et dont le rayon est 2R) est

$$\sin^2\frac{A}{2}(J - 2aX) + \sin^2\frac{B}{2}(J - 2bY) + \sin^2\frac{C}{2}(J - 2cZ) = J.$$

15. *Points de Brocard.* Si F est le premier point de Brocard, l'angle de CF avec FB est $\pi - C$; par suite, les puissances d'un point par rapport aux trois cercles BCF, CAF, ABF ont pour expressions

$$U + 2Rx\frac{b}{c}, \quad U + 2Ry\frac{c}{a}, \quad U + 2Rz\frac{a}{b};$$

ces trois cercles sont respectivement tangents en C, A, B aux côtés CA, AB, BC; on a d'ailleurs l'identité

$$U + 2Rx\frac{b}{c} \equiv Z - 2Ry\frac{a}{c},$$

qui donne une autre expression de la puissance d'un point par rapport aux trois cercles; les coordonnées trilinéaires du point F sont

$$\frac{bx}{c} = \frac{cy}{a} = \frac{az}{b} = \frac{8RS^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2},$$

et les coordonnées tripolaires

$$\frac{a^2X}{b^2}=\frac{b^2Y}{c^2}=\frac{c^2Z}{a^2}=\frac{16R^2S^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}.$$

De même pour le second point de Brocard.

Le cercle qui passe par les deux points de Brocard et qui coupe orthogonalement le cercle circonscrit a pour équation

$$\begin{vmatrix} a^2X & b^2Y & c^2Z \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}=0,$$

ou, en développant

$$a^6X+b^6Y+c^6Z-a^2b^2c^2(X+Y+Z)=0.$$

16. *Cercles de. . . . .* ?(*) Ces trois cercles sont tangents entre eux deux à deux et tangents au cercle circonscrit en A, B, C. Si l'on désigne par λ, μ, ν les rayons des trois cercles et si l'on exprime que la distance de leurs centres est égale à la somme des rayons, on obtient trois équations telles que

$$(R-\lambda)^2+(R-\mu)^2-2(R-\lambda)(R-\mu)\cos 2C=(\lambda+\mu)^2,$$

d'où l'on tire facilement

$$(R-\lambda)(R-\mu)\sin^2 C=\lambda\mu,$$
$$(R-\mu)(R-\nu)\sin^2 A=\mu\nu,$$
$$(R-\nu)(R-\lambda)\sin^2 B=\nu\lambda.$$

Donc, en multipliant membre à membre, on en déduit

$$(R-\lambda)(R-\mu)(R-\nu)\sin A\sin B\sin C=\pm\lambda\mu\nu.$$

Par suite, avec le signe +,

$$(R-\lambda)\sin B\sin C=\lambda\sin A,$$

et

$$\lambda=\frac{Rbc}{bc+2aR}.$$

On obtient ainsi trois cercles intérieurs au cercle circonscrit; avec le signe — on aurait les trois cercles extérieurs, inverses des premiers par rapport au cercle circonscrit.

(*) *De Lucas*, si les cercles n'ont pas été considérés encore. *(Rédaction.)*

Les coordonnées trilinéaires du centre du cercle tangent intérieurement en A, sont

$$x = -\lambda\left(\frac{a}{R} + \cos A\right), \quad y = -\lambda \cos B, \quad z = -\lambda \cos c;$$

par suite, l'équation de ce cercle est

$$aX \cos A + bY \cos B + cZ \cos C + abc + \frac{a^2X}{R} = 0,$$

ou, plus simplement :

$$a^2X - 2SU = 0.$$

Si l'on retranche, membre à membre, les équations des cercles tangents en A et B, on obtient l'équation du cercle d'Apollonius passant par le point C. Par conséquent, les trois cercles cherchés sont tangents à deux des trois cercles d'Apollonius, et le problème revient à tracer un cercle tangent à un cercle donné en un point donné et tangent à un autre cercle.

L'axe radical des cercles tangents en A et B a pour équation

$$\frac{a^2X - 2SU}{a^2 - 2S} = \frac{b^2Y - 2SU}{b^2 - 2S};$$

il passe donc par le point de concours des tangentes en A et en B au cercle circonscrit.

La droite qui joint les centres des cercles tangents en A et B a pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{\cos C}\left(\frac{c}{ab} - \frac{1}{R}\right) = 0.$$

Donc l'axe d'homologie du triangle ABC et du triangle des trois centres a pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0;$$

c'est la polaire du point de Lemoine par rapport au triangle ABC(*).

Remarque. Les considérations précédentes s'appliquent à un polygone d'un nombre impair de côtés inscrit à un cercle; lorsque le nombre

(*) Le J. M. S. a publié en janvier, mars et juillet une étude encore inachevée sur les coordonnées tripolaires due à M. Poulain. Plusieurs formules contenues dans ce travail figurent également dans l'article de M. E. Lucas, mais les deux auteurs les ont obtenues indépendamment l'un de l'autre. — Nous rappelons à cette occasion les articles suivants de M. E. Lucas : *Principes de géométrie tricirculaire et tétrasphérique* (N. C. M. t. II, pp. 225, 255, 289); *Sur un principe fondamental de Géométrie et de Trigonométrie* (Ib., pp. 85, 160, 200). (*Rédaction.*)

des côtés du polygone inscrit est pair, le problème n'est possible que lorsque le produit des côtés de rang pair est égal au produit des côtés de rang impair, et alors le problème comporte une infinité de solutions, et la couronne des cercles tangents se ferme d'elle-même, en commençant par un cercle tangent quelconque.

Paris, janvier 1889.

SUR LA FORMULE D'OZANAM.

I. Comme nous l'avons dit dans l'article précédent (*Mathesis*, pp. 161-164), cette formule remarquable appartient à la trigonométrie générale. Elle exprime que le rapport

$$J = \frac{x(2+\cos x)}{\sin x} = \frac{1}{2}x\left(3\cot\frac{1}{2}x + \operatorname{tang}\frac{1}{2}x\right)$$

est toujours très voisin de 172, quand x varie de 0° à 45°. Nous publierons ultérieurement une démonstration élémentaire de ce théorème. Voici une petite table des valeurs de J, de degré en degré (Pour $x = 0$, la limite de J est 171,887) :

x	J	x	J	x	J
1	171,887	16	171,893	31	171,972
2	171,887	17	171,895	32	171,984
3	171,887	18	171,897	33	171,996
4	171,887	19	171,899	34	172,011
5	171,887	20	171,902	35	172,026
6	171,887	21	171,905	36	172,043
7	171,888	22	171,908	37	172,062
8	171,888	23	171,912	38	172,082
9	171,888	24	171,917	39	172,104
10	171,888	25	171,923	40	172,128
11	171,889	26	171,929	41	172,154
12	171,889	27	171,936	42	172,182
13	171,890	28	171,943	43	172,212
14	171,891	29	171,952	44	172,245
15	171,892	30	171,962	45	172,279

Quand la dernière décimale est forcée, elle est en caractère gras.

II. Voici un exemple d'application de la formule d'Ozanam, dont nous

empruntons les données aux *Éléments de Trigonométrie* de M. l'abbé Gelin (page 150, Prob. I) : *Résoudre le triangle* ABC, *étant donnés* $A = 90^\circ$, $a = 9876^m$, $b = 5432^m$.

On a

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)} = 8247^m,9;$$

$$B = \frac{5432 \times 172}{8247,9 + 2 \times 9876} = \frac{934308}{27999,9} = 33^\circ 22' 5''.$$

M. l'abbé Gelin a trouvé $33^\circ 22' 10''$, de sorte que l'erreur ou l'approximation est de $5''$. (P. M.)

UNE NOUVELLE FORME DU RESTE DANS LA FORMULE DE TAYLOR;

par M. G. Peano, professeur à l'Université de Turin.

Théorème I. *Soit* $f(x)$ *une fonction ayant des dérivées d'ordre* $1, 2, \ldots (n-1)$ *pour les valeurs de* x *comprises entre* x_0 *et* $x_0 + h$, *et ayant une dérivée d'ordre* n *pour* $x = x_0$. *Si l'on pose*

$$(1) \qquad f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^n}{n!}\varepsilon,$$

on a

$$(2) \qquad \varepsilon = \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h_1) - f^{(n-1)}(x_0)}{h_1} - f^{(n)}(x_0),$$

où

$$h_1 = \theta h, \quad 0 < \theta < 1.$$

En effet, on tire de (1)

$$\varepsilon = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0) - \cdots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)}{\frac{h^n}{n!}}.$$

Donc ε est le rapport de deux fonctions de h, lesquelles s'annulent, ainsi que leurs dérivées d'ordre $1, \ldots (n-2)$, pour $h = 0$.

Par suite, d'après un théorème connu, ε est égal au rapport des dérivées d'ordre $n-1$, pour une valeur h_1 de h comprise entre 0 et h; on obtient ainsi la formule (2).

Théorème II. *Soit* $f(x)$ *une fonction ayant, pour* $x = x_0$, *des dérivées d'ordre* $1, 2, \ldots n$. *Si l'on définit* ε *par la formule* (1), *on a, pour* $h = 0$, $\lim \varepsilon = 0$.

En effet, la fonction $f(x)$, qui a, pour $x = x_0$, des dérivées d'ordre $1, \ldots n$, a nécessairement, aux environs de x_0 les dérivées d'ordre $1, \ldots (n-1)$; donc on a, quand h est suffisamment petit, pour ε l'expression (2); on en déduit, par la définition de la dérivée, $\lim \varepsilon = 0$.

J'avais énoncé cette proposition, dans laquelle on ne suppose ni la continuité, ni l'existence de la dérivée d'ordre n aux environs de $x = x_0$, dans mon *Calcolo differenziale, Torino* 1884, *pag.* XIX, sans la démontrer. J'ai cru devoir en donner la démonstration, parce qu'on lit dans le *Traité d'Analyse de* M. LAURENT, Paris 1885, pag. 126, que *cette formule suppose la continuité de* $f^{(n)}(x)$.

NOTE Nous avons appelé *forme du reste de Liouville* (*Résumé du Cours d'Analyse de l'Université de Gand*, p. 110), l'expression $(h^n \varepsilon : n!)$, parce que c'est ce géomètre qui a montré le premier qu'on pouvait l'établir, sans supposer continue la dérivée $(n+1)^{ième}$ de fx (*Journal de Liouville*, 1837, t. II, p. 483-484). Comme on vient de le voir, M. Peano parvient à l'établir en ne supposant pas même la continuité de la dérivée $n^{ième}$. (P. M.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

11. *Sur un problème classique* (voir *Mathesis*, t. IX, p. 96). Étant donnés un angle XOY et un point A, on peut mener par A quatre sécantes telles que les segments BC compris entre les côtés (indéfinis) de l'angle aient une longueur donnée l. D'après STEINER (*Œuvres complètes*, t. II, p. 669), les milieux des quatre segments BC sont situés sur une même circonférence, dont le centre est indépendant de l.

En effet, si l'on pose $OC = x$, $OB = y$, on a les équations

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta = l^2, \quad xy - \alpha y - \beta x = 0;$$

ajoutant à la première le quadruple de la seconde, on trouve

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta - 4\beta \cos\theta . x - 4\alpha \cos\theta \; y = l^2,$$

ou, en désignant par (X, Y) les coordonnées du milieu de BC,

$$X^2 + Y^2 + 2XY \cos\theta - \beta \cos\theta . X - \alpha \cos\theta . Y = \tfrac{1}{4} l^2.$$

C'est là l'équation d'une circonférence facile à construire : Si ω en est le centre, les projections de $O\omega$ sur OX, OY sont égales $\frac{1}{2} \beta \cos\theta$, $\frac{1}{2} \alpha \cos\theta$; la puissance de O est égale à $-\frac{1}{4} l^2$.

Cette circonférence et l'ellipse décrite par le milieu d'une droite, de longueur constante l, qui glisse entre les droites OX, OY, déterminent par leur intersection les milieux des sécantes BC. Cependant, lorsque $A = \frac{1}{2}\pi$, cette solution est illusoire parce que les deux courbes se confondent. (J. N.)

*12. *Décrire une circonférence passant par deux points donnés* A, B, *et tangente à une droite donnée* MN. Voici une solution qui s'appuie sur le second livre. Si b est le symétrique de B, par rapport à la droite donnée, T le point de contact inconnu, C le point d'intersection de AB avec MN, l'angle ATb est égal à l'angle MCA, ou à son supplément (*Bulletin scientifique* de M. E. Lebon, oct. 1888, p. 3).

*13. *Divisibilité des nombres.* Soit $N = 1000n + p$, un nombre où p désigne la tranche de ses centaines, dizaines et unités, $xyzu$ un produit de nombres entiers égal à $1000k + 1$. On aura

$$N - p(xyzu) = 1000(n - pk).$$

Donc N et $n - pk$ seront simultanément divisibles ou non divisibles par $xyzu$. De là un caractère de divisibilité par x, y, z, u. On peut prendre pour ces nombres 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 29, etc. En effet

$$7.11.13 = 1001 \qquad 9.11.29.31 = 89001,$$
$$9.17.19.43 = 125001 \qquad 7.37.139 = 36001,$$
$$3.23.29 = 2001 \qquad 3.11.17.41 = 23001, \text{ etc.}$$

(J. M. E., *novembre*, 1888, p. 241.)

POINTS D'INFLEXION DU DÉVELOPPEMENT DE LA SECTION PLANE D'UN CÔNE,

par M. Arthur Thiré, à Ouro-Preto (Brésil).

Si l'on considère une section plane d'un cône et qu'on effectue le développement de la surface de ce cône sur un plan, on sait que les points d'inflexion du développement de la section plane du cône sont ceux qui correspondent aux points de la section où le plan sécant est normal à la surface, à moins que le plan sécant ne soit perpendiculaire à la génératrice.

Ce théorème, ainsi énoncé généralement(*) et dont la démonstration

---

(*) De la Gournerie, *Traité de géométrie descriptive*, 1re partie, page 64. Klein, *Traité élémentaire de géométrie descriptive*, 2e partie, page 108.

est bien connue, n'est pas absolument complet. Le développement de la section plane du cône peut, en effet, présenter d'autres points d'inflexion. Pour compléter ce théorème, il convient d'ajouter :

Si la surface conique a des plans tangents d'inflexion (plans tangents traversant la surface conique suivant la génératrice de contact), les points du développement de la section plane qui correspondent aux génératrices des plans tangents d'inflexion sont aussi des points d'inflexion du développement, à moins qu'en ces points de la courbe de section le plan sécant ne soit normal au cône sans être perpendiculaire à la génératrice.

La démonstration de cette partie complémentaire du théorème sur les points d'inflexion du développement de la section plane d'un cône n'offre aucune difficulté.

THÉORÈMES SUR LES MINIMUMS;

par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin à Huy.

1. ***Le minimum de la somme des puissances semblables de plusieurs nombres variables positifs, dont la somme est constante, a lieu lorsque ces nombres sont égaux.***

Soient m nombres variables positifs $x, y, z, \ldots$ ayant une somme constante ma : je dis que la somme $S = x^p + y^p + z^p + \cdots$ est supérieure à ma^p, si tous les nombres ne sont pas égaux à a.

En effet, si tous les nombres ne sont pas égaux à a, il y a au moins un nombre $a + h$ supérieur à a, et un nombre $a - k$ inférieur à a. Or, si, sans changer les autres nombres, on remplace les nombres $a + h$ et $a - k$ par a et $a + h - k$, la somme de tous les nombres reste la même, tandis que la somme S devient plus petite. On a, en effet,

$$a^p + (a + h - k)^p < (a + h)^p + (a - k)^p,$$

ou

$$(a + h - k)^p - (a - k)^p < (a + h)^p - a^p,$$

ou, en divisant le premier membre par $(a + h - k) - (a - k) = h$ et le second par $(a + h) - a = h$,

$$(a+h-k)^{p-1} + (a-k)(a+h-k)^{p-2} + \cdots < (a+h)^{p-1} + a(a+h)^{p-2} + \cdots,$$

inégalité qui est évidente, puisque chaque terme du premier membre est plus petit que le terme de même rang du second membre.

Ainsi, lorsqu'on remplace les nombres $a+h$ et $a-h$ par a et $a+h-h$, on obtient une nouvelle somme moindre que la première.

Si l'on opère sur cette nouvelle somme comme sur la première, sur la troisième comme sur la deuxième, et ainsi de suite, on arrive à une somme dans laquelle tous les nombres sont égaux à a, et moindre que toutes les sommes précédentes : c'est ce qu'il fallait démontrer.

2. La démonstration qui précède suppose que p est positif; mais le théorème énoncé est encore vrai, si p est négatif, et, en particulier, si p est égal à -1. On a alors les deux théorèmes suivants, qui sont peut-être nouveaux :

1° *Le minimum de la somme des inverses de plusieurs nombres variables positifs, dont la somme est constante, a lieu lorsque ces nombres sont égaux.*

La démonstration de cette proposition repose sur l'inégalité suivante, qu'il est aisé de vérifier :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+h-h}<\frac{1}{a+h}+\frac{1}{a-h};$$

2° *Le minimum de la somme des puissances semblables des inverses de plusieurs nombres variables positifs, dont la somme est constante, a lieu lorsque ces nombres sont égaux.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de vérifier l'inégalité

$$\frac{1}{a^p}+\frac{1}{(a+h-h)^p}<\frac{1}{(a+h)^p}+\frac{1}{(a-h)^p},$$

ou

$$\frac{a^p+(a+h-h)^p}{a^p(a+h-h)^p}<\frac{(a+h)^p+(a-h)^p}{(a+h)^p(a-h)^p}.$$

Or, on a, d'une part,

$a^p(a+h-h)^p>(a+h)^p(a-h)^p$ ou $a(a+h-h)>(a+h)(a-h)$,

inégalité évidente, et, d'autre part,

$$a^p+(a+h-h)^p<(a+h)^p+(a-h)^p,$$

ou

$$(a+h-h)^p-(a-h)^p<(a+h)^p-a^p,$$

ou, en divisant le premier membre par $(a+h-h)-(a-h)=h$ et le second par $(a+h)-a=h$,

$$(a+h-h)^{p-1}+(a-h)(a+h-h)^{p-2}+\cdots<(a+h)^{p-1}+a(a+h)^{p-2}+\cdots,$$

inégalité qui est aussi évidente.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE(*).

1. Deux ponctuelles homographiques ABC..., A'B'C'..., sont données sur deux droites u, u' situées dans un même plan. Trouver, parmi les droites AA', BB', ... qui joignent les points homologues, celles qui sont parallèles à une droite donnée v.

La ponctuelle A'B'C' ... est projetée sur u, au moyen de parallèles à v, suivant une ponctuelle A''B''C''... projective avec la ponctuelle ABC... La question revient à chercher les points doubles des ponctuelles ABC..., A''B''C'' ... (A. Droz.)

2. Trouver le lieu des points A_1, B_1, ... divisant les droites AA', BB', ... dans un rapport donné $m : n$.

Menons A_1A_2, B_1B_2, ... parallèles à u' et rencontrant u en A_2, B_2, ...; menons aussi A_1A_3, B_1B_3, ... parallèles à u et rencontrant u' en A_3 B_3, ... Nous aurons deux nouvelles ponctuelles A_2B_2..., A_3B_3... semblables aux premières et par suite projectives entre elles. De là deux faisceaux projectifs de rayons parallèles (A_2A_1, B_2B_1, ...) et (A_3A_1, B_3B_1, ...), dont les rayons homologues se coupent aux points A_1, B_1, ... appartenant à une même conique. Celle-ci passant par les centres des deux faisceaux, les asymptotes sont parallèles à u et u'.

Corollaire. Les points qui divisent dans un rapport constant les segments des tangentes à une ellipse ou hyperbole, compris entre deux tangentes fixes, sont situés sur une hyperbole. (Droz.)

3. Deux ponctuelles homographiques ABC ..., A'B'C' ... étant situées sur deux droites u, u' qui se coupent en O, trouver le lieu des centres des circonférences OAA', OBB', ...

Les centres A'', B'', ... de ces circonférences sont déterminés par les intersections des perpendiculaires élevées aux milieux des droites OA et OA', OB et OB', ... Ces perpendiculaires forment deux faisceaux projectifs de rayons parallèles; donc les points A'', B'', ... appartiennent à une hyperbole H_2 dont les asymptotes sont perpendiculaires à u et u'.

Remarque I. L'enveloppe de ces circonférences est le lieu des symétriques de O par rapport aux tangentes de H_2; c'est donc une podaire de conique.

Remarque II. Comme cas particuliers des exercices 2 et 3, on peut supposer que les droites AA', BB', ... passent par un même point, ou que les triangles OAA', OBB' ... ont même surface. (Droz.)

(*) Comme l'enseignement de la géométrie projective tend à prendre dans nos universités une importance de plus en plus grande, les exercices élémentaires sur cette science pourront intéresser nos *jeunes* lecteurs. (P. M. et J. N.)

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES COURBES PARALLÈLES;

par M. E. WASTEELS, ancien élève de l'École normale des Sciences.

Si l'on porte sur les normales à une courbe K, à partir du pied de chacune d'elles et du même côté, une longueur constante l, le lieu des extrémités des segments ainsi obtenus est une courbe K', dite *parallèle* à K. Cette dénomination a sa raison d'être dans le théorème suivant : ***Aux points correspondants, les courbes parallèles ont leurs tangentes parallèles.***

Voici, de cette propriété, une démonstration élémentaire et rigoureuse qui ne suppose connue que la définition d'une tangente et les propriétés des triangles semblables.

Prenons sur la courbe K deux points M, N, le premier fixe, le second mobile et se rapprochant indéfiniment du premier; de cette manière la sécante MN a pour limite la tangente en M à la courbe K.

Soient M', N' les points correspondants de la courbe K', de manière que $MM' = NN' = l$; la sécante M'N' a pour limite la tangente en M', quand N' se rapproche indéfiniment de M'.

Si les normales MM', NN' se rencontrent en S, en général, SN sera différent de SM. Soit, pour fixer les idées SM > SN. On aura $SM + l$ ou $SM' > SN + l$ ou SN' (on suppose la longueur l portée du côté opposé à S).

Portons sur SN' une longueur $S\nu = SM'$; le point ν sera au delà de N', puisque SM' surpasse SN'.

Menons M'ν' parallèle à MN et rencontrant SN' en ν'. On aura

$$\frac{N\nu'}{MM'} = \frac{SN}{SM} < 1, \quad \text{ou} \quad N\nu' < NN'.$$

Donc le point ν' est en deçà de N', entre N' et S. La sécante M'N' est donc dans l'angle $\nu M'\nu'$.

Il en serait de même, comme il est aisé de le voir, si SM est inférieur à SN. Si SM = SN (et, en particulier, si les normales MM', NN' sont parallèles), les points ν, ν' se confondent avec N'.

Quand N se rapproche indéfiniment de M, la ligne MN a pour limite la tangente MT en M, perpendiculaire à la normale MM'; la ligne M'ν', parallèle a MN, a pour limite une parallèle M'T' à cette tangente MT, c'est-à-dire une perpendiculaire par M' à M'M; la sécante M'ν dans le triangle isoscèle variable SM'ν, étant toujours perpendiculaire à la bissectrice de l'angle S, a pour limite une perpendiculaire à la position

limite de cette bissectrice, c'est-à-dire à MM'; donc la limite de M'n est aussi M'T'. Enfin, la droite M'N', située entre M'n et M'n', ou se confondant avec elles, a aussi cette même limite M'T', parallèle à MT. Donc le théorème est démontré.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 455.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 167.)

Le cercle osculateur en un point M *d'une ellipse rencontre cette courbe en un point* M; *le cercle osculateur en* M_1 *rencontre l'ellipse en* M_2, *et ainsi de suite. On demande* 1° *d'examiner dans quel cas la ligne brisée* $MM_1M_2\ldots$ *se ferme;* 2° *de démontrer que les enveloppes des droites* MM_1, MM_2, $MM_3\ldots$ *sont les projections orthogonales d'épicycloïdes.*

(J. Neuberg.)

Nous avons reçu une excellente solution analytique de cette question par M. le Dr P. Molenbroek. Celle qu'on va lire, ne diffère de la solution de notre honorable correspondant que par la substitution de raisonnements géométriques aux formules employées.

Lorsqu'une circonférence rencontre l'ellipse ABA'B' aux points P, Q, R, S, les cordes PQ et RS sont antiparallèles par rapport à l'axe AA'. Soient p, q, r, s les points correspondants, de même abscisse, de la circonférence AbA'b', décrite sur le grand axe AA' comme diamètre; les cordes pq et rs sont également antiparallèles, d'où l'on conclut que la somme des angles AOp, AOq, AOr, AOs comptés dans le même sens, vaut un multiple de 2π. Si l'on fait coïncider les points P, Q, R en un seul M, le cercle devient osculateur en M. Soient MM_1 la corde d'osculation, mm_1 la corde correspondante du cercle AcA', A et A_1 les angles AOm, AOm_1; on a, nécessairement,

$$3\theta + \theta_1 = 2K_1\pi, \quad \theta_1 = -3\theta + 2K_1\pi,$$

K_1 étant un nombre entier quelconque.

Soient θ_2, θ_3, ... les angles AOm_2, AOm_3, ... correspondant aux points M_2, M_3, ... On voit facilement que

$$\theta_2 = -3\theta_1 + 2K_2\pi, \quad \theta_3 = -3\theta_2 + 2K_3\pi, \ldots$$

et en général

$$\theta_n = (-3)^n\theta + 2K\pi.$$

Pour que M_n coïncide avec M, on doit avoir $\theta_n = \theta + 2m\pi$; il en résulte

$$\theta_n = \frac{2q\pi}{(-3)^n - 1},$$

c'est-à-dire, que les points cherchés de l'ellipse correspondent, sur la circonférence A*b*A', aux sommets d'un polygone régulier inscrit de $p = 3^n - 1$ ou $3^n + 1$ côtés, suivant que n est pair ou impair.

L'hypothèse de $n = 1$(*) correspond aux sommets A, B, A', B' de l'ellipse, résultat évident, puisqu'alors M et M_1 coïncident.

Lorsque $n = 2$, $p = 8$, on retrouve d'abord les sommets de l'ellipse (ce qui s'explique aisément), puis les extrémités des diamètres conjugués; chacun de ces diamètres étant antiparallèle avec les tangentes à ses deux extrémités, le cercle osculateur en l'un de ces points passe par l'autre point.

Supposons $n = 3$; alors $p = 28$. Si l'on numérote les sommets d'un polygone régulier de 28 côtés inscrit dans le cercle A*b*A', à partir de A, des chiffres 0, 1, 2, ... les triangles mm_1m_2 ont pour sommets (1, 25, 9), (2, 22, 18), (3, 19, 27), ...

Et ainsi de suite.

Les cordes mm_1, mm_2, mm_3, ... se déplacent dans le cercle A*b*A' de manière que les vitesses de leurs extrémités sont dans un rapport constant; elles ont donc pour enveloppes des épicycloïdes(**). Les enveloppes des cordes MM_1, MM_2, ... sont donc des projections orthogonales de ces épicycloïdes. (J. N.)

Question 490.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 264.)

Par un point P ***pris sur la tangente en*** C ***à un cercle*** O, ***on mène une sécante*** PAB ***telle que la surface*** ABC ***soit maximum. Trouver l'enveloppe de cette sécante quand*** P ***se meut sur la tangente.*** (Fauquembergue.)

1° Soient D le milieu de AB, α et δ les angles OPC et BPC, u l'aire ABC. On a

$$u = AD.PC \sin\delta = PC \sin\delta \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OD}^2};$$

(*) Pour plus de clarté, nous traitons les cas explicitement où $n = 1, 2, 3$.

(**) Ou hypocycloïdes, suivant que n est pair ou impair.

or

$$OA = OC = OP \sin \alpha, \quad OD = OP \sin (\delta - \alpha);$$

d'où

$$u^2 = \overline{PC}^2 . OP^2 \sin^2 \delta \sin (2\alpha - \delta).$$

Égalant à zéro la dérivée de u^2, on trouve

$$\operatorname{tg} (2\alpha - \delta) = \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \delta, \tag{1}$$

c'est-à-dire, si PE est la seconde tangente menée de P au cercle O,

$$\operatorname{tg} DPE = \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} CPB.$$

De l'équation (1), on déduit

$$\frac{\operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} (2\alpha - \delta)}{\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} (2\alpha - \delta)} = 2, \quad \sin 2 (\delta - \alpha) = \tfrac{1}{3} \sin 2\alpha,$$

d'où une construction élégante de la sécante PAB.

Si l'on fait $OC = a$, $CP = d$, l'équation (1) se ramène à la forme

$$ad \operatorname{tg}^2 \delta - 2 (a^2 - d^2) \operatorname{tg} \delta - 3ad = 0. \tag{2}$$

Une seule racine de (2) convient au problème proposé ; l'autre correspond à une droite qui ne rencontre pas la circonférence, et à un minimum analytique (négatif) de u^2.

2° L'équation (2) caractérise, en coordonnées tangentielles, l'enveloppe de la droite PAB. Par tout point P de la tangente en C, il passe trois droites de l'enveloppe, savoir la ligne PC qui correspond à $d = 0$, et deux autres déterminées par les racines de l'équation (2), lorsqu'on fait $d = CP$. La courbe est de la troisième classe.

Pour obtenir l'équation de l'enveloppe en coordonnées tangentielles, on peut remplacer, dans (2), $\operatorname{tg} \delta$ par $y : d - x$, puis éliminer d entre l'égalité résultante et sa dérivée par rapport par d.

MM. Déprez et Falisse ont donné de bonnes solutions de la question, mais sans préciser la position de la sécante PAB. Le premier a aussi traité le problème pour une conique quelconque. (J. N.)

Question 505, 1re partie(*).

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 23.)

Démontrer la relation

$$C_{n,1} - C_{n,2}\,C_{3,2} + C_{n,3}\,C_{4,2} - C_{n,4}\,C_{5,2} + \cdots \pm C_{n,n}\,C_{n+1,2} = 0.$$

(E. CATALAN.)

Solution d'après M. DURFEE(**). m et n étant des nombres entiers positifs, on a

$$(1-x)^n = C_{n,0} - C_{n,1}x + C_{n,2}x^2 - \cdots + (-1)^k\,C_{n,k}x^k \cdots \quad (1.$$

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = C_{m,m} + C_{m+1,m}x + C_{m+2,m}x^2 + \cdots + C_{m+k,m}x^k + \cdots \quad (2.$$

Multiplions ces égalités membre à membre. Dans le produit des seconds membres, le coefficient de x^k a pour expression

$$C_{n,0}\,C_{m+k,n} - C_{n,1}\,C_{m+k-1,m} + C_{n,2}\,C_{m+k-2,m} - \cdots + (-1)^k\,C_{n,k}\,C_{m,m},$$

si l'on suppose $k \leqq n$; mais cette valeur convient encore dans l'hypothèse $k > n$, pourvu que l'on convienne de regarder le symbole $C_{p,q}$ comme ayant pour valeur 0, lorsque le second indice est supérieur au premier. Ce coefficient peut être représenté indifféremment par l'une ou l'autre notation

$$\Sigma_0^k (-1)^s\,C_{n,s}\,C_{m+k-s,m}, \quad \Sigma_0^n (-1)^s\,C_{n,s}\,C_{m+k-s,m},$$

s étant un nombre qui prend toutes les valeurs entières comprises entre

---

(*) La seconde relation de la question 506 doit être rectifiée ainsi :

$$\frac{1}{2p-1}C_{2p,p} + \frac{1}{2p-2}C_{2,1}C_{2p-2,p-1} - \frac{1}{2p-3}C_{3,2}C_{2p-4,p-2} - \cdots - C_{2p,p}$$

$$= 4^p \frac{2.4.6\ldots 2p}{3.5.7\ldots 2p-1} = \frac{2^{2p-1}}{p-1}C_{2p-2,p-1}.$$

La question 513 t. VI, p. 71, exige également une rectification : l'identité à vérifier est

$$2^n \Sigma_0^n - 4^p \left[C_{2p,p}\right]^2 C_{n,p} = \Sigma_0^n \frac{C_{n,p}^2\,C_{2p,p}\,C_{2p-2p,p}}{C_{n,p}},$$

n étant un nombre pair, et p prenant successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n$.

(**) Nous modifions légèrement les notations de M. Durfee et introduisons la formule du binôme de Newton dans le cas d'un exposant négatif, formule que M. Durfee a vraie avant

les deux limites indiquées, inclusivement; pour éliminer les termes nuls, on prendra la plus petite des limites supérieures k, n.

Le produit des premiers membres de (1) et (2) est

$$(1-x)^{n-m-1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{(1-x)^{m-n+1}},$$

suivant que n est plus grand ou plus petit que $m+1$; si on le développe par la formule du binôme de Newton, le coefficient de x^k est

$$(-1)^k C_{n-m-1,k} \quad \text{ou} \quad C_{m-n+k,m-n} = C_{m-n+k,k}.$$

Dans le premier cas, on a la formule

$$C_{n-m-1,k} = \Sigma_0^k (-1)^{k-\mu} C_{n,\mu} C_{m+k-\mu,m}.$$

Si l'on fait $m=2$, $k=n-1$, on obtient

$$0 = \Sigma_0^{n-1} (-1)^{n-1-\mu} C_{n,\mu} C_{n+1-\mu,2},$$

ou, en écrivant μ pour $n-\mu$ et en multipliant par -1,

$$\Sigma_1^n (-1)^\mu C_{n,\mu} C_{\mu+1,2} = 0,$$

ce qui est l'identité proposée.

Remarque. Considérons le cas de $n=m$. Alors le produit des premiers membres de (1) et (2) sera

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots;$$

par conséquent,

$$1 = \Sigma_0^n (-1)^\mu C_{n,\mu} C_{n+k-\mu,n} = \Sigma_0^n (-1)^\mu C_{n,\mu} C_{p-\mu,n}, \qquad (3)$$

p étant écrit pour $n+k$.

Observons que

$$C_{n,\mu} C_{p-\mu,n} =$$

$$\frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} \times \frac{(p-\mu)!}{n!(p-\mu-n)!} = \frac{(p-2\mu)!}{(n-\mu)!(p-\mu-n)!} \times \frac{(p-\mu)!}{\mu!(p-2\mu)!}$$

$$= \frac{(p-n)!}{\mu!(p-\mu-n)!} \times \frac{(p-\mu)!}{(p-n)!(n-\mu)!}.$$

Il résulte de là que l'égalité (3) peut prendre les formes

$$1 = \Sigma_0^n (-1)^\mu C_{p-\mu,\mu} C_{p-2\mu,n-\mu}, \qquad (4)$$

$$1 = \Sigma_0^n (-1)^\mu C_{p-n,\mu} C_{p-\mu,p-n} = \Sigma_0^k (-1)^\mu C_{k,\mu} C_{p-\mu,k}(*).$$

(*) On peut aussi écrire Σ_0^n au lieu de Σ_0^k, lorsque $n \leqq k$.

Question 505, 1re partie(*).

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 23.)

Démontrer la relation

$$C_{n,1} - C_{n,2}\,C_{3,2} + C_{n,3}\,C_{4,2} - C_{n,4}\,C_{5,2} + \cdots \pm C_{n,n}\,C_{n+1,2} = 0.$$

(E. CATALAN.)

Solution d'après M. DURFEE(**). m et n étant des nombres entiers positifs, on a

$$(1-x)^n = C_{n,0} - C_{n,1}x + C_{n,2}x^2 - \cdots + (-1)^k C_{n,k}x^k \cdots \quad (1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = C_{m,m} + C_{m+1,m}x + C_{m+2,m}x^2 + \cdots + C_{m+k,m}x^k + \cdots \quad (2)$$

Multiplions ces égalités membre à membre. Dans le produit des seconds membres, le coefficient de x^k a pour expression

$$C_{n,0}\,C_{m+k,n} - C_{n,1}\,C_{m+k-1,m} + C_{n,2}\,C_{m+k-2,m} - \cdots + (-1)^k C_{n,k}\,C_{m,m},$$

si l'on suppose $k \leqq n$; mais cette valeur convient encore dans l'hypothèse $k > n$, pourvu que l'on convienne de regarder le symbole $C_{p,q}$ comme ayant pour valeur 0, lorsque le second indice est supérieur au premier. Ce coefficient peut être représenté indifféremment par l'une ou l'autre notation

$$\Sigma_0^k (-1)^\mu C_{n,\mu}\,C_{m+k-\mu,m}, \quad \Sigma_0^n (-1)^\mu C_{n,\mu}\,C_{m+k-\mu,m},$$

μ étant un nombre qui prend toutes les valeurs entières comprises entre

---

(*) La seconde relation de la question 505 doit être rectifiée ainsi :

$$\frac{1}{2p+1}C_{2p,p} + \frac{1}{2p-1}C_{2,1}\,C_{2p-2,p-1} + \frac{1}{2p-3}C_{4,2}\,C_{2p-4,p-2} + \cdots + C_{2p,p}$$
$$= 4^p \frac{2.4.6\ldots 2p}{3.5.7\ldots(2p+1)} = \frac{2^{2p-1}}{(p+1)\,C_{2p+2,p+1}}.$$

La question 513 (t. VI, p. 71) exige également une rectification; l'identité à vérifier est

$$2^n \Sigma_0^n (-4)^p [C_{2n-2p,n-p}]^2\,C_{n-p,p} = \Sigma_0^n \frac{[C_{2p,p}]^2\,[C_{2n-2p,n-p}]}{C_{n,p}},$$

n étant un nombre fixe, et p prenant successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n$.

(**) Nous modifions légèrement les notations de M. Durfee et introduisons la formule du binôme de Newton dans le cas d'un exposant négatif, formule que M. Durfee a voulu éviter.

les deux limites indiquées, inclusivement; pour éliminer les termes nuls, on prendra la plus petite des limites supérieures k, n.

Le produit des premiers membres de (1) et (2) est

$$(1-x)^{n-m-1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{(1-x)^{m-n+1}},$$

suivant que n est plus grand ou plus petit que $m+1$; si on le développe par la formule du binôme de Newton, le coefficient de x^k est

$$(-1)^k C_{n-m-1,k} \quad \text{ou} \quad C_{m-n+k,m-n} = C_{m-n+k,k}.$$

Dans le premier cas, on a la formule

$$C_{n-m-1,k} = \Sigma_0^k (-1)^{k-\mu} C_{n,\mu} C_{m+k-\mu,m}.$$

Si l'on fait $m=2$, $k=n-1$, on obtient

$$0 = \Sigma_0^{n-1} (-1)^{n-1-\mu} C_{n,\mu} C_{n+1-\mu,2},$$

ou, en écrivant μ pour $n-\mu$ et en multipliant par -1,

$$\Sigma_1^n (-1)^\mu C_{n,\mu} C_{\mu+1,2} = 0,$$

ce qui est l'identité proposée.

Remarque. Considérons le cas de $n=m$. Alors le produit des premiers membres de (1) et (2) sera

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots;$$

par conséquent,

$$1 = \Sigma_0^n (-1)^\mu C_{n,\mu} C_{n+k-\mu,n} = \Sigma_0^n (-1)^\mu C_{n,\mu} C_{p-\mu,n}, \qquad (3)$$

p étant écrit pour $n+k$.

Observons que

$$C_{n,\mu} C_{p-\mu,n} =$$

$$\frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} \times \frac{(p-\mu)!}{n!(p-\mu-n)!} = \frac{(p-2\mu)!}{(n-\mu)!(p-\mu-n)!} \times \frac{(p-\mu)!}{\mu!(p-2\mu)!}$$

$$= \frac{(p-n)!}{\mu!(p-\mu-n)!} \times \frac{(p-\mu)!}{(p-n)!(n-\mu)!}.$$

Il résulte de là que l'égalité (3) peut prendre les formes

$$1 = \Sigma_0^n (-1)^\mu C_{p-\mu,\mu} C_{p-2\mu,n-\mu}, \qquad (4)$$

$$1 = \Sigma_0^n (-1)^\mu C_{p-n,\mu} C_{p-\mu,p-n} = \Sigma_0^k (-1)^\mu C_{k,\mu} C_{p-\mu,k}(*).$$

(*) On peut aussi écrire Σ_0^n au lieu de Σ_0^k, lorsque $n \leqq k$.

ajoutons encore le terme précédent, etc. Finalement, on trouve que le coefficient de z^{n-2p} est

$$(-1)^p \frac{(n-p)(n-p-1)\cdots(n-2p+2)(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}.$$

De là on conclut la question 508. On obtient l'identité du n° 509 en remplaçant x par tg φ.

Solution par M. Even. Posons $x = \cos + i \sin \varphi$; d'où, par la formule de Moivre

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\varphi, \quad x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\varphi.$$

Divisant l'équation proposée par x^n, on voit que le premier membre est identique à

$$2[\cos n\varphi + \cos(n-2)\varphi + \cos(n-4)\varphi + \cdots]$$

ou, en appliquant la formule qui donne la somme des cosinus d'arcs en progression arithmétique,

$$\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

Or (Serret, *Trigonométrie*, p. 36), cette dernière expression est égale à

$$2^n\cos^n\varphi - \frac{n-1}{1}2^{n-2}\cos^{n-2}\varphi + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}2^{n-4}\cos^{n-4}\varphi - \cdots$$

Remplaçons 2 cos φ par z, etc.

La question 509 résulte immédiatement de la précédente au moyen de la substitution $x = \text{tg}\,\varphi$.

Ont résolu les mêmes questions MM. Beyens (Cadix), et Jansens (Ostende).

Question 587.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 207.)

Si deux droites AD, BE *tournent autour de leurs extrémités* A, B *avec la même vitesse angulaire :* 1° *le point* M *qui divise la droite* DE *dans un rapport donné m : n décrit une circonférence ;* 2° *il existe un point fixe* S *tel que le triangle* SDE *est de forme constante ;* 3° *la droite* DE *enveloppe*

une conique ayant pour foyer le point S; *elle est divisée par son point de contact en deux parties proportionnelles aux projections de* AD, BE *sur* DE.

(J. Neuberg.)

De bonnes solutions de cette question nous ont été adressées par MM. Meurice, Lambotte (de Solières), Emmerich (Mülheim), Déprez (Dinant), Molenbroek Jr (Amersfort) et Mineur. Nous allons reproduire intégralement celle de M. Meurice, qui est la plus simple, et l'accompagner de remarques empruntées aux autres solutions. Le lecteur peut aussi consulter un article sur le même sujet que nous avons publié dans le J. M. E., 1888, p. 111.

Solution de M. Meurice. 1° Le point d'intersection C des droites AD, BE décrit une circonférence passant par A et B.

Construisons les parallélogrammes ADMF, BEMG, joignons F à G et soit I le point de rencontre des droites AB, FG.

Les droites AF, BC étant parallèles entre elles et dans le rapport $m : n$, le point I divise AB dans le même rapport; donc il est fixe. De plus, le triangle FMG est de forme invariable et I est un point fixe de la base FG. Donc M décrit une circonférence ayant pour centre le point I qui divise AB dans le rapport donné $m : n$.

2° Le second point d'intersection S des circonférences ABC, CDE est le centre de similitude de deux figures semblables construites sur AD et BE; mais les droites AD, BE, dans leurs positions successives, se correspondent toujours dans les deux mêmes figures semblables. Donc S est un point fixe; de plus, les triangles SAB, SDE sont semblables.

3° Menons SH perpendiculaire à DE. Le rapport DH : HE étant constant, H décrit une circonférence, qui a pour centre la projection K de S sur AB. La droite DE enveloppe donc une conique, ayant pour foyer le point S et pour cercle principal le lieu du point H; K est le centre de cette courbe.

Les vitesses angulaires des droites AD, BE étant égales, les vitesses de circulation des points D, E peuvent être représentées, dans une position normale à leur véritable direction, par les lignes DA et BE. Décomposons ces vitesses en deux autres, dirigées suivant DE et suivant une perpendiculaire à DE; si A', B' sont les projections de A, B sur DE, les composantes normales à DE, après avoir tourné de 90° autour de leurs points d'application, sont figurées par DA', EB'. Mais ces composantes sont les vitesses de circulation des points de D, E autour du point

N de contact de DE avec son enveloppe; donc DN : NE = DA′ : EB′(*).

Remarques. 1° Les droites AE, BD se correspondent dans deux faisceaux entre lesquels il existe une correspondance (2, 2); donc leur point d'intersection L engendre une quartique ayant des points doubles en A et B. (Lambotte.)

2° Si l'on construit sur DE un triangle DEX semblable à un triangle donné, le point X décrit encore une circonférence, ayant pour centre le sommet P d'un triangle ABP semblable à DEX.

Toute droite du plan DEX enveloppe une conique, de foyer S. (Déprez.)

3° Les points D, E peuvent être considérés, pendant un temps infiniment petit, comme étant mobiles sur les tangentes TD, TE à leurs trajectoires. La droite DE étant vue de S sous un angle constant, la droite DE roule, pendant un temps infiniment petit, sur une conique dont TD et TE sont des tangentes et S un foyer; N étant le point de contact de DE avec cette conique (et aussi avec son enveloppe), les droites SN et ST sont isogonales par rapport à l'angle DSE. En observant que ST est un diamètre de la circonférence CDE, et que les triangles SDA, SEB sont semblables, on trouve DN : NE = AD sin TDE : BE sin TED, ce qui démontre la fin de la troisième partie de la question. (Déprez.)

×Question 599.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 280.)

Étant donnés deux diamètres OX, OY *d'un cercle* Σ *non tracé, et deux points* S *et* S_1 *sur* OX, *deux points* S′ *et* S_1' *sur* OY, *il existe toujours deux cercles* Δ *et* Δ′ *ayant ces couples de points pour centres de similitude externe et interne avec* Σ. *Trouver le centre radical des trois cercles* Σ, Δ, Δ′ *au moyen de la règle et de l'équerre seules.* (E. Vigarié.)

Solution par MM. Déprez *et* Molenbroek. Soient X et X_1, Y et Y_1 les extrémités connues des diamètres de Σ dirigés suivant OS, OS′, et A, A′ les centres des cercles Δ, Δ′. Pour déterminer A, nous cherchons le conjugué harmonique de O par rapport à SS_1. A cet effet, tirons YS, YS_1 et menons par S, S_1 des parallèles à OY, rencontrant

(*) Pour une autre démonstration de cette partie de la question, voir Neuberg, N. C. M., t. VI, p. 463.

YS_1, YS en P, Q; la droite PQ passe par A. Une parallèle par A à OY coupe YS, YS_1 aux extrémités B, C d'un diamètre de Δ. Par une construction analogue, on obtient le centre A′ et les extrémités B′, C′ du diamètre de Δ′ parallèle à OX.

Soit H le pied de l'axe radical de Σ, Δ. Des parallèles par C à YX, YX_1 rencontrent OX aux extrémités E, E_1 d'un diamètre de Δ. H étant le point central de l'involution dont X et X_1, E et E_1 sont des points conjugués, ce point s'obtient par une construction connue : par exemple, on mène une parallèle à XX_1 qui coupe YX en M, YX_1 en M_1; les droites ME, M_1E_1 rencontrant respectivement YX_1, YX en G_1, G et la droite GG_1 passe par H.

On détermine de même le pied H′ de l'axe radical de Σ et Δ′. Les perpendiculaires élevées en H sur OX, en H′ sur OY se coupent au point cherché.

Question 621.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 176.)

Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}=z\frac{d^2z}{dxdy}. \qquad \text{(V. Jamet.)}$$

Solution par MM. Lambotte, Mandart, A. Demoulin. On a

$$\frac{\dfrac{d^2z}{dxdy}}{\dfrac{dz}{dx}}=\frac{\dfrac{dz}{dy}}{z}.$$

Les numérateurs étant les dérivées des dénominateurs par rapport à y, on trouve en intégrant

$$\log\frac{dz}{dx}=\log z+\log\chi(x),$$

$\chi(x)$ étant une fonction arbitraire. De là, successivement,

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{\chi(x)}, \quad \log z=\log\varphi(x)+\log\psi(y), \quad z=\varphi(x)\psi(y),$$

φ et ψ étant des fonctions arbitraires.

Généralisation par M. Mannheim. Soit à intégrer

$$f\left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{dx}{dy}=\mathrm{F}z\,\frac{d^2z}{dxdy},$$

f et F désignant des fonctions données. Écrivons

$$\frac{\dfrac{d^2z}{dxdy}}{f\left(\dfrac{dz}{dx}\right)}=\frac{\dfrac{dx}{dy}}{\mathrm{F}z}.$$

Si $f^{-1}(z)$ et $\mathrm{F}_1(z)$ désignent les fonctions primitives de $f^{-1}(z)$, $\mathrm{F}^{-1}(z)$, nous aurons la suite de l'équation précédente

$$f^{-1}\left(\frac{dz}{dx}\right)=\mathrm{F}_1 z-\chi y.$$

Cette équation est intégrable en divers cas, dont nous ne citons que le suivant. Si $f^{-1}z\equiv az$ et qu'on remplace χy par $-\frac{1}{a}\log\varphi(y)$, on aura:

$$e^{-\mathrm{F}_1 z}dz=\frac{dx}{\varphi y}$$

et en intégrant

$$\int e^{-\mathrm{F}_1 z}dz=\psi x-\chi y.$$

ψ et χ sont des fonctions arbitraires. L'équation proposée par M. Jamet correspond à $\mathrm{F}z\equiv az$, dans ce cas la formule précédente donne

$$\int\frac{dz}{z}=\psi x-\chi y,\quad z=e^{\psi x-\chi y}=e^{\psi x}e^{\beta y},$$

en faisant $\psi x=\alpha x$, $\chi y=-\beta y$, α et β étant des fonctions arbitraires.

Comme valeurs admissibles de $\mathrm{F}z$, nous signalons

$$az-b^n,\quad \frac{b}{b^n z},\quad az^2-az-b,\quad \ldots$$

Si $f^{-1}z$ désigne $\frac{dz}{dx}$, on aura $\frac{dz}{\varphi z}=e^{\beta y}\frac{d^2z}{dxdy}$.

Question 630.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 262.)

Soient AB *un diamètre d'une circonférence, et* CD *une corde perpendiculaire à* AB *au point* E. *Si* a, b, c, d *sont les distances des points* A, B, C, D *à une droite quelconque* L *et que* $BE : AE = \lambda : \mu$, *démontrer la relation*

$$\lambda a^2 + \mu b^2 = (\lambda + \mu)(cd + \overline{CE}^2).$$

Déduire de là l'enveloppe d'une droite L *satisfaisant à la condition* $\lambda a^2 + \mu b^2 = const.$ (M'Cay.)

Solutions par MM. Verniory *et* Déprez. Désignons par λ, μ les segments BE, AE, par e la distance de E à L, par φ l'angle de AB avec L. Des relations

$$a - e = \mu \sin\varphi, \quad e - b = \lambda \sin\varphi,$$

on tire

$$\lambda a^2 + \mu b^2 = (\lambda + \mu)(e^2 + \lambda\mu \sin^2\varphi).$$

Or

$$\begin{aligned} e^2 + \lambda\mu \sin^2\varphi &= \tfrac{1}{4}(c+d)^2 + \lambda\mu - \lambda\mu\cos^2\varphi \\ &= \tfrac{1}{4}(c+d)^2 + \overline{CE}^2 - \tfrac{1}{4}(c-d)^2; \end{aligned}$$

par conséquent

$$\lambda a^2 + \mu b^2 = (\lambda + \mu)(cd + \overline{CE}^2). \qquad (1)$$

Si $\lambda a^2 + \mu b^2 = m^2$, divisons AB au point E dans le rapport $\mu : \lambda$, et soient C, D les extrémités de la corde perpendiculaire à AB au point E, dans la circonférence décrite sur AB comme diamètre. De la relation (1), on conclut

$$cd = \frac{m^2}{\lambda + \mu} - \overline{CE}^2.$$

Donc L enveloppe une conique ayant pour foyers C, D et pour axe non focal

$$\frac{2}{\lambda + \mu}\sqrt{m^2 - (\lambda + \mu)\,CE^2}, \quad \text{pour axe focal} \quad \frac{2m}{\sqrt{\lambda + \mu}}.$$

Note. Nous avons traité dans la N. C. M., t. VI, p. 514, l'enveloppe de la droite satisfaisant à la condition $\lambda a^2 + \mu b^2 + 2\nu ab = const.$ M. Déprez traite la question analogue sur la sphère; il trouve que l'arc de grand cercle dont les distances a, b à deux points fixes A, B vérifient la relation

$$\lambda \sin^2 a + \mu \sin^2 b + 2\nu \sin a \sin b = const.,$$

enveloppe une conique sphérique. Notre zélé collègue de Dinant étend également la relation (1) à la sphère; il trouve

$$\sin^2 a \frac{\sin BE}{\cos AE} + \sin^2 b \frac{\sin AE}{\cos BE} = \sin 2AB\,[\sin c \sin d + \sin^2 CE],$$

les angles ACB, ADB étant supposés droits. (J. N.)

×Question 632.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 279.)

On donne un cercle O, *deux diamètres rectangulaires* OX, OY *et une perpendiculaire* CL *en un point* C *de* OX. *La tangente menée au point* P *de la circonférence rencontre* OX *en* A, OY *en* B; *la perpendiculaire élevée en* A *sur* AB *coupe* CL *en* R. *Démontrer que le lieu géométrique du point d'intersection* M *des droites* OP, BR *est la circonférence décrite sur* OC *comme diamètre.* (Mandart.)

Solution par MM. Déprez *et* Russo. Soit S le point de rencontre de AR avec OY. A cause des parallèles OP et AS, OS et CR, on a

$$\frac{OM}{OP} = \frac{SR}{SA} = \frac{OC}{OA},$$

d'où l'on conclut que MC est parallèle à PA et, par suite, perpendiculaire à OM.

Ont résolu la même question MM. Molenbroek, Klompers, et Bellens, ce dernier par la géométrie analytique.

Remarques. I. Soient H le point de rencontre de CM avec la perpendiculaire abaissée de P sur OX, N celui de OH avec AB : le point N se meut sur une parallèle à OX.

Car, H étant l'orthocentre du triangle OPC, ON est perpendiculaire à PC, et dans le triangle rectangle OPN, on a $\overline{OP}^2 = OE.ON$, E étant le point de rencontre PC avec ON. Par conséquent, les points E et N décrivent des lignes inverses par rapport au cercle O; mais le lieu de E est la circonférence de diamètre OC,... (Klompers.)

II. Pour la question analogue sur la sphère, on trouve

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\operatorname{tg} d\,(\operatorname{tg}^2 r + \cos^2 \omega)}{\operatorname{tg} r \operatorname{tg} d \sin^2 \omega + \cos \omega \sec^2 r},$$

après avoir posé

$$\rho = OM, \quad r = OP, \quad d = OC, \quad \omega = POX. \qquad \text{(Déprez.)}$$

×Question 642.

(Voir *Mathésis*, t. IX, p. 88.)

Soient x, y, z les distances des sommets du triangle ABC *au centre* I *du cercle inscrit et x', y', z' les distances de ces sommets à l'orthocentre* H. *Démontrer les relations*

$$\mathrm{S}\, a^4x^4 + (a+b+c)^2\, x^2y^2z^2 = 2\,\mathrm{S}\, a^2b^2x^2y^2$$

$$x'y'z'\,\mathrm{S}^3 ax' + abc\,\mathrm{S}\, x'^2\,\mathrm{S}^2 ax' = 4\, a^2b^2c^2.$$

Solution par M. Déprez. 1° On a

$$x = \frac{r}{\sin\frac{1}{2}\mathrm{A}} = \frac{2r\cos\frac{1}{2}\mathrm{A}}{\sin\mathrm{A}} = \frac{4\mathrm{R}r\cos\frac{1}{2}\mathrm{A}}{a}, \ldots \qquad (1)$$

D'autre part, la formule

$$\cos\tfrac{1}{2}\mathrm{A} = \cos\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\sqrt{1-\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{C}} + \cos\tfrac{1}{2}\mathrm{C}\sqrt{1-\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{B}},$$

rendue rationnelle, donne

$$\mathrm{S}\cos^4\tfrac{1}{2}\mathrm{A} - 2\mathrm{S}\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{A}\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{B} + 4\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{A}\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{C} = 0. \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2) résulte la première formule à démontrer.

On obtient une équation plus simple en faisant intervenir la relation

$$\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{A} = \cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \sqrt{(1-\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{B})(1-\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{C})} - \sin\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{C},$$

qui se ramène à

$$\mathrm{S}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{A} + 2\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{A}\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{C} = 1.$$

2° On a

$$x' = 2\mathrm{R}\cos\mathrm{A}, \ldots$$

D'autre part,

$$\mathrm{S}\cos^2\mathrm{A} + 2\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C} = 1.$$

Remplaçons $\cos\mathrm{A}$ par $\frac{x'}{2\mathrm{R}}, \ldots$ et R par $\frac{abc}{4\mathrm{S}} = \frac{abc}{2\mathrm{S}\,ax'}$, etc.

Une autre identité entre x', y', z' se déduit de

$$x' = a\cot\mathrm{A}, \ldots, \cot\mathrm{A}\cot\mathrm{B} + \cot\mathrm{B}\cot\mathrm{C} + \cot\mathrm{C}\cot\mathrm{A} = 1.$$

Autre solution par M. A. Boutin (Brévannes, Seine-et-Oise), P. Decamps (Piéton).

QUESTIONS D'EXAMEN.

398. Trouver sur la base BC d'un triangle ABC un point D tel que

$$\overline{AD}^2 = \frac{m}{n} BD.DC.$$

Si E est le point de rencontre de AD avec la circonférence ABC, on a

$$AD : DE = \frac{m}{n},$$

d'où une parallèle à BC qui, par son intersection avec la circonférence détermine E. (STEINER, *Œuvres complètes*, t. II, p. 391.)

399. Résoudre le système

$$x - z = 12, \quad (x + y + z)\, x = 299, \quad (x + y + z)(y + z) = 230.$$

400. Dans toute ellipse,

$$\sqrt{FM.F'M}\cos\tfrac{1}{2}FMF' = \text{le demi petit axe}.$$

Cette relation se tire immédiatement de la formule

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

ou de cette proposition connue : le produit des distances des foyers à une tangente est égal au quart du carré du petit axe.

401. Résoudre le système

$$x + y + axy = A, \quad y + z + ayz = B, \quad z + x + azx = C.$$

On ramène la première équation à

$$1 + a(x + y) + a^2xy = Aa + 1 \quad \text{ou} \quad (1 + ax)(1 + ay) = Aa + 1, \quad \ldots$$

402. Soient M, M′ les extrémités de deux diamètres conjugués OM, OM′ d'une ellipse. Démontrer que la somme

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}FMF' + \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}FM'F'$$

est constante. (STEINER.)

403. Résoudre

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 530, \\ xy + x + y = 230, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + y = a, \\ xy + \tfrac{1}{2}x = b. \end{cases}$$

404. Étant données trois circonférences O, O_1, O_2, passant par un même point A, mener par A une sécante, qui rencontre les trois courbes en trois points B, B_1, B_2, tels que $BB_1 : B_1B_2 = m : n$. (STEINER.)

405. Étant donnés trois points A, B, C, et une droite CX menée par C, décrire une circonférence passant par A, B et rencontrant CX en deux points D, E, tels que $CD : CE = m : n$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

656. Résoudre le système

$$2(x-y)^2[(x+y)^2+z^2] = z^4,$$
$$\frac{3x(x+y)-z^2}{3y(x+y)-z^2} = \frac{4y-7}{7-4x},$$
$$4(x+y)z - z^2 - 16xy = 0,$$

sachant que z est un nombre entier et que x et y sont rationnels.

***657.** Si m est impair, transformer $\cos^{m-1} x \sin x$ en

$$A_1 \sin x + A_3 \sin 3x + \cdots + A_m \sin mx.$$

Quelles sont les valeurs des coefficients? (E. CATALAN.)

***658.** Pour que les équations

$$y^2+z^2-2ayz=0, \quad z^2+x^2-2bzx=0, \quad x^2+y^2-2cxy=0,$$

soient compatibles, il faut et il suffit que l'on ait

$$a^2+b^2+c^2-2abc=1. \qquad \text{(J. NEUBERG.)}$$

***659.** On décrit les deux cercles Δ_a, Δ'_a qui touchent les côtés AB, AC d'un triangle et ont, le premier un contact intérieur en V_a, le second un contact extérieur en V'_a avec le cercle circonscrit à ABC. Démontrer 1° Que les polaires de A par rapport à Δ_a, Δ'_a passent, respectivement, par le centre I du cercle inscrit à ABC et par le centre I_a du cercle exinscrit, opposé à A. 2° Que les droites AV_a, BV_b, CV_c concourent au point inverse du point de Nagel de ABC. 3° Les droites AV'_a, BV'_b, CV'_c concourent au point inverse du point de Gergonne de ABC.

(DE LONGCHAMPS.)

660. En un point quelconque M d'un quadrant de cercle AB, on mène une tangente, rencontrant le rayon OA en N. On élève sur OA la perpendiculaire $NT = NM$, et l'on joint AT, MT. Démontrer 1° que MT passe par un point fixe; 2° que le lieu de T est une hyperbole équilatère (théorème connu); 3° que le point d'intersection des droites NM et AT se meut sur une hyperbole. (DE ROCQUIGNY.)

×**661**. *Soient* $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, *les côtés et les médianes d'un triangle quelconque* ABC. *On peut construire un triangle* A'B'C' *dont les côtés sont parallèles et proportionnels aux médianes de* ABC; *les médianes de* A'B'C' *seront également parallèles et proportionnelles aux côtés de* ABC. *Ces deux triangles, qui ont aussi même angle de Brocard, sont, chacun, le* triangle médian *de l'autre. Ils ne sont pas semblables à moins d'être équilatéraux. Mais* A'B'C' *peut être semblable à* ACB, *de sorte que* $a : b : c = \alpha : \gamma : \beta$; *dans ce cas, nous dirons que* ABC *est un triangle* automédian. *Un tel triangle jouit des propriétés suivantes :*

1° $a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) = 2bc \cos A$, $2 \cot A = \cot B + \cot C$,
$2 \cos 2A = \cos 2B + \cos 2C$, $\cot^2 B + 4 \cot B \cot C \cot^2 C = 2$.

2° *Désignons par* A_1, B_1, C_1 *les milieux des côtés de* ABC, *par* G, K, O, H *le centre de gravité, le point de Lemoine, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre.*

La circonférence AB_1C_1 *passe par* G; *les circonférences* AGB, AGC *touchent la* base BC; *la circonférence* BGC *passe par* H.

3° OK *est perpendiculaire à* AK, GK *est parallèle à* BC (Lemoine, *Mathesis*, t. V, p. 104.)

4° *Soient* R, R_a, R_b, R_c *les rayons des circonférences* ABC, GBC, GCA, GAB; *l'on a*

$$R^2 = R_a^2 = R_b R_c, \quad \overline{AK}^2 = BK.CK, \quad \overline{2AH}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2.$$

5° *Si* D, D' *sont les pieds des bissectrices de l'angle* A, *l'angle* DGD' *est droit.*

6° *Les projections de* G *sur les côtés de* ABC *sont les sommets d'un triangle isoscèle.*

7° *Lorsque deux sommets d'un triangle automédian sont fixes, le troisième décrit une circonférence.*

GA est l'un des demi-diamètres conjugués égaux de l'ellipse circonscrite à ABC et ayant son centre en G. (J. NEUBERG.)

Rectifications. Page 111, ligne 13, en remontant, lire *particularité* au lieu de *particuliarité*; page 138, au lieu de II, lire XXXVIII; p. 173, note, ligne 1, lire *cercles* au lieu de *cerles*, ligne 2, *sont* au lieu de *déterminent*. Le tableau numérique des pages 161, 162 contient des erreurs qui seront indiquées plus tard.

ÉTUDE INTRINSÈQUE DE QUELQUES LIGNES PLANES;

par M. E. Cesàro.

M. de Longchamps vient de trouver(*) que le centre de courbure d'une ellipse, en un point M, est symétrique, par rapport à M, du conjugué harmonique de ce point, relativement au segment intercepté sur la normale par la circonférence circonscrite au rectangle des axes. J'ai énoncé cette proposition, il y a plus d'un an(**), et j'ai été amené à la généraliser en cherchant les courbes planes, douées d'un cercle tel, que le segment de normale, intercepté par ce cercle, partage harmoniquement un segment proportionnel au rayon de courbure, compté à partir du point d'incidence. Suivant que le coefficient de proportionnalité est 1 ou — 1, on obtient les lignes cycloïdales, pour lesquelles le cercle fixe n'est autre que le cercle directeur, ou les coniques, pour lesquelles le cercle fixe est circonscrit au rectangle des axes. La classification de ces courbes peut également se faire, indépendamment de la valeur du coefficient de proportionnalité, au moyen de la grandeur du cercle fixe. Lorsque celui-ci se réduit à un point, on a les spirales sinusoïdes. On obtient, au contraire, les lignes de Ribaucour, lorsque le cercle fixe devient une droite. Toutes ces courbes ont la remarquable propriété de ne pouvoir subir une inflexion ou un rebroussement ailleurs que sur la circonférence fixe qui leur correspond.

Les lignes cycloïdales se présentent comme appartenant à une famille très générale de courbes, jouissant de la propriété d'avoir des rayons de courbure qui partagent harmoniquement les segments interceptés sur les normales par une conique invariable. Afin d'étudier d'autres lignes appartenant à la même famille, nous allons supposer que la conique se réduise au système de deux droites parallèles.

La propriété caractéristique de nos lignes est représentée par la relation

$$\frac{2}{\rho} = \frac{\cos\varphi}{p-b} + \frac{\cos\varphi}{p+b}, \qquad (1)$$

φ étant l'inclinaison des deux droites sur la tangente à la courbe, en M,

(*) *Mathesis*, 1889; p. 152.

(**) *Nouv. Annales de Math.*, 1888; pp. 178, 353.

$2b$ leur distance, p la distance de leur droite médiane au point M. On sait que l'invariabilité de cette droite est exprimée par les égalités

$$ds = -\rho d\varphi = \frac{dp}{\sin\varphi}, \tag{2}$$

qui permettent d'écrire, au lieu de (1),

$$-\operatorname{tg}\varphi d\varphi = \frac{pdp}{p^2 - b^2};$$

d'où, en intégrant,

$$\cos\varphi = \frac{1}{a}\sqrt{p^2 - b^2}, \tag{3}$$

la constante arbitraire a pouvant être remplacée par $a\sqrt{-1}$. La substitution de ce résultat dans les égalités (2) donne

$$\rho = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{p^2}}, \tag{4}$$

et, pour un choix convenable de l'origine des arcs,

$$p = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\frac{s}{a}. \tag{5}$$

Donc, par substitution de p dans (3),

$$\cos\varphi = \sqrt{\cos^2\frac{s}{a} - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\frac{s}{a}}, \tag{6}$$

et, par substitution dans (4),

$$\rho = a\sqrt{\frac{a^2 - b^2\operatorname{tg}^2\frac{s}{a}}{a^2 + b^2}}. \tag{7}$$

Les courbes représentées par l'équation (7) sont connues(*). Considérons une chaînette hyperbolique, méridienne du nodoïde : c'est la trajectoire d'un foyer d'hyperbole, lors du roulement de cette courbe sur une droite. Si deux hyperboles, dont les axes sont a et b, roulent symétriquement sur une droite, deux foyers de noms contraires décrivent deux courbes parallèles, dont la ligne médiane est représentée par l'équation (7). C'est aussi sur une chaînette hyperbolique qu'il faut faire rouler un cercle, pour qu'un point extérieur, fixe dans son plan, décrive une

(*) *Nouv. Annales de Math.*, 1888; p. 220.

droite (*). Alors le centre du cercle se meut sur une ligne représentée par l'équation (7). Les propriétés de cette ligne se déduisent facilement des relations (7), (5), (6). A l'origine des arcs, ces relations donnent

$$\rho = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad p = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \varphi = 0.$$

Le changement de s en $-s$ ne modifie en rien les relations dont il s'agit. La courbe s'étend donc symétriquement de part et d'autre de l'origine des arcs, et se rapproche des droites fixes, tandis que sa courbure croît à l'infini; car p décroît, et, pour une valeur convenable de s, on a

$$\rho = 0, \quad p = b, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

D'abord parallèle aux deux droites fixes, la courbe leur devient perpendiculaire en ses rebroussements, où elle se comporte comme la développante d'un cercle de rayon $\frac{a^2}{b}$.

Le changement de b^2 en $-b^2$ dans l'équation (7) donne des courbes analogues aux précédentes, mais dérivées de la chaînette elliptique, méridienne de l'onduloïde. On a, pour $s = \frac{\pi a}{2}$,

$$\rho = \infty, \quad p = 0, \quad \varphi = \text{arc. cos}\frac{b}{a}.$$

La courbe n'a pas de rebroussements : elle subit une infinité d'inflexions sur une droite, et la longueur d'une boucle, terminée par deux points d'inflexion consécutifs, est πa.

Je change maintenant a^2 en $-a^2$ dans (7), et j'obtiens une autre famille de courbes, représentée par l'équation

$$\rho = \frac{a\sqrt{(e^{\frac{s}{a}} - e^{-\frac{s}{a}})\left[(a+b)^2 e^{-\frac{s}{a}} - (a-b)^2 e^{\frac{s}{a}}\right]}}{(a+b)e^{-\frac{s}{a}} - (a-b)e^{\frac{s}{a}}}, \qquad (8)$$

pourvu qu'on transporte l'origine des arcs en un point de rebroussement. En outre

$$p = \frac{a+b}{2} e^{-\frac{s}{a}} - \frac{a-b}{2} e^{\frac{s}{a}}. \qquad (9)$$

(*) Comparez *Mathesis*, 1882; p. 145.

Les lignes (8) sont les développantes des courbes représentées par l'équation

$$\rho = \frac{a^2 + s^2}{a^2 b}\sqrt{a^4 + (a^2 - b^2)s^2}.$$

En particulier, pour $a = b$, on a

$$\rho = a + \frac{s^2}{a},$$

équation d'une chaînette parabolique, et l'équation (8), qui doit représenter une tractrice, devient

$$\rho = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}.$$

On peut se rendre compte de la forme de la courbe en observant que la relation (9) donne $p = 0$ pour s infini, et $p = b$ pour $s = 0$, d'où il suit que les deux droites fixes sont, dans le cas de la tractrice, les parallèles menées à l'asymptote par le point de rebroussement et par son symétrique relativement à l'asymptote.

×LE PLUS COURT CHEMIN SUR LA SPHÈRE (*).

THÉORÈME. *On peut inscrire, d'une infinité de manières, dans une courbe quelconque tracée sur la sphère, un polygone dont le périmètre surpasse l'arc de grand cercle qui joint les extrémités de la courbe.*

I. Soit AB l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui joint les extrémités d'une courbe quelconque AMCNB tracée sur la sphère. Le point C étant supposé en dehors de l'arc AB, menons les arcs de grand cercle AC et CB. On aura, comme on sait,

$$\text{grand cercle AB} < \text{grand cercle AC} + \text{grand cercle CB}.$$

Divisons la somme des arcs de grand cercle AC + CB en $n = 2^r$ parties égales plus petites que la différence

$$\text{gr. c. AC} + \text{gr. c. CB} - \text{gr. c. AB},$$

(*) Plusieurs de nos abonnés nous ont écrit à propos de notre précédent article sur le même sujet (*Mathesis*, pp. 112-117), pour défendre la démonstration de Legendre ou la rendre meilleure. Ces essais, selon nous, contiennent implicitement ou explicitement, le postulat que nous avons signalé dans les *Éléments* du grand analyste français.

p étant un nombre entier. Si l'on porte ces parties sur l'arc AB, il en contiendra exactement un nombre m, ou bien il sera inférieur à m de ces parties, m étant un nombre entier plus petit que n. On peut donc écrire

$$\text{gr. c. AB} \gtrless \frac{m}{n}(\text{gr. c. AC} + \text{gr. c. CB}). \qquad (1)$$

II. Considérons une circonférence de même rayon que la sphère; divisons-en un rayon en n parties égales, et considérons le m^e point de division à partir du centre. Par ce point, menons une corde c perpendiculaire au rayon, rencontrant la circonférence en deux points P et Q; par P et Q, menons au cercle les tangentes PS, QS se coupant en S sur le rayon prolongé. On a

$$c < \text{arc sous-tendu} < \text{PS} + \text{SQ},$$

$$c = \frac{m}{n}(\text{PS} + \text{PS}),$$

et, par conséquent,

$$c > \frac{m}{n}(\text{arc sous-tendu}).$$

La dernière propriété subsiste, *à fortiori*, si au lieu de mener la corde c par le m^e point de division, on la mène par un point plus rapproché de l'extrémité du rayon.

III. Inscrivons dans la courbe quelconque AMCNB, tracée sur la sphère, *en partant du point* C, des cordes c' égales ou inférieures à c, et traçons en même temps les arcs de grand cercle a sous-tendus par ces cordes. On aura évidemment

$$\text{gr. c. AC} + \text{gr. c. CB} < \text{somme des arcs } a,$$

$$\frac{m}{n}(\text{gr. c. AC} + \text{gr. c. CB}) < \frac{m}{n}(\text{somme des arcs } a),$$

et, par conséquent, à cause de la relation (1),

$$\text{gr. c. AB} < \frac{m}{n}(\text{somme des arcs } a). \qquad (2)$$

Mais on a aussi, pour chaque arc a, la relation

$$c' > \frac{m}{n}a, \quad \text{ou} \quad \frac{m}{n}a < c'.$$

7° Si $m+1$ est un nombre premier, chaque coefficient du développement de $(a+b)^m$, excepté le dernier, est divisible par son rang (*).

(DÉSIRÉ ANDRÉ, N. A. M., 1872, (2) XI, p. 84.)

Les théorèmes 2° et 4° de M. André ne diffèrent pas essentiellement de la question d'arithmologie 54 ; car celle-ci peut être énoncée ainsi :

Si a et b sont premiers entre eux,

$$C_{a+b-1,b-1} = C_{a+b-1,a} = D_{b,a} = \mathcal{M}\ b,$$

$$C_{a+b-1,a-1} = C_{a+b-1,b} = D_{a,b} = \mathcal{M}\ a,$$

M. André en indique, outre la démonstration analogue à celle de la question 54, une démonstration directe qu'il est bon de remarquer. Soit, par exemple, à prouver que

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b-1)}{1.2.3\ldots a \times 1.2.3\ldots b} = \text{entier},$$

lorsque a et b sont premiers entre eux. Si p est un facteur premier entrant dans le dénominateur de cette fraction, on doit démontrer que

$$\left(\frac{a+b-1}{p}\right)+\left(\frac{a+b-1}{p^2}\right)+\cdots \geqq \left(\frac{a}{p}\right)+\left(\frac{a}{p^2}\right)+\cdots+\left(\frac{b}{p}\right)+\cdots,$$

$\left(\frac{n}{p}\right)$ désignant la partie entière du quotient de n par p. Or, pour tout diviseur d, on a

$$\left(\frac{a+b-1}{d}\right) \geqq \left(\frac{a}{d}\right)+\left(\frac{b}{d}\right);$$

car, si $a = dq + r$, $b = dq' + r'$, l'inégalité précédente se ramène à la forme

$$\left[\frac{d(q+q')+r+r'-1}{d}\right] \geqq q+q',$$

qui la rend évidente, la quantité $r + r' - 1$ ne pouvant être négative que dans le cas de $r = r' = 0$, cas exclu par l'hypothèse que a et b sont premiers entre eux.

71. On considère sept nombres entiers consécutifs, démontrer que le produit des trois derniers, diminué du produit des trois premiers, donne un nombre divisible par 12. (DE LONGCHAMPS.)

72. Soient neuf nombres entiers consécutifs. Le produit des quatre derniers, diminué du produit des quatre premiers donne un nombre

---

(*) D'après la question 56 (*Mathesis*, 1881, I, p. 118), chacun de ces coefficients est aussi égal à un multiple de $m+1$, augmenté ou diminué de 1 (CATALAN, *Mélanges Mathématiques*, t. I, p. 325).

7° $u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + u_4^3 + u_5^3$ est le produit de u_3 par une somme de trois ou quatre carrés. (DE ROCQUIGNY.)

Voici les décompositions dont il s'agit dans cette question ; d désigne la raison de la progression, u représente tantôt le premier terme, tantôt le terme du milieu.

1. $u = u_3$, $(u^2 + 4ud + 3d^2)^3 + (u^2 - 4ud + 3d^2)^3 + 4(u^2 + 2d^2)^3$.

2. $u = u_1$, $(3u + 7d)^3 + (u - d)^3$.

3. $u = u_3$, $9u^3 + 25d^3 + (4u + 5d)^3$.

4. $u = u_1$, $(u - d)^3 + (u + d)^3 + (u + 5d)^3 + (u + 9d)^3 + 4d^3$.

5. $u = u_3$, la somme des quatrièmes puissances peut prendre les formes :

$$(2u^2 + 5d^2)^3 + (u^2 + 3d^2)^3 + 25u^2d^2 + 9u^2d^2,$$
$$(u^2 - d^2)^3 + (2u^2 + 3d^2)^3 + (5ud + 2d^2)^3 + (5ud - 2d^2)^3 + 16d^4,$$
$$(u^2 + 3ud)^3 + (u^2 - 3ud)^3 + (u^2 + 4ud)^3 + (u^2 - 4ud)^3 + (u^2 + 5ud)^3 + 9d^4,$$
$$(2u^2 + 5ud)^3 + (2u^2 - 5ud)^3 + (u^2 + 5d^2)^3 + (u^2 - ud)^3 + (u^2 + ud)^3 + (u^2 - d^2)^3 + u^4.$$

Pour la somme des sixièmes puissances on trouve

$$(2u^3 + 20ud^2 + 5d^3)^2 + (u^3 + 10ud^2 - 10d^3)^2 + (5u^2d + 2d^3)^2 + (5u^2d - d^3)^2.$$

6. $u = u_3$, $u[(u^2 + d^2)^3 + (u^2 + 3ud)^3 + (u^2 - 3ud)^3 + 9d^4)]$.

Si u est une somme de deux, trois ou quatre carrés, on applique à l'expression précédente la formule d'Euler,

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) = (aa' + bb' + cc' + dd')^2$$
$$+ (ab' - a'b + cd' - c'd)^2 + (ac' - a'c + db' - d'b)^2 + (ad' - a'd + bc' - b'c)^2,$$

dans laquelle on pose, au besoin, $c' = d' = 0$ ou simplement $d' = 0$.

7. $u = u_5$, $u[(2u + d)^3 + (u - 2d)^3 + 25d^3]$ (*)

69. Mettre (notations de l'exercice précédent) les quantités

$$u_1u_2 + u_3u_4, \quad u_1u_2 + u_3u_4 + u_5u_6 + u_7u_8,$$

respectivement, sous la forme d'une somme de trois ou de quatre carrés.

$u = u_1$, $(u + 2d)^2 + (u + d)^2 + d^2$, $u_3^2 + 2u_4^2 + u_5^2$. (DE ROCQUIGNY.)

70. Soient $C_{m,n}$ le nombre des combinaisons simples, $D_{m,n}$ celui des combinaisons complètes de m lettres n à n. Démontrer les théorèmes suivants :

1° Si $m - 1$ et $n + 1$ sont premiers entre eux, $D_{m,n} = \mathcal{M}.\ (n+1)$,

2° Si m et n » » $D_{m,n} = \mathcal{M}.\ m$.

3° Si $m - 1$ et n » » $D_{m,n} = \mathcal{M}.\ (m + n - 1)$.

4° Si $m + 1$ et $n + 1$ » » $C_{m,n} = \mathcal{M}.\ (n+1)$.

5° Si m et n » » $C_{m,n} = \mathcal{M}.\ m$.

6° Si $m + 1$ et n » » $C_{m,n} = \mathcal{M}.\ (m + n - 1)$.

(*) Pour avoir quatre carrés, on remplace $25d^3$ par $16d^3 + 9d^3$.

b) Les asymptotes d'un cercle se transforment en des droites parallèles à OZ, OU.

c) Une circonférence a pour ligne correspondante une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles à OZ, OU.

d) Une hyperbole équilatère quelconque a pour transformée une conique dont les axes sont parallèles à OZ, OU.

e) Deux aires équivalentes se transforment en deux aires équivalentes.

3. Pour donner des applications de notre transformation, prenons d'abord le théorème suivant : Les bissectrices intérieures et extérieures d'un triangle se coupent, trois à trois, en quatre points, centres des cercles tangents aux trois côtés. Nous en déduisons la proposition suivante :

Par chaque sommet d'un triangle ABC, *on mène deux droites antiparallèles par rapport à une droite donnée d et divisant harmoniquement l'angle correspondant du triangle; les six droites ainsi obtenues concourent, trois à trois, en quatre points* I, I_a, I_b, I_c, *centres des quatre hyperboles équilatères inscrites à* ABC *et ayant une asymptote parallèle à d*(*).

Les bissectrices des angles des côtés opposés du quadrangle complet étant parallèles ou perpendiculaires à *d*, ce quadrangle est inscriptible à un cercle, par rapport auquel le triangle ABC est autopolaire. Donc *le lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites dans un triangle fixe* ABC *est le cercle conjugué par rapport à* ABC.

4. Transformant par notre méthode cette dernière proposition, nous aurons le théorème suivant :

Le lieu des centres des coniques inscrites dans un triangle donné ABC *et dont les axes ont des directions données d, d', est une hyperbole équilatère conjuguée par rapport à* ABC. *Le centre de cette hyperbole est sur la circonférence* ABC, *à l'intersection des trois droites menées par* A, B, C *antiparallèlement aux côtés opposés* BC, CA, AB *par rapport à d.*

Corollaire. La circonférence circonscrite à un triangle conjugué par rapport à une hyperbole équilatère passe par le centre de cette courbe.

5. Etant donnés quatre points A, B, C, D dans un même plan, si A_1, B_1, C_1 sont les orthocentres des triangles DBC, DCA, DAB, les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont équivalents (*Mathesis*, t. II, p. 132). Notre transformation permet de déduire, de ce théorème, la proposition suivante :

(*) Comparez Cesàro, N. A. M., 1888, p. 99 et suiv.

Étant donnés, dans un même plan, les points A, B, C, D, *on mène ur chaque sommet du triangle* BCD *une antiparallèle au côté opposé par apport à une droite fixe d; ces trois droites concourent en un même oint* A_1. Soient B_1, C_1, D_1 les points déterminés d'une manière analogue ans les triangles ACD, ABD, ABC. Les triangles ABC et $A_1B_1C_1$, ABD t $A_1B_1D_1$,... seront équivalents.

6. On sait que le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à deux oniques homofocales est une circonférence passant par les points d'inter-ection de ces courbes. Ce théorème donne lieu au suivant :

Soient deux coniques inscrites à un même rectangle. Tout angle circons-rit à ces courbes, dont les bissectrices sont parallèles aux côtés du rectangle, son sommet sur une hyperbole équilatère fixe, qui passe par les points 'intersection des courbes données et dont les asymptotes sont parallèles ux côtés du rectangle.

7. Pour terminer, transformons le théorème sur la droite de Simson : es projections d'un point d'une circonférence sur les côtés d'un triangle nscrit sont en ligne droite. Nous aurons ce nouveau théorème :

Par l'orthocentre d'un triangle ABC, *on mène les trois droites antipa-allèles aux côtés par rapport à une même droite d; elles rencontrent les côtés correspondants en trois points qui sont en ligne droite.*

BIBLIOGRAPHIE.

Algèbre, par M. G. DE LONGCHAMPS, professeur de Mathématiques spéciales au ycée Charlemagne. Deuxième édition, revue et considérablement augmentée. Paris, Delagrave, 1889. Un vol. in 8° de XVI-755 pages. Prix : 10 francs.

Nous avons indiqué sommairement le contenu de la première édition du livre de M. de Longchamps dans *Mathesis*, 1883, p. 205-206 et nous en avons donné une analyse critique détaillée dans la *Revue des questions scientifiques*, en octobre 1884. Il nous suffira d'indiquer rapidement ici en quoi la nouvelle édition diffère de la première.

I. *Algèbre élémentaire* (Leçons 1-12, 14-17, 26) : Identités, division algébrique, racines; combinaisons, binôme; déterminants, équations linéaires, formes quadratiques; incommensurables, radicaux, imaginaires; inégalités; fractions continues et analyse indéterminée.

La nouvelle édition ne contient pas la théorie des équations du second degré qui ne fait plus partie du programme d'admission à l'École polytechnique. Les leçons 1 et 5 (identités, division, extraction des racines) ont été simplifiées et rendues irré-

prochables au point de vue de la rigueur, par le retour à la définition naturelle des identités.

II. *Théorie des fonctions ou calcul différentiel et calcul intégral* (Leçons 18, 18-25, 41-43). Cette partie de l'ouvrage contient quatre leçons nouvelles : 1° Une théorie très bien faite de la convergence des séries : 2° Des notions sur les infiniment petits et sur les différentielles (celles-ci ça et là un peu moins nettes que nous ne l'aurions espéré). 3° Un exposé des principes du calcul intégral avec application aux fonctions algébriques. 4° Le développement en série de $(1+x)^m$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $\arctang x$ par le théorème de Maclaurin, et, de plus, pour $\arctang x$, par le calcul intégral.

Dans la partie de la nouvelle édition qui est commune avec l'ancienne, il y a une foule d'améliorations de détails, entre autres dans la recherche de la limite de $(1+m^{-1})^m$, pour m infini et dans celle des vraies valeurs des expressions $(\infty : \infty)$. Nous avons des réserves à faire touchant la démonstration du théorème de Rolle, la démonstration générale de la règle de la dérivation des fonctions composées et celle du théorème $D^2_{xy} u = D^2_{yx} u$. Ces deux derniers théorèmes sont d'ailleurs inutiles dans les Éléments.

III. *Théorie des équations; différences et interpolation* (Leçons 27-40; 44). Cette partie de l'ouvrage est à peu près identique à la partie correspondante de l'édition précédente, à part les modifications suivantes : 1° Le théorème fondamental : *toute équation algébrique a une racine* est énoncé sans démonstration (On n'exige plus la démonstration à l'examen d'entrée à l'École Polytechnique). 2° A la fin de la leçon 28e, l'auteur a introduit l'important théorème : *les racines d'une équation sont des fonctions continues des coefficients*. 3° Enfin la leçon 44e est nouvelle. On y trouve les premiers principes du calcul des différences, la formule d'interpolation de Lagrange et *un cas particulier* de celle de Newton.

Chaque chapitre de l'ouvrage est suivi d'exercices choisis; de plus, à la fin du livre, il y a quatre-vingts *Exercices divers*, dont plusieurs sont très difficiles(*). Tous ces exercices réunis, avec solution esquissée ou développée, forment un recueil de cent quarante pages en petit texte, qui double, pour les Professeurs, la valeur de l'excellent *Cours d'Algèbre* de M. de Longchamps(**). (P. M.)

Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications par J. MASSAU, ingénieur des Ponts et Chaussées, professeur à l'Université de Gand. — Un volume in 8° de 740 pages, avec atlas grand in 4° de 24 planches, Paris, Gauthier-Villars, 1887. Prix : 20 francs.

(*) Après ces *Exercices divers*, l'auteur a reproduit les énoncés des questions proposées à divers concours, en France, de 1885 à 1888 inclusivement (École Polytechnique, École Normale, Concours général, Agrégation des Sciences Mathématiques, École Centrale).

(**) Nous publierons, dans la *Revue des questions scientifiques*, un compte rendu critique plus détaillé de cet ouvrage.

Les principales méthodes graphiques employées jusqu'à ce jour sont de deux espèces : les unes sont d'ordre purement géométrique et forment une science connue depuis longtemps sous le nom de *Calcul graphique* ou *Calcul par le trait;* les autres se déduisent à la fois de la Géométrie et de la Statique, et forment une science toute moderne que l'on a appelée *Statique graphique*. Le principal avantage de cette dernière, c'est qu'elle est presque uniquement fondée sur un même tracé, qui est celui du polygone funiculaire au moyen du polygone de Varignon. Il arrive ainsi que l'on se familarise très vite avec les constructions, et non seulement on arrive plus vite au but que par toute autre méthode, mais un simple examen de l'épure permet de saisir immédiatement l'ensemble des opérations et d'en vérifier la complète exactitude. Le Calcul graphique ne paraît pas présenter les mêmes avantages; les problèmes les plus importants ne sont résolus que par des méthodes incomplètes ou peu pratiques qui presque toujours fatiguent plus l'esprit que les calculs qu'elles veulent éviter. La raison en est dans la diversité des opérations. Mais si l'on choisit une construction type et si l'on fait de cette construction un emploi systématique, on arrive à de nouvelles méthodes aussi avantageuses que celles de la Statique graphique. C'est l'exposé de ces méthodes et de leurs applications qu'on trouve dans l'ouvrage de M. Massau, où un grand nombre de questions générales et spéciales sont traitées d'une manière originale. Ce qui distingue cet ouvrage des travaux similaires, c'est que l'auteur se propose plutôt de déterminer les intégrales par des éléments suffisants, que de tracer effectivement les courbes. Les intégrations successives des fonctions entières s'effectuent (livre II) en déterminant une parabole de degré n par un contour polygonal semi-circonscrit. Les côtés extrêmes de ce contour touchent l'arc polygonal, mais on peut trouver (livre V) autant de points et de tangentes que l'on veut par une construction simple. Les différences de divers ordres des ordonnées de ces polygones sont proportionnelles aux dérivées en un point de l'arc parabolique; on peut ainsi exprimer facilement le contact d'ordre quelconque entre deux arcs paraboliques différents.

Une grande partie du livre est fondée sur l'intégration exacte des paraboles. Dans d'autres parties, les fonctions ne pouvant être intégrées, l'auteur emploie l'intégration graphique approchée.

Sommaire. — Livre I. *Méthodes générales.* Généralités : Intégration par polygone inscrit et par polygone circonscrit. Détermination de l'ordonnée moyenne : Lignes droites et paraboles déterminées par points ou par points et tangentes. Abscisse moyenne. Intégration exacte. Méthodes approchées. Généralisations : Lignes de repère courbes, transformation du diagramme des inclinaisons. Constantes d'intégration : Lignes de repère paraboliques. — Livre II. *Applications à l'Algèbre, à la Géométrie, à la Mécanique.* Des quatre opérations. Courbes algébriques : Détermination des paraboles par intégrations ou multiplications. Hyperboles. Fonctions rationnelles. Courbes unicursales. Racines des équations. Problèmes divers : Parabole et hyperbole de degré m, donnée par $m - k + 1$ points et k tangentes. Applications à la Mécanique : Moments de divers ordres. Centres de gravité. Moments fléchissants et efforts tranchants. Lignes des résultantes; systèmes articulés; méthode du polygone des pôles. — Livre III. *Calcul d'un projet de route.* Représentation des cubes de

déblai et de remblai. Calcul des surfaces de déblai et de remblai. Tables graphiques pour le calcul des surfaces et des longeurs : Extension de la méthode de M. Lalanne. Système de droites de divers degrés. Calcul des cubes et évaluation de la dépense. Le prix de la route donné par un couple. Son calcul par une intégrale seconde. Temps perdus. Choix des appareils de transport. — LIVRE IV. *Applications à la stabilité des constructions*. Généralités : Axes neutres et centres de pression. Murs de soutènement et de réservoir : Tables graphiques des épaisseurs. Problèmes sur l'équilibre des voûtes. Ligne enveloppe des pressions et courbes des centres de pressions; force fictive qui détermine la tangente à la courbe des centres de pression. Courbes conjuguées. Recherche des poussées stables dans le cas d'une résistance illimitée : Solution directe par la force fictive. Aire des solutions stables : tangentes, rebroussements et forme de contour. Solutions stables dans le cas d'une résistance limitée. Théorie des voûtes : Nouvelle théorie. Abaque des courbes de pression pour tous les degrés de compressibilité du mortier. — LIVRE V *Poutres droites et courbes*. Déformations des poutres droites. Poutres sur deux appuis. Poutres encastrées. Poutres continues prismatiques. Poutres droites à section variable. Des appuis des poutres droites au point de vue de l'économie. Poutres d'égale résistance, poutres brisées. Compléments de la théorie des poutres droites. Poutres en arc. Théorie cinématique des pièces courbes; méthode du centre de rotation finie; méthode des trois pivots. — LIVRE VI. *Applications à l'Hydraulique*. Mouvement uniforme des liquides. Mouvement permanent varié. Intégration graphique des équations différentielles du premier ordre : Courbes isoclines, courbe des inflexions, courbe des rebroussements, surface des inclinaisons, point singulier du plan, solution singulière. Foyer des courbes isoclines. Axe hydraulique des cours d'eau non prismatiques.

Appendice au Mémoire sur l'intégration graphique, par J. MASSAU, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Université de Gand. Gand, Hoste, 1889. Un volume de 264 p. in-8° et 2 planches.

« Dans notre Mémoire sur l'intégration graphique, dit l'auteur, nous n'avons abordé que les questions les plus utiles ou les plus simples. Nous avons réservé les questions difficiles, pour en faire l'objet de publications spéciales. Nous réunissons, dans le travail qui suit, une série de notes destinées à servir de complément à notre mémoire. » Voici le sommaire des sujets traités dans cet appendice sur lequel nous espérons revenir un jour.

I. Sur la construction des fonctions entières données par un nombre suffisant de valeurs et de dérivées. II. Théorème sur l'influence d'une charge mobile. Charge quelconque, charge parabolique, train de charges uniformes, train de forces isolées sur une poutre sur deux appuis; poutres prismatiques; poutres à sections variables; poutres en arc. III. Sur les moments des divers ordres. IV. Accords de surfaces et de systèmes concentrés. V. Calcul d'une intégrale d'ordre n par une quadrature. VI. Interpolation parabolique. VII. Compléments d'intégration graphique. VIII. Intégrations approchées. IX. Interpolation par la méthode des moindres carrés. X. Les

accords et les poutres droites. XI. Aperçu historique. Dans cette section de son livre, l'auteur fait ressortir la supériorité des méthodes *naturelles* d'intégration graphique sur les méthodes souvent *artificielles* de la statique graphique. Les chapitres IV à IX contiennent, sur l'intégration approchée, des recherches importantes, même après les travaux de Tchebycheff, Markof, etc.(*).

Cours de géométrie analytique, par J. CARNOY, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Louvain, etc. Géométrie de l'espace. Quatrième édition, revue et augmentée. Louvain, Peeters; Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1889. Un volume in-8° de XII-535 pages. Prix : 11 fr.

Sommaire. 1. Coordonnées cartésiennes. 2. Ligne droite. 3. Plan. 4. Coordonnées tétraédriques : plan et droite. 5. Coordonnées tangentielles: plan et point. 6. Sphère. 7. Système de sphères. 8. Quadriques en coordonnées cartésiennes. 9. Ellipsoïde et les deux hyperboloïdes. 10. Les deux paraboloïdes. 11. Lignes focales et surfaces homofocales. 12. Quadriques en coordonnées tétraédriques et tangentielles. 13. Théorèmes et exercices sur les quadriques en coordonnées cartésiennes, tétraédriques et tangentielles. 14. Notations abrégées en coordonnées cartésiennes : conditions déterminant une quadrique; intersection de deux quadriques; relations entre dix points d'une quadrique, etc. 15. Notations abrégées en coordonnées tangentielles: questions analogues aux précédentes. 16. Transformation des figures (polaires réciproques, homographie, homologie). 17. Génération des surfaces : surfaces de révolution, surfaces développables, surfaces gauches. 18. Surfaces algébriques; théorèmes généraux; singularités; surfaces spéciales (surface des ondes, surfaces du troisième degré).

Cet ouvrage sur la géométrie de l'espace, comme la géométrie plane du même auteur, a obtenu un légitime succès. Les traités français et belges sur la géométrie analytique ne manquent pas; mais ils se bornent presque tous à l'usage exclusif des coordonnées cartésiennes. Le livre de M. Carnoy expose avec détails les principes fondamentaux des différents systèmes de coordonnées ponctuelles et tangentielles, cartésiennes et tétraédriques, qu'il est nécessaire d'employer pour étendre les ressources de l'analyse, améliorer les méthodes, traiter avec élégance et rapidité les problèmes géométriques. Dans le développement méthodique de ces différents systèmes, l'auteur veut que l'on apporte la même attention et que l'on attribue la même importance aux coordonnées tangentielles qu'aux coordonnées ponctuelles. Le lecteur s'habitue ainsi, sans effort, et d'une manière insensible, au principe de dualité qui domine toute la géométrie. Nous avons donné plus haut le sommaire des principaux sujets traités dans ce cours. Mais nous croyons devoir signaler spécialement deux améliorations importantes que renferme cette quatrième édition. Il y a

---

(*) Signalons à propos de l'*Appendice* de M. Massau, trois brochures du même auteur. 1. *Note sur les intégraphes.* 2. *Note sur le calcul des cotisations des sociétés de secours mutuels.* 3. *Note sur la résolution graphique des équations du premier degré.* On peut aussi les considérer comme formant, en tout ou en partie, un complément du mémoire principal de M. Massau.

d'abord une étude plus complète de la courbe d'intersection de deux quadriques ainsi que de la développable circonscrite à deux surfaces du second ordre. Sans entrer dans tous les détails que comporte cette question si longue à traiter et parfois si délicate, l'auteur examine les cas les plus intéressants; l'usage des coordonnées tangentielles lui donne l'occasion de constater que la détermination des cônes passant par l'intersection de deux surfaces du second ordre et des coniques planes de la développable circonscrite dépend de la même équation du quatrième degré. L'ouvrage se termine par les formules de Cayley sur les nombres caractéristiques d'une courbe gauche ou d'une surface développable. Après avoir défini ce que l'on entend par les singularités ordinaires d'une courbe de l'espace, l'auteur arrive, en se rapprochant de la méthode suivie par M. Salmon, aux relations qui permettent de les déterminer au moyen de trois d'entre elles. Ces nouvelles questions ainsi que d'autres changements introduits dans le texte rendent le cours du Professeur de Louvain de plus en plus recommandable aux jeunes gens qui étudient les mathématiques à l'université ou aux diverses écoles spéciales.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 552.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 24.)

On décrit deux cercles tangents entre eux et touchant respectivement les côtés des angles B, C ***du triangle*** ABC. ***Trouver*** 1° ***le lieu du point de contact***; 2° ***l'enveloppe de la ligne des centres.***

Solution par M. DÉPREZ. Soient B', C' les centres des deux cercles; I le point de concours des bissectrices BB', CC' des angles B, C; B'', C'' les points de contact de BC avec les deux circonférences. Posons $IB' = \lambda$, $IC' = \mu$; la condition $B'C' = B'B'' + C'C''$ s'exprime par

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \sin\frac{A}{2} = \left\{(IB - \lambda)\sin\frac{B}{2} + (IC - \mu)\sin\frac{C}{2}\right\}^2. \qquad (1)$$

Comme les coordonnées de la droite B'C' par rapport aux axes IB, IC sont λ^{-1}, μ^{-1}, on voit que l'enveloppe de B'C' est de la 4e classe.

L'équation (1) peut encore prendre la forme

$$\lambda\cos\frac{B}{2} + \mu\cos\frac{C}{2} = 2\sqrt{\left(r - \lambda\sin\frac{B}{2}\right)\left(r - \lambda\sin\frac{C}{2}\right)}; \qquad (2)$$

r désigne le rayon du cercle inscrit à ABC.

Les coordonnées du point de contact M des cercles B', C' par rapport aux axes IB, IC sont

$$x = \frac{\lambda.CC''}{BB'' + CC''} = \frac{\lambda\left(r - \mu \sin\frac{C}{2}\right)}{2r - \lambda \sin\frac{B}{2} - \mu \sin\frac{C}{2}}, \quad y = \frac{\mu\left(r - \lambda \sin\frac{B}{2}\right)}{2r - \lambda \sin\frac{B}{2} - \mu \sin\frac{C}{2}}. \tag{3}$$

L'équation du lieu de M s'obtient en éliminant λ et μ entre (2) et (3). Pour simplifier les écritures, introduisons les rayons

$$r' = r - \lambda \sin\frac{B}{2}, \quad r'' = r - \lambda \sin\frac{C}{2}$$

des cercles B', C'. On aura, au lieu des égalités (2) et (3),

$$r' \cot\frac{B}{2} + r'' \cot\frac{C}{2} + 2\sqrt{r'r''} = a, \tag{4}$$

$$x = \frac{(r - r')\, r''}{(r' + r'') \sin\frac{B}{2}}, \quad y = \frac{(r - r'')\, r'}{(r' + r'') \sin\frac{C}{2}}, \tag{5}$$

Les équations (5) peuvent prendre la forme

$$\frac{r - x \sin\frac{B}{2}}{r'} - \frac{x \sin\frac{B}{2}}{r''} = 1, \quad \frac{r - y \sin\frac{C}{2}}{r''} - \frac{y \sin\frac{C}{2}}{r'} = 1;$$

d'où

$$r' = r\frac{r - X}{r + Y}, \quad r'' = r\frac{r - X}{r - Y}, \tag{6}$$

après avoir posé

$$X = x \sin\frac{B}{2} + y \sin\frac{C}{2}, \quad Y = x \sin\frac{B}{2} - y \sin\frac{C}{2}.$$

Il reste à substituer les valeurs (6) dans la relation (4).

×Question 561.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 56.)

Soit $A_1B_1C_1$ *le triangle formé par les tangentes menées par les sommets du triangle* ABC *au cercle circonscrit, et soit* $I_aI_bI_c$ *le triangle formé par les parallèles à ces tangentes menées respectivement par* A_1, B_1, C_1.

1° *Les droites* α_1I_a, β_1I_b, γ_1I_c, *qui passent par les pieds* α_1, β_1, γ_1 *des bissectrices intérieures du triangle* ABC, *se coupent en un point* H_0 *dont les coordonnées normales sont*

$$ar_a(2R - r_a), \quad br_b(2R - r_b), \quad cr_c(2R - r_c), \tag{1}$$

R, r_a, r_b, r_c *étant les rayons du cercle circonscrit et des cercles exinscrits à* ABC.

2° *La parallèle à* B_1C_1 *menée par* H_0 *coupe* AC *en* A_b, AB *en* A_c;

» C_1A_1 » BC *en* B_a, BA *en* B_c;

» A_1B_1 » CA *en* C_b, CB *en* C_a.

Démontrer que l'hexagone $A_bC_bB_cA_cC_aB_a$ *est circonscrit au cercle inscrit à* ABC.

3° *Si* α_1', β_1', γ_1' *sont les pieds des bissectrices extérieures, les droites* $\alpha_1'I_a$, $\beta_1'I_b$, $\gamma_1'I_c$ *se coupent en un point* H_a, *qui a pour coordonnées*

$$-ar_a(2R + r), \quad br_c(2R - r_c), \quad cr_b(2R - r_b),$$

et qui, par la construction faite pour H_0, *donne un hexagone circonscrit au cercle exinscrit* O_a'. (E. Lemoine.)

Solution par M^lle^ Bouwmeester (*Rotterdam*), MM. Déprez *et* Verniory. 1° ABC étant le triangle de référence, les équations des côtés du triangle $A_1B_1C_1$ sont

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

et les coordonnées (normales) des points A_1, B_1, C_1 :

$$(-a, b, c), \quad (a, -b, c), \quad (a, b, -c).$$

Toute parallèle à B_1C_1 est représentée par

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \lambda(ax + by + cz) = 0. \tag{2}$$

La condition de passer par A_1 donne $\lambda . bc \cos A + 1 = 0$, d'où l'on conclut l'équation de I_bI_c, puis les équations de I_cI_a, I_aI_b :

$$x + y \cos C + z \cos B = 0, \quad x \cos C + y + z \cos A = 0, \ldots .$$

Pour les coordonnées de I_a, on trouve $\sin^2 A$, $\cos A \cos B - \cos C$, $\cos A \cos C - \cos B$; celles de α_1 étant 0, 1, 1; on aura, pour l'équation de $\alpha_1 I_a$,

$$x(\cos B - \cos C) - (y - z)(1 - \cos A) = 0.$$

La somme de cette équation et des deux qui en résultent par une permutation tournante donne identiquement $0 = 0$: donc les droites $\alpha_1 I_a$, $\beta_1 I_b$, $\gamma_1 I_c$ concourent en un même point H_0. Les coordonnées de H_0 sont

$$\begin{aligned} &(1 - \cos A)(1 + \cos A - \cos B - \cos C), \\ &(1 - \cos B)(1 + \cos B - \cos A - \cos C). \\ &(1 - \cos C)(1 + \cos C - \cos A - \cos B). \end{aligned} \tag{3}$$

Or

$$1 + \cos A - \cos B - \cos C = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B - C}{2}$$

$$= 2 - 2 \sin \frac{A}{2} \left(\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{B - C}{2} \right) = 2 - 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$= 2 - \frac{r_a}{R} = \frac{2R - r_a}{R},$$

$$1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sin A = \frac{r_a}{p} \cdot \frac{a}{2R}.$$

D'où l'on conclut que les coordonnées de H_0 sont proportionnelles aux expressions (1).

2° L'équation de la droite A_bA_c a la forme (2); exprimant qu'elle est vérifiée par les quantités (3), on trouve

$$x(p - a) + y(p \cos C - b) + z(p \cos B - c) = 0,$$

d'où les coordonnées de A_b :

$$c - p \cos B, \quad 0, \quad p - a,$$

et, par analogie, celles de B_c et C_b :

$$p - b, \quad a - p \cos C, \quad 0; \quad 0, \quad p - c, \quad a - p \cos B.$$

La droite B_cC_b a donc pour équation

$$\begin{aligned} &- x(a - p \cos C)(a - p \cos B) \\ &+ y(p - b)(a - p \cos B) + z(p - c)(a - p \cos C) = 0. \end{aligned}$$

Or, l'équation tangentielle du cercle inscrit au triangle ABC est $S\frac{a(p-a)}{\lambda}=0$, et l'on constate qu'elle est vérifiée par les coordonnées

$$\lambda=-(a-p\cos C)(a-p\cos B),\quad \mu=(p-b)(a-p\cos B),$$
$$\nu=(p-C)(a-p\cos C),$$

de la droite B_aC_b.

3° La démonstration de cette partie de la question se fait par des calculs peu différents des précédents.

Remarque I. Soient A_h, B_h, C_h les pieds des hauteurs du triangle ABC. Les droites I_aA_h, I_bB_h, I_cC_h passent par le point de Lemoine K de ABC.

En effet, le déterminant des coordonnées des points I_a, A_h, K est

$$\begin{vmatrix} \sin^2 A & \cos A\cos B-\cos C & \cos A\cos C-\cos B, \\ 0 & \cos C & \cos B \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix};$$

or, si l'on retranche de la première ligne la troisième multipliée par sin A, les deux premières lignes ne différeront que par le facteur 2.

(Emmerich.)

Remarque II. Prenons $I_a\,I_b\,I_c$ pour triangle de référence. Si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées de α_1, z_1 est la différence des distances de C_1 et α_1 à A_1B_1, distances égales à $B_1C_1\sin B_1$, $\alpha_1 C\sin A$; donc

$$z_1=\frac{a\sin B}{\cos C}-\frac{ab\sin A}{b+c},\quad y_1=\frac{a\sin C}{\cos C}-\frac{ac\sin A}{b+c}.$$

D'où, par un calcul facile,

$$\frac{y_1}{z_1}=\frac{\cos C}{\cos B}.$$

On conclut de là que les droites α_1I_a, β_1I_b, γ_1I_c concourent en un point H_0 dont les coordonnées normales par rapport au triangle $I_a\,I_b\,I_c$ sont proportionnelles à séc A, séc B, séc C, ou à cosec $\frac{1}{2}I_a$, cosec $\frac{1}{2}I_b$, cosec $\frac{1}{2}I_c$.

Les coordonnées absolues de H_0 sont égales à

$$\frac{2r}{\cos A},\quad \frac{2r}{\cos B},\quad \frac{2r}{\cos C}.$$

Les coordonnées du même point par rapport au triangle $A_1B_1C_1$ ont pour valeurs

$$\frac{2Sr}{ar_a\cos A},\quad \frac{2Sr}{br_b\cos B},\quad \frac{2Sr}{cr_c\cos C}.$$

Les points H_0, H_a, H_b, H_c sont algébriquement associés dans le triangle $I_a I_b I_c$. (DÉPREZ.)

REMARQUE III. La construction indiquée au n° 2 étant effectuée pour un point quelconque H_0 dont les coordonnées normales par rapport au triangle ABC sont désignées par α, β, γ, l'hexagone $A_b C_b B_c A_c C_a B_a$ est toujours circonscriptible à une conique (théorème de Brianchon); l'équation de cette courbe est

$$\sqrt{x(c\beta + b\gamma)\sin 2A} + \sqrt{y(c\alpha + a\gamma)\sin 2B} + \sqrt{z(b\alpha + a\beta)\sin 2C} = 0,$$

et les coordonnées x_1, y_1, z_1 du centre sont données par

$$\frac{x_1}{\alpha + \beta\cos C + \gamma\cos B} = \frac{y_1}{\alpha\cos C + \beta + \gamma\cos A} = \frac{z_1}{\alpha\cos B + \beta\cos A + \gamma}.$$

Inversement,

$$\rho\alpha = x_1\sin^2 A + y_1(\cos A\cos B - \cos C) + z_1(\cos A\cos C - \cos B),$$
$$\rho\beta = y_1\sin^2 B + z_1(\cos B\cos C - \cos A) + x_1(\cos B\cos A - \cos C),$$
$$\rho\gamma = z_1\sin^2 C + x_1(\cos C\cos A - \cos B) + y_1(\cos C\cos B - \cos A),$$

ρ désignant un facteur de proportionnalité.

Si l'on fait $x_1 = y_1 = z_1$, ou $-x_1 = y_1 = z_1, \ldots$, on retrouve le théorème de la question 561.

Prenons pour centre de la conique le centre de gravité ou le point de Lemoine; dans le premier cas, les coordonnées de H_0 sont

$$\sin^2 A(\cos A - \cos B\cos C),\quad \sin^2 B(\cos B - \cos C\cos A),$$
$$\sin^2 C(\cos C - \cos A\cos B),$$

et dans le second cas, H_0 coïncide aussi avec le point de Lemoine.

(DÉPREZ.)

M. DÉPREZ examine encore d'autres cas particuliers remarquables. Nous regrettons que le défaut d'espace ne nous permette pas de reproduire sa note in extenso. (*Rédaction.*)

×Question 565.

(Voir *Mathésis*, t. VII, p. 104.)

On donne un triangle ABC. 1° *Trouver la condition géométrique pour que la hauteur* AA', *la bissectrice* BB' *et la médiane* CC' *se coupent en un même point* M. 2° *Démontrer que, si le triangle* ABC *varie, le côté* BC *restant fixe, le point* A *décrit une conchoïde de droite et le point* M *une*

cissoïde. 3° *Trouver le lieu géométrique de l'orthocentre* H *et du centre* I *du cercle inscrit dans le triangle* ABC. (BOUBALS.)

Solution par MM. DROZ, SERVAIS *et* DÉPREZ. 1° La condition demandée est

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1, \quad \text{ou} \quad \frac{BA'}{A'C}=\frac{BA}{BC}=\frac{c}{a}. \tag{1}$$

On peut lui donner d'autres formes. Remplaçant BA' par $c\cos B$, on trouve $A'C = a\cos B$; par conséquent, pour les hauteurs AA', CC'', on a $C''B = A'C$. Remplaçant également A'C par $b\cos C$, on obtient une relation entre les trois angles du triangle :

$$\operatorname{tg} B=\frac{\sin A}{\cos C}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} C=\operatorname{tg}^2 B\operatorname{tg}\frac{B}{2}.$$

Les trois côtés satisfont à l'égalité

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{a^2}{b^2-c^2}.$$

Remarquons également la relation

$$\cos B=\frac{a}{a+c}.$$

2° Élevons en C une perpendiculaire CY à BC et soit D le point où elle rencontre AB. L'égalité (1) conduit immédiatement à la relation BC = AD. Donc, lorsque BC est fixe, le point A décrit une conchoïde de la droite CY.

Abaissons de C une perpendiculaire sur BB', rencontrant BB' en E, BA en F; nous aurons BC = BF = AD, d'où BA = FD. Donc, si l'on mène FK parallèle à BM et rencontrant CY en K, les triangles ABM, DFK seront égaux, et FK = BM. Soit L le point de rencontre de BE avec CY; on trouve aisément BM = FK = 2FL. Or le point E décrit la circonférence de diamètre BC, tangente à CD; donc M parcourt une cissoïde ayant pour point et tangente de rebroussement B et BC, et pour centre du cercle générateur C.

Autrement :

$$BM=\frac{BA'}{\cos\frac{1}{2}B}=\frac{BC-A'C}{\cos\frac{1}{2}B}=\frac{a(1-\cos B)}{\cos\frac{1}{2}B}=\frac{2a\sin^2\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}B}.$$

3° On a

$$CH = \frac{CA'}{\sin B} = a \cot B,$$

ou, en désignant par ρ, θ les coordonnées polaires CH, BCH de H,

$$\rho = a \operatorname{tg} \theta.$$

En coordonnées rectangulaires, on a

$$x^2 (x^2 + y^2) = a^2 y^2, \quad y^2 = \frac{x^4}{a^2 - x^2}.$$

Soit P le point de rencontre de CH avec la perpendiculaire BZ élevée en B sur BC; on trouve aisément CH = BP, ce qui donne une construction facile du lieu (H).

Le lieu de I est caractérisé, en coordonnées biangulaires, par l'équation

$$\operatorname{tg} C = \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg} \frac{B}{2}. \qquad (2)$$

Pour passer aux coordonnées cartésiennes (axes, BC et BZ), on se sert des formules

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{2xy}{x^2 - y^2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{y}{a - x}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{2y(a - x)}{(a - x)^2 - y^2},$$

ce qui donne une équation du 6e degré.

Pour introduire les coordonnées polaires $\rho = BI$, $\theta = IBC$, observons que

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\rho \sin \theta}{a - \rho \cos \theta};$$

en substituant dans (2), on obtient

$$2\rho^2 \cos 2\theta \cos^2 \theta - 2a\rho \cos \theta + a^2 \sin^2 2\theta = 0.$$

M. Dépres cherche également les lieux d'autres points remarquables du triangle. Les équations de ces courbes sont assez compliquées.

Lorsque AB est fixe et C variable, le point C décrit une conchoïde de parabole. En effet, prolongeons BC de CQ = BA, de manière que BQ = BD, et menons QF perpendiculaire à BD; alors BF = BC. Donc, si nous prolongeons AB de BS = AB et que nous tracions SU perpendiculaire à AB, nous aurons SF = BQ. Le point Q parcourt donc une parabole qui a pour foyer B et pour directrice SU. (J. N.)

Question 572.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 126.)

Étant donné un triangle équilatéral ABC, *on considère toutes les paraboles qui passent par* A, B *et dont la directrice passe par* C. *Démontrer* 1° *que le foyer* F *décrit une inverse de conique ; 2° que l'extrémité du diamètre mené par le milieu de* AB *décrit une circonférence.* (Jerabek.)

Solution analytique par M. Verniory. 1° Supposons le triangle ABC *quelconque*. Les axes étant AB et la hauteur OC, l'équation de la parabole variable est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(mx+ny+t)^2, \tag{1}$$

sous les conditions

$$m^2+n^2=1,\quad nc+t=0,\quad \frac{2(\alpha+mt)}{n^2}=a+b,\quad \frac{\alpha^2+\beta^2-t^2}{n^2}=ab, \tag{2}$$

où, les coordonnées des points A, B, C sont $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(0, c)$. L'élimination des paramètres m, n, t donne

$$[(a+b)^2+4c^2](\alpha^2+\beta^2)^2-4(ab+c^2)[c^2+(a+b)\alpha][\alpha^2+\beta^2]+4(ab+c^2)^2\alpha^2=0. \tag{3}$$

Le lieu du foyer est donc une quartique bicirculaire, qui a un point isolé à l'origine des coordonnées.

Cas particuliers. 1° Si le triangle ABC est isoscèle, on a $a=-b$, et l'équation (3), transformée en coordonnées polaires, devient

$$\rho^2=\frac{ab+c^2}{c^2}(a^2\cos^2\omega+c^2\sin^2\omega).$$

Elle représente l'inverse d'une conique par rapport à son centre

b) Dans le cas d'un triangle équilatéral,

$$\rho^2=\tfrac{3}{4}a^2(\cos^2\omega+3\sin^2\omega).$$

c) Supposons $a=b$; alors les paraboles touchent une droite fixe OX en un point donné A et les directrices passent par un point fixe C. L'équation (3) se réduit à

$$(\alpha^2+\beta^2-a\alpha)^2-c^2\beta^2=0;$$

elle représente deux circonférences qui ont pour diamètres, l'une la

droite AC, l'autre la droite AC′ symétrique de AC par rapport à OA. La seconde circonférence est le lieu proprement dit des foyers des paraboles considérées.

Ce résultat s'explique géométriquement. Soient CD la directrice de l'une des paraboles, A′ la projection de A sur CD. Les points A′,F sont symétriques par rapport à la tangente OA. Mais le lieu de A′ est la circonférence décrite sur AC comme diamètre; donc celui de F est la circonférence de diamètre AC′.

2° Le diamètre mené par le milieu I de AB a pour équation

$$y = \frac{n}{m}\left(x - \frac{a+b}{2}\right). \qquad (4)$$

Si l'on élimine m, n, t, α, β entre les équations (1), (2) et (4), on trouve pour le lieu de l'extrémité de ce diamètre

$$x^2 + y^2 - cy - \tfrac{1}{2}(a+b)x + \tfrac{1}{4}(a-b)^2 = 0.$$

Solution analogue par MM. Lambotte (Solières), Liénard et Déprez. Notre zélé collègue de Dinant a traité le même problème en substituant aux paraboles des hyperboles équilatères; les résultats sont moins simples que ceux de la question 572.

Soient ABC un triangle quelconque, CD une droite quelconque menée par C; le foyer d'une parabole passant par A,B et ayant pour directrice CD est à l'intersection de deux circonférences décrites des points A,B comme centres et ayant pour rayons les perpendiculaires AA′, BB′ abaissées de A,B sur CD. Soit MM′ est la distance du milieu M de AB à CD; les deux circonférences se coupent en deux points F, F′, si

$$AB < AA' + BB' \quad \text{ou} \quad < 2MM'.$$

Or MM′ < MC; donc le lieu des foyers est imaginaire si l'angle ACB est obtus, résultat qui s'explique par cette propriété que les tangentes menées à une parabole par un point de la directrice sont rectangulaires. Lorsque l'angle ACB est droit, il y a une seule parabole satisfaisant au problème; elle a pour directrice une perpendiculaire à MC, pour foyer la projection de C sur AB. Lorsque l'angle ACB est aigu, les circonférences décrites sur les droites AB et MC comme diamètres se coupent en deux points M_1, M_2, tels que les droites CM_1, CM_2, sont les directrices de deux paraboles ayant leurs foyers sur la droite AB; toute droite menée par C en dehors de l'angle M_1CM_2 est la directrice d'une parabole réelle; une droite passant dans l'angle M_1CM_2 ne peut correspondre à une parabole réelle. Toutefois, la hauteur CO du triangle ABC correspond à une parabole impropre, et le pied O de cette droite est un *point isolé* du lieu des foyers.

×Question 582.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 207.)

Si l'on considère les séries

$$\begin{aligned} n &: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \\ u_n &: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots \\ v_n &: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots \end{aligned}$$

démontrer que l'on a

$$u_{2n+1} = u_{n+1}^2 + u_n^2, \tag{1}$$

$$v_{2n} = u_{n-1}^2 + 2u_n^2 + u_{n+1}^2, \tag{2}$$

$$v_{4n+2} = v_{2n+1}^2 + 2 \tag{3}$$

$$v_{4n} = (2u_n)^2 + u_n^2 + 2 \tag{4}$$

et décomposer en carrés u_{2n} *et* v_{2n+1}. (Ed. Lucas.)

Solution par MM. Molenbroek, Mosnat *et* Rocchetti.

1° On a généralement

$$u_p = u_{p-1} + u_{p-2}, \quad v_p = v_{p-1} + v_{p-2}. \tag{5}$$

De là

$$u_p = u_{p-1} + u_{p-2} = 2u_{p-2} + u_{p-3} = 3u_{p-3} + 2u_{p-4} \cdots,$$

ce que l'on peut écrire ainsi

$$\begin{aligned} u_p = u_2u_{p-1} + u_1u_{p-2} = u_3u_{p-1} + u_2u_{p-2} = u_4u_{p-2} + u_3u_{p-3} \\ = u_3u_{p-3} + u_4u_{p-4} = \text{etc.} \end{aligned}$$

Par induction,

$$u_p = u_ku_{p-k+1} + u_{k-1}u_{p-k}. \tag{6}$$

On constate aisément que, si cette formule est vraie pour une valeur de k, elle subsiste également pour $k+1$, il suffit de remplacer u_{p-k+1} par la somme $u_{p-k} + u_{p-k-1}$.

Si dans l'égalité (6), on fait $p = 2n+1$, $k = n+1$, on trouve la relation (1).

2° On a

$$v_n = u_{n+1} + u_{n-1}, \tag{7}$$

car cette formule se vérifie pour $n = 1, 2, \ldots$ et, si elle a lieu pour n, elle subsiste aussi pour $n+1$.

D'après l'égalité (1) :

$$v_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n-1} = (u_{n+1}^2 + u_n^2) + (u_n^2 + u_{n-1}^2) = u_{n+1}^2 + 2u_n^2 + u_{n-1}^2,$$

ce qui démontre la formule (2).

3° La formule (2) peut s'écrire ainsi :

$$v_{2n} = (u_{n+1} + u_{n-1})^2 + 2(u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}) = v_n^2 + 2(u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}).$$

Or, si l'on multiplie les relations

$$u_p = u_{p-1} + u_{p-2}, \quad u_{p-1} = u_{p-2} + u_{p-3},$$

respectivement par u_{p-2} et u_{p-1} et qu'on fasse la différence des produits, on trouve

$$u_p u_{p-2} - u_{p-1}^2 = -(u_{p-1}u_{p-3} - u_{p-2}^2).$$

Donc l'expression $u_p u_{p-2} - u_{p-1}^2$ a une valeur absolue constante; pour $p = 2$, cette valeur est -1; par conséquent

$$u_p u_{p-2} - u_{p-1}^2 = (-1)^{p-1}. \tag{8}$$

On en conclut

$$v_{2n} = v_n^2 + (-1)^{n-1}.2, \tag{9}$$

ou

$$v_{4n+2} = v_{2n+1}^2 + 2, \quad v_{4n} = v_{2n}^2 - 2.$$

4. D'après les formules (2) et (8) :

$$v_{2n} = 2u_n^2 + u_n u_{n-2} + u_{n+2}u_n + (-1)^{n-1}.2.$$

Mais

$$u_{n+2} + u_{n-2} = (u_{n+1} + u_n) + (u_n - u_{n-1})$$
$$= (u_n + u_{n-1} + u_n) + (u_n - u_{n-1}) = 3u_n.$$

Par suite,

$$v_n^2 = 5u_n^2 + (-1)^{n-1}.2,$$

ou

$$v_{4n} = 5u_n^2 + 2, \quad v_{4n+2} = 5u_{n+1}^2 - 2.$$

5. Des égalités (1) et (9), on déduit

$$u_{2n} = u_{2n+1} - u_{2n-1} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2,$$
$$v_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n+2} = u_{n+2}^2 + u_{n+1}^2 - u_n^2 - u_{n-1}^2$$
$$v_{2n+1} = v_{2n+2} - v_{2n} = v_{n+1}^2 + v_n^2 + (-1)^n.4. \quad \text{(Mosnat.)}$$

On trouve facilement

$$u_{2n} = u_{2n-1} + u_{2n-3} + u_{2n-5} + \cdots + u_3 + u_1,$$
$$v_{2n+1} = v_{2n} + v_{2n-2} + v_{2n-4} + \cdots + v_4 + v_2 + v_1;$$

d'où

$$u_{2n} = u_n^2 + 2u_{n-1}^2 + 2u_{n-2}^2 + \cdots + 2u_3^2 + 2u_2^2 + 2u_1^2,$$
$$v_{2n+1} = u_{n+1}^2 + 3u_n^2 + 4u_{n-1}^2 + 4u_{n-2}^2 + \cdots + 4u_2^2 + 4u_1^2.$$

(Rocchetti.)

Question 640.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 280.)

En un point quelconque P *de la base* BC *d'un triangle isoscèle* ABC, *on élève une perpendiculaire qui rencontre* AC *en* D, AB *en* E. *Étudier géométriquement le lieu du point de rencontre* M *des droites* BD, CE. (Russo.)

Solution par MM. de Bőzóky, Molenbroek *et* Klompers. La droite DE marque sur AC et DE des divisions homographiques; donc les droites BD, CE se correspondent dans deux faisceaux projectifs, de centres B, C, et leur point d'intersection M engendre une conique passant par B, C. A étant son propre homologue dans les deux divisions est un point du lieu cherché; les points à l'infini sur AC et AB se correspondent également, de sorte que les parallèles menées par B, C à AC, AB sont des rayons homologues, d'où l'on déduit que le milieu de BC est le centre de la conique.

Solution par M. Déprez. 1° Posons *angle* ECP $= \gamma$, *angle* DBC $= \beta$. Des relations

$$PC \operatorname{tg} \gamma = BP \operatorname{tg} B, \quad BP \operatorname{tg} \beta = PC \operatorname{tg} C,$$

on déduit, $\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = \text{const.}$; donc BM, CM sont les cordes supplémentaires d'une ellipse dont BC est un diamètre, A un point.

2° Le triangle DME se déforme de manière que deux sommets glissent sur deux droites fixes, et que les trois côtés pivotent autour de trois point fixes non collinéaires. D'après le Théorème de Maclaurin et Braikenridge, le sommet libre M décrit une conique.

MM. Denys, Lalisse, Mandart ont aussi résolu la question 640.

---

*Question 651.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 152.)

Intégrer

$$\frac{(\lambda - 1)\cos(\lambda + 1)x + (\lambda + 1)\cos(\lambda - 1)x}{\cos^2 x}\,dx.$$

(E. Catalan.)

Solution par MM. Cl. Servais. Considérons l'expression plus générale

$$\frac{(\lambda - \mu)\cos(\lambda + \mu)x + (\lambda + \mu)\cos(\lambda - \mu)x}{\cos^2 \mu x}\,dx;$$

en la mettant sous la forme

$$2\frac{\lambda\cos\lambda x\cos\mu x+\mu\sin\mu x\sin\lambda x}{\cos^2\mu x}dx$$

on voit qu'elle est la différentielle de la fonction

$$2\frac{\sin\lambda x}{\cos\mu x}.$$

Si le dénominateur était $\sin^2\lambda x$, l'intégrale serait

$$-2\frac{\cos\mu x}{\sin\lambda x}.$$

Solutions analogues par MM. Keelhoff, Brandza, V. Critesco (Bucharest), Klompers, Russo, M. S., Mandart, A. Denys, V. Jamet, Bruyr, Lalisse, Gob, Choisis (*).

QUESTIONS D'EXAMEN (**).

406. Rendre logarithmique

$$\frac{\sin A+\sin B-\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C-1},$$

sachant que $A+B+C=180°$. (Réponse : $\cot\frac{1}{2}C$).

407. On donne un point A sur l'axe des x positifs, un point B sur l'axe des y positifs. 1° Trouver l'équation générale des hyperboles qui passent par les points A, B et dont les asymptotes sont parallèles à OX, OY. 2° A chacune de ces courbes, on mène les tangentes parallèles à une droite donnée OM (équation, $y=mx$). Trouver l'équation du lieu des points de contact. 3° Ce lieu est du second degré. Trouver le genre et le centre de cette courbe, et indiquer la position particulière de OX, OY. Quelle que soit la droite OM, le lieu passe par quatre points fixes.

1° $Bxy+\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$, si $OA=a$, $OB=b$. 2° $ay^2+bmn^2-ab(y+mx)=0$.

3° Le centre du lieu est au milieu de la droite AB; la courbe est une ellipse ou une hyperbole suivant que OM passe dans l'angle YOX ou dans l'angle YOX'. En écrivant $ay(y-b)+bmx(x-a)=0$, on trouve quatre points du lieu qui sont indépendants de m; OX, OY sont parallèles à deux diamètres conjugués.

(*) M. Lalisse nous a aussi envoyé une bonne solution de la question 642, qui nous est parvenue trop tard pour pouvoir être signalée p. 205.

(**) Écho des examens d'entrée à l'École militaire de Belgique, 1889.

408. Représenter le tétraèdre ABCD dans les conditions suivantes : le trièdre A est trirectangle, et les arêtes AB, AC, AD sont égales entre elles. On donne la trace horizontale du plan BAC, les deux projections de A, et la projection horizontale de B.

409. Sur les trois côtés, BC, CD, DA d'un carré ABCD, on construit, vers l'extérieur, les triangles équilatéraux BCE, CDF, DAG; puis, on fait tourner la figure obtenue autour du quatrième côté AB du carré. Trouver en fonction du côté a du carré, le volume engendré par la figure BECFDGAB. Chercher également la surface qui limite ce volume.

$$1^\circ\ V = \tfrac{1}{2}\pi a^3(15+4\sqrt{3});\quad 2^\circ\ S = \pi a^2(8+\sqrt{3}).$$

410. Calculer $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2+3\sqrt{7}}$ à moins de $\dfrac{1}{100}$ près.

On ramène l'expression à $\frac{1}{59}(\sqrt{567}+\sqrt{315}-\sqrt{40}-6)$, et l'on calcule les trois racines carrées à moins de 0,1 près.

411. Résoudre l'équation

$$(n-1)^2x^2 - 2(n^2-n+1)x + n^2 + 5 = 0$$

et discuter les racines, n variant de $-\infty$ à $+\infty$.

Racines positives entre $n=\frac{3}{4}$ et $n=2$; imaginaires, si $n>2$ ou $<\frac{3}{4}$; une racine infinie, et l'autre égale à 3, si $n=1$.

412. Convertir en fraction continue $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$; calculer les quatre premières réduites et indiquer des limites de l'erreur avec laquelle elles expriment l'irrationnelle proposée.

413. Résoudre le système

$$2x^3 - 5x^2y - 5xy^2 + 2y^3 = a,\quad 4x^3 + x^2y + xy^2 + 4y^3 = b.$$

414. Maximum ou minimum de

$$y = \frac{x^2-2ax-1}{x^2+2ax+1}.$$

415. L'angle x est donné par la formule

$$\cot^2 x = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha,$$

où

$$a = 0{,}95,\quad b = 0{,}74,\quad \alpha = 32^\circ 14'. \qquad (1)$$

On écrit

$$\cot^2 x = a\cos^2\alpha\left(\cos\alpha + \frac{b}{a}\operatorname{tg}^2\alpha.\sin\alpha\right);$$

on pose ensuite

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}\operatorname{tg}^2\alpha, \tag{2}$$

ce qui donne

$$\cot x = \sqrt[3]{\frac{a\cos^2\alpha\cos(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}}. \tag{3}$$

Calculer, pour les valeurs (1), φ et x d'après les égalités (2) et (3).

416. On donne trois points A, B, C par leurs projections (a, a'), (b, b'), (c, c'); un quatrième point D du plan ABC est donné par sa projection horizontale d. On élève en D, sous le plan ABC une perpendiculaire DE égale à la moitié de AD. Trouver les projections du point E (Les données de la figure sont telles que les traces des droites AB, BC, CA sont inaccessibles; on cherchera donc une horizontale et une ligne de front du plan ABC.)

417. Les axes OX, OY sont rectangulaires. On donne au point A sur OX, un point B sur OY et un troisième point C, quelconque. Trouver le lieu des centres des coniques, passant par A, B, C et ayant leurs axes principaux parallèles à OX, OY. Ce lieu est généralement du second ordre; trouver son centre et indiquer la position de ses axes principaux.

On trouve que ce lieu a une équation de la forme $Bxy + Dx + Ey + F = 0$, de sorte que c'est une hyperbole dont les axes sont parallèles à OX, OY.

418. On construit une parabole dont l'axe de symétrie est dirigé suivant OX et dont le sommet est un point quelconque A de OX. D'un point donné M de OY, on mène les deux tangentes à la parabole. Trouver le lieu des points de contact : 1° Lorsque OA varie, le paramètre de la parabole restant constant; 2° lorsque le paramètre varie, OA restant constant.

419. On donne un triangle ABC, et une parallèle B'C' à la base BC, rencontrant AB en B', AC en C'. On demande de mener par A une sécante qui coupe BC, B'C' en deux points D, D', tels que l'on ait $D'D = D'C'$. Discuter.

DC' est la bissectrice de l'angle ADC; donc D appartient au lieu défini par

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AC'}{CC'}.$$

420. Une personne offre pour un billet de 763 fr payable dans 7 mois la somme de 735 fr. Quel est le taux de l'escompte : 1° dans l'hypothèse de l'escompte en dehors; 2° dans celle de l'escompte en dedans?

421. Comment obtient-on la racine cubique d'un nombre quelconque N à moins de $\frac{1}{p}$ près ? Démontrer la règle. Appliquez-la aux exemples suivants : $\sqrt[3]{7}$ à moins de $\frac{1}{5}$ près; $\sqrt[3]{7,25}$ à moins de 0,01 près; $\sqrt[3]{9\frac{5}{8}}$ à moins de $\frac{1}{7}$ près; $\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$ à moins de 0,01 près.

QUESTIONS PROPOSÉES.

662. Soient ABCD un quadrilatère, AB et CD, BC et DA les couples de côtés opposés se coupant respectivement en λ et μ, ω et ω' des points divisant harmoniquement $\lambda\mu$. Démontrer que la conique qui passe par les six points A, B, C, D, ω, ω' est le lieu des points de contact des tangentes menées par ω et ω' à toutes les coniques inscrites dans le quadrilatère ABCD. (E. Lemoine.)

663. 1° Si les côtés d'un triangle sont en progression géométrique, il en est de même des rayons de courbure de la potentielle triangulaire aux extrémités du côté moyen et au barycentre. 2° Le cercle osculant la potentielle au barycentre est égal au cercle circonscrit (Voyez N. A. M., 1888, p. 263 et *Mathesis*, VI, p. 246.) (E. Cesàro.)

×**664.** Résoudre le système

$$x^2(y-z)=a, \quad y^2(z-x)=b, \quad z^2(x-y)=c.$$

665. La chaînette d'égale résistance, qui a pour équation intrinsèque

$$\rho=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}}+e^{-\frac{s}{a}}\right),$$

est la seule ligne dont le rayon de courbure soit égal au segment de la normale, intercepté par deux droites fixes parallèles. (E. Cesàro.)

Rectifications. Page 122, ligne 14, en remontant, lire *déplacent* au lieu de *placent*. *Article de M. Lucas;* page 129, ligne 9, lire *le centre* I *du cercle inscrit* au lieu *le centre* O *du cercle circonscrit;* p. 173, lignes 17 et 20, remplacer le signe = par —; p. 180, ligne 3, lire *cos* C au lieu de *cos c*.

NOTE SUR L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE $U^4 + V^4 = S^4 + W^4$;

par M. E. FAUQUEMBERGUE, professeur au Lycée de Mont-de-Marsan.

Dans un mémoire, présenté au *Congrès* de Reims, 1880, ***Sur la résolution en nombres entiers ou complexes de l'équation*** $U^n \pm V^n = S^n + W^n$, M. Desboves donne, touchant l'équation $U^4 + V^4 = S^4 + W^4$, les formules (*) suivantes, qu'il croit nouvelles :

$$U = (x^2 + y^2)(2x^5 - yx^4 + 2y^2x^3 + 18y^3x^2 - y^5) + 8xy^2(2x^4 + y^4),$$
$$V = (x^2 + y^2)(x^5 - 18y^2x^3 + 2y^3x^2 + y^4x + 2y^5) + 8x^2y(x^4 + 2y^4),$$
$$S = (x^2 + y^2)(2x^5 + yx^4 + 2y^2x^3 - 18y^3x^2 + y^5) + 8xy^2(2x^4 + y^4),$$
$$W = (x^2 + y^2)(-x^5 + 18y^2x^3 + 2y^3x^2 - y^4x + 2y^5) + 8x^2y(2x^4 + y^4).$$

En faisant successivement $x = 1$, $y = 2$; $x = 1$, $y = 3$, il en déduit les deux solutions très simples représentées par les identités :

$$1203^4 + 76^4 = 1176^4 + 653^4,$$
$$59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4.$$

M. Desboves ajoute qu'après avoir résolu cette question, il a appris de M. Réalis qu'elle avait déjà été résolue par Euler, mais d'une manière beaucoup moins simple; et que si l'on exprimait U, V, S, W par des polynômes en x, y, calcul qu'Euler n'a point fait, on trouverait que ces polynômes sont du 17^{me} degré, au lieu d'être du 7^{me}, comme dans ses formules, et que, par suite, il n'est pas étonnant que l'illustre géomètre trouve des solutions moins simples que les siennes.

C'est, en effet, par la méthode dont parle M. Desboves, qu'en 1772 Euler trouvait l'identité

$$477069^4 + 8947^4 = 310319^4 + 428397^4,$$

solution qu'il croyait alors être la plus simple qu'on pût trouver : *hi numeri videntur minimi quaestioni nostrae satisficientes*.

Mais en 1778, dans le mémoire où il dit que l'on juge impossible de satisfaire en nombres entiers aux équations : $a^3 + b^3 = c^3$, $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$, $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 = e^5$, etc., le grand analyste reprit la question et, chose curieuse, arriva, par une méthode directe, aux formules

(*) Ces formules avaient été communiquées à M. Réalis et données sans démonstration dans la N. C. M. (t. VI, p. 33).

mêmes que M. Desboves retrouva par l'application des formules de Cauchy. Voici, en effet, ce qu'on lit à la page 289 du tome II des *Commentationes arithmeticæ* (*) :

L'équation

$$ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$$

est vérifiée par les valeurs de a, b, c, d données par les formules :

$$a=g(f^2+g^2)(-f^6+18f^2g^2-g^4),\quad c=2g(4f^6+f^4g^2+10f^2g^4+g^6),$$
$$b=2f(f^6+10f^4g^2+f^2g^4+4g^6),\quad d=f(f^2+g^2)(-f^4+18f^2g^2-g^4).$$

Or, on est conduit à cette équation en posant $U=a+b$, $V=c-d$, $S=a-b$, $W=c+d$, dans l'équation $U^4+V^4=S^4+W^4$, et les valeurs de U, V, S, W, ne sont, aux signes près, autres que celles données plus haut, où x et y seraient remplacés par f et g. Donc, répétons encore une fois avec Salomon : *nil novi sub sole!*

Dans le même mémoire, Euler donne aussi les formules suivantes, pour résoudre l'équation $ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$:

$$a=f(\alpha+\beta)(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2),\quad c=g(\alpha+\beta)(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2),$$
$$b=g(\beta^5-5\alpha\beta^3+4\alpha^2\beta-2\alpha^5),\quad d=f(\alpha^5-5\alpha^2\beta+4\alpha\beta^3-2\beta^5),$$

où α et β sont le numérateur et le dénominateur de la fraction $\dfrac{3f^2+g^2}{3g^2+f^2}$ réduite à ses moindres termes. En posant

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2)=\Delta,$$

on peut écrire

$$a=f\Delta,\quad b=g[\Delta-3\alpha(\alpha-\beta)^2],\quad c=g\Delta,\quad d=f[\Delta-3\beta(\alpha-\beta)^2].$$

Ajoutons enfin qu'en 1780, Euler résolut encore le même problème par une autre méthode et trouva pour solution en nombres IMPAIRS :

$$12231^4+10203^4=10381^4+2903^4,$$

solution beaucoup plus simple que celle de 1772, et qui est, peut-être, la plus simple qu'on puisse trouver (en nombres impairs.)

17 février 1887.

(*) LEONHARDI EULERI *Commentationes arithmeticæ collectæ*. Petropoli, 1849. A la page 288, on trouve l'identité : $158^4+59^4=133^4+134^4$.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE.

1. PROBLÈME : *Construire le triangle* ABC, *dont on connaît le premier triangle de* BROCARD $A_1 B_1 C_1$.

Solution de M. FUHRMANN. Les triangles ABC, $A_1 B_1 C_1$ étant semblables, on peut construire l'angle de Brocard V, du triangle ABC. Des lignes homologues dans les deux triangles étant dans le rapport

$$1 : \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - 3\operatorname{tg}^2 V},$$

on peut trouver le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC. En outre, on a

$$A_1 O = -R\frac{\cos(A + V)}{\cos V},$$

ce qui nous donne les points O et K (centre du cercle circonscrit et point de Lemoine). $A_1 K$ étant parallèle à BC, on a les directions des côtés.

Solution de M. STEGEMANN. Désignons par A'B'C' le premier triangle de Brocard du triangle donné $A_1 B_1 C_1$. Le triangle $A_1 B_1 C_1$ est inversement semblable aux triangles ABC, A'B'C'. L'angle $(B_1 C_1, B'C')$ étant égal à l'angle $(B_1 C_1, BC)$, BC est parallèle à B'C'; on voit que les triangles ABC et A'B'C' sont perspectifs. On sait que les trois triangles ont même centre de gravité G et on en conclut que G est le centre de perspective des triangles ABC, A'B'C'. On a $GA' : GA_1 = GA_1 : GA$ et l'on déterminera aisément sur GA', GB', GC' les points A, B, C.

Solution de M. EMMERICH. D_1, centre de perspective des triangles $A_1 B_1 C_1$ et A'B'C', est situé sur OK. On a donc les points K et O. Au moyen de l'angle de Brocard on trouve les points Ω, Ω' et ensuite les points A, B, C. (*Zeitschrift d'Hoffmann.*)

2. On donne une circonférence O et un point A. Construire un triangle ABC dont les sommets B,C soient situés sur la circonférence O, connaissant : 1° l'angle A et la longueur $BC = a$; 2° les angles A et B ; 3° a et le rapport $AB : AC = m : n$.

1° X étant le centre de la circonférence ABC, on peut déterminer le rayon AX et la distance de X à BC au moyen des données a, A ; on connaît ainsi AX et OX. 2° Soit D le second point de rencontre de AB avec la circonférence O ; le triangle ACD rentre dans le cas précédent. 3° Sur une corde B'C' du cercle O égale à a construire le lieu des points M tels que $MB' : MC' = m : n$, et prendre l'intersection de ce lieu avec la circonférence de centre O et de rayon OA. (EMMERICH.)

3. Même question, connaissant l'angle A et la hauteur AA'.

On s'appuie sur le théorème suivant(*) : *Étant données deux circonférences X, O, la puissance d'un point A de la première par rapport à la seconde égale le double produit de la distance de A à l'axe radical par la distance XO des centres.* Cette proposition détermine OX, d'où le triangle OXC dont on connaît deux côtés et un angle. (EMMERICH.)

4. Inscrire, à un cercle donné O, un quadrilatère ABCD, connaissant le point de rencontre E des diagonales et 1° deux côtés opposés AB, CD ; 2° le rapport AB : CD et le côté BC ; 3° les rapports AB : CD, BC : DA.

1° L'angle AEB est connu, ce qui fait rentrer le triangle AEB dans la question **2**, 1° ; 2° On connaît le rapport BE : CE = AB : CD, ce qui ramène le problème à la question **2**, 3° ; 3° Calculer les rapports AE : CE, BE : DE. (EMMERICH.)

5. On donne, dans l'espace, deux points P, Q et une sphère S. Trouver sur celle-ci un cercle C, de rayon donné, tel que les distances maximum et minimum de P à la circonférence C soient dans le rapport $p : p'$, et que les distances maximum et minimum de Q à C soient dans le rapport $q : q'$.

Le plan PSO, mené par les centres de la sphère et du cercle cherché rencontre la sphère suivant un grand cercle C_p, la circonférence C aux extrémités d'un diamètre AB ; par hypothèse, PA : PB = $p : p'$. Le problème **2**, 3° permet de construire la figure (C_p, AB, P), d'où la distance PO. On détermine, de même, QO, et l'on connaît SO. (EMMERICH.)

6. Construire un triangle ABC, connaissant la bissectrice α de l'angle A et les segments $AC_h = m$, $BC_h = n$ déterminés sur AB par la hauteur CC_h.

On tire a et b des équations

$$a^2 = bc - a^2\frac{bc}{(b+c)^2}, \quad a^2 - b^2 = c(n-m). \qquad \text{(EMMERICH.)}$$

7. Construire un triangle ABC, connaissant l'angle A, la bissectrice BD de l'angle B et le rayon r du cercle inscrit ou le rayon r_b du cercle exinscrit opposé à B.

Dans le triangle ABD, on connaît BD, l'angle opposé A et la bissectrice AI ou AI_b, qu'on déduit facilement de r (ou r_b) et A. (EMMERICH.)

8. Construire un triangle isoscèle ABC, connaissant la différence

---

(*) Théorème souvent utile, donnant immédiatement le lieu d'un point dont la puissance par rapport à un cercle fixe est dans un rapport constant avec sa distance à une droite fixe. (J. N.)

AB — BC entre le côté et la base, et la somme $r + r_b$ des rayons du cercle inscrit et du cercle exinscrit, opposé à B.

Soient I, I_b les centres des cercles, et E, E_b leurs points de contact avec AC. Menons par I une parallèle à AC, rencontrant $I_b E_b$ en F. On sait construire le triangle I_bFI dont les côtés sont

$$I_b F = r + r_b, \quad IF = EE_b = b - a;$$

on connaît donc l'angle

$$II_b F = \tfrac{1}{2}(C - A) = \tfrac{1}{2}(C - 180^\circ + 2C).$$

Le problème proposé dépend donc de la trisection d'un angle. (EMMERICH.)

SUR LES DÉMONSTRATIONS DE QUELQUES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DU TRIANGLE(*);

par M. ERNEST LEBON, professeur de mathématiques au Lycée Charlemagne, à Paris.

Dans le *Troisième Livre de la Géométrie élémentaire*, on démontre les relations entre les côtés d'un triangle rectangle et leurs projections orthogonales sur l'hypoténuse et la relation entre les trois côtés, puis la relation entre les côtés d'un triangle quelconque et la projection orthogonale de l'un d'eux sur un autre. Le but de cette Note est de faire voir comment on pourrait démontrer d'abord pour un triangle quelconque des propriétés métriques analogues à celles que l'on donne pour le triangle rectangle, et en déduire ces dernières, et aussi démontrer la relation entre les côtés d'un triangle quelconque et la projection orthogonale de l'un d'eux sur un autre, d'une manière simple et sans employer les théorèmes relatifs au carré d'une somme ou d'une différence de deux droites.

DÉFINITION. Si par un sommet A d'un triangle ABC (fig. 1, 2, 3, 4), on mène une droite AA′ faisant avec le côté BC un angle égal à l'angle A et coupant BC en A′, et si l'on considère le triangle A′BA équiangle au triangle ABC, nous dirons que la longueur A′B est la *projection oblique* du côté AB sur le côté BC.

(*) Les propriétés exprimées par les égalités (1) (2) et (4) sont proposées en exercice dans le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse (Question 181, 5e éd., p. 343).

En menant la seconde droite AA″ faisant avec BC un angle égal à l'angle A, nous obtenons la projection oblique A″C du côté AC sur le côté BC. Nous dirons que AA′ ou AA″ est la ***projetante oblique*** relative au côté BC.

THÉORÈME. ***Tout côté d'un triangle est moyen proportionnel entre un autre côté et sa projection oblique sur cet autre.***

Soient ABC un triangle et A′B la projection oblique du côté AB sur

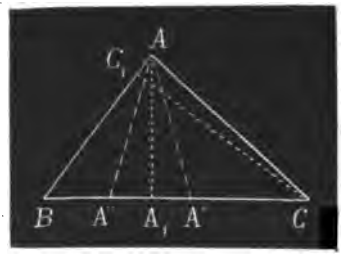


Fig. 1 (B et C < A < 90°)

Fig. 2 (C < A < B et 90°)

Fig. 3 (A < B, C et 90°)

Fig. 4 (A > 90°)

le côté BC. Les deux triangles ABC et A′BA, étant équiangles, sont semblables; donc on a

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{A'B}$$

et, par suite,

(1) $$\overline{AB}^2 = BC \times A'B.$$

De même, A″C étant la projection oblique de AC sur BC, on trouverait

(2) $$\overline{AC}^2 = BC \times A''C.$$

COROLLAIRE. *Le rapport des carrés de deux côtés d'un triangle est égal au rapport de leurs projections obliques sur le troisième côté.*

En effet, des égalités (1) et (2), on tire

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{A'B}{A''C}. \tag{3}$$

THÉORÈME. *Une projetante oblique d'un triangle est moyenne proportionnelle entre les projections obliques des deux côtés qui se coupent sur elle.*

Soient ABC un triangle, A'B et A''C les projections obliques des côtés AB et AC sur le côté BC. Les deux triangles AA'B et CA''A, étant équiangles, sont semblables; donc on a

$$\frac{A'B}{AA'} = \frac{AA''}{A''C}$$

et, par suite,

$$\overline{AA'}^2 = A'B \times A''C. \tag{4}$$

COROLLAIRE. *Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit du troisième côté par la projetante oblique relative à ce dernier.*

En effet, en multipliant membre à membre les égalités (1) et (2), on a l'égalité

$$\overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \times A'B \times A''C,$$

qui, en vertu de l'égalité (4), devient

$$\overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \times \overline{AA'}^2;$$

d'où l'on tire

$$AB \times AC = BC \times AA'. \tag{5}$$

THÉORÈME. *Le carré d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés moins ou plus le double produit de l'un des deux derniers côtés par la projection orthogonale de l'autre sur lui, selon que l'angle opposé au premier côté est aigu ou obtus.*

Soient ABC un triangle, A'B et A''C les projections obliques des côtés AB et AC sur le côté BC. En ajoutant membre à membre les relations (1) et (2), on a

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC\,(A'B + A''C). \tag{α}$$

Selon que l'angle A est aigu (fig. 1, 2, 3) ou obtus (fig. 4), on reconnaît aisément que l'on a

$$A'B + A''C = BC \pm A'A'',$$

et l'égalité (α) devient

$$(\beta) \qquad \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \pm BC \times A'A''.$$

Menons les perpendiculaires AA_1 sur BC, et CC_1 sur AB.

Or, les triangles semblables $A'A_1A$ et AC_1C donnent

$$\frac{A'A_1}{AC_1} = \frac{AA_1}{CC_1},$$

et les triangles semblables AA_1B et CC_1B donnent

$$\frac{AA_1}{CC_1} = \frac{AB}{BC};$$

donc

$$\frac{A'A_1}{AC_1} = \frac{AB}{BC},$$

d'où

$$BC \times A'A_1 = AB \times AC_1;$$

et comme $A'A_1 = \frac{1}{2} A'A''$, on a

$$(\gamma) \qquad BC \times A'A'' = 2 \times AB \times AC_1.$$

En vertu de l'égalité (γ), l'égalité (β) devient

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \pm 2 \times AB \times AC_1;$$

d'où l'on tire

$$(6) \qquad \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \mp 2 \times AB \times AC_1.$$

Corollaires. Lorsque le triangle ABC est rectangle en A, les égalités (1), (2), (3), (4) expriment des propriétés que l'on démontre directement pour le triangle rectangle; il suffit ici de les énoncer comme on le fait habituellement. De l'égalité (6), on tire le théorème de Pythagore, car AC_1 est nulle.

Remarque. Il y a peut-être lieu d'hésiter pour l'adoption de toutes les idées exposées dans cette note; mais nous appelons l'attention sur notre démonstration des deux théorèmes relatifs au carré d'un côté d'un triangle; il est inutile d'y parler de projection oblique et il suffit pour la substituer à celles qui sont données actuellement, d'ajouter au commencement de notre démonstration : menons les droites AA' et AA'' faisant avec le côté BC des angles égaux à l'angle A, puis d'établir les égalités (1) et (2), sans les exprimer par un énoncé.

SUR UNE QUESTION D'ARITHMÉTIQUE;

par M. E. CATALAN, professeur à l'Université de Liége.

Le dernier numéro de *Mathesis* contient divers théorèmes intéressants, proposés par M. DÉSIRÉ ANDRÉ. La *Rédaction* a déjà fait observer que deux de ces théorèmes ne diffèrent pas, essentiellement, de celui-ci :

Si a et b sont premiers entre eux,

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b-1)}{1.2\ldots a \times 1.2\ldots b} = \textit{entier}(*).$$

J'ajouterai que cet énoncé n'est pas complet. Voici celui que l'on trouve dans mon *Cours d'Analyse*(**) :

1° $\frac{N}{D}$ *étant la fraction irréductible équivalente à*

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b-1)}{1.2.3\ldots a \times 1.2.3\ldots b} = C,$$

le dénominateur D *divise a et b;* 2° C *se réduit à un nombre entier, si a et b sont premiers entre eux.*

Le *primo* est, pour ainsi dire, évident; et le *secundo* en est une conséquence.

REMARQUE. On pourrait supposer que D est, *toujours*, le plus grand commun diviseur entre a et b. Il n'en est rien.

Soient $a = 12$, $b = 8$. Le plus grand commun diviseur est 4. Mais

$$C = \frac{13.14.15.16.17.18.19}{1.2.3.4.5.6.7.8};$$

puis

$$\frac{N}{D} = \frac{13.3.17.19}{2}.$$

Ainsi,

$$D = 2.$$

(*) *Mathesis*, t. VIII, p. 194.

(**) Première édition (1870), p. 44 : seconde édition (1879), p. 48.

RÉCLAMATION DE PRIORITÉ.

On lit, dans le tome IX de *Mathesis* (pp. 20 et 21) : « **Prop. 4.** Si A', B', C' *sont les sommets du triangle orthique de* ABC(*), *et* K, N; K', N'; K'', N'' *leurs projections sur les côtés, ces projections sont concycliques*(**)... »

« Ce cercle (***) a été étudié pour la première fois en Angleterre(IV), par H. M. « TAYLOR dans une note publiée par les *Proceedings of the London Mathematical* « *Society*, 1884, vol. XV, p. 122. Il est appelé *Cercle de Taylor* du triangle... »

D'autre part, la 6me édition des *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, publiée en 1879, contient (pp. 132, 133) ce théorème : « *Soient* AP, BQ, CR *les hau-* « *teurs d'un triangle* ABC. *On projette chacun des points* P, Q, R *sur les deux côtés* « *opposés, en* D *et* E, F *et* G, H *et* K. *L'hexagone* DGHEFK, *inscrit au triangle* ABC, « *jouit des propriétés suivantes* : ..... 3° *Les sommets appartiennent à une même* « *circonférence.* »

Il est clair que les deux propositions n'en font qu'une. Si donc l'hexagone considéré méritait un nom particulier, on devrait, en bonne justice, l'appeler *hexagone de Catalan*. Mais je ne songe pas à prendre un brevet.

POST-SCRIPTUM. M. Neuberg m'apprend que l'*hexagone* n'est ni de Taylor, ni de Catalan. En effet, le théorème principal se trouve dans le *Journal de Vuibert*, année 1877, p. 43. *Il n'y a rien de nouveau sous le soleil!* (E. C.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

15. ***Sur une équation différentielle linéaire*** (Extrait d'une note de M. V. JAMET). On a vu (*Mathesis*, VIII, p. 228-231) que l'équation différentielle linéaire

$$ny = xy' + by''$$

où n est entier positif, a pour intégrale particulière

$$u = x^n + \frac{n(n-1)}{2} bx^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} b^2 x^{n-4} + \text{etc.}$$

(*) Le triangle *orthique* de ABC est celui qui a pour sommets les pieds des hauteurs de ABC.

(**) *Homocycliques* serait préférable.

(***) Dans l'énoncé, il s'agit d'un *hexagone* (E. C.).

(IV) En Angleterre : *Mathesis* ne contient donc pas d'inexactitude historique; le journal de Vuibert est d'ailleurs cité, p. 24, du 3me supplément de *Mathesis*, t. VI (1886).

En posant, d'après la théorie générale,

$$y = u \int z dx$$

on trouve

$$z = Cu^{-2} e^{-\frac{x^2}{2b}}$$

et l'on obtient aisément, au moyen de l'intégration par parties, $\int z dx$ en fonction de u, de ses $(n-1)$ premières dérivées et de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2b}} dx,$$

que l'on peut développer en série. L'intégrale générale de l'équation donnée est alors

$$y = c_1 u + c_2 u \int z dx,$$

où l'on remplace $\int z dx$ par sa valeur.

Mais il est plus facile d'obtenir cette intégrale générale sous forme de série, en posant immédiatement

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + \text{etc.}$$

et substituant cette série (supposée uniformément convergente) dans l'équation donnée. Celle-ci sera vérifiée si l'on a

$$n a_p = p a_p + b(p+1)(p+2) a_{p+2}, \quad \text{ou} \quad a_{p+2} = \frac{(n-p) a_p}{b(p+1)(p+2)},$$

relation qui laisse a_0 et a_1 arbitraires.

Si l'on fait $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, on trouve, pour la série correspondante, le polynôme u.

Si l'on fait $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, on obtient la série

$$v = x + \frac{n-1}{1.2.3} \frac{x^3}{b} + \frac{(n-1)(n-3)}{1.2.3.4.5} \frac{x^5}{b^2} + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{1.2.3.4.5.6.7} \frac{x^7}{b^3} + \text{etc.},$$

qui est uniformément convergente, car le rapport de deux termes consécutifs est

$$\frac{1}{p+1} \frac{\frac{n}{p} - 1}{\frac{2}{p} + 1} \frac{x^2}{b},$$

et a pour limite zéro, pour $p = \infty$, quel que soit x.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 576.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 169.)

Une surface est engendrée par une circonférence variable dont le plan est parallèle au plan représenté par $x + y = 0$, ***et qui s'appuie sur les axes des*** x, ***des*** y ***et sur la droite dont les équations sont*** $y = x$, $z = a$. ***Trouver l'équation de la surface et le volume compris entre l'origine et le plan*** $x + y = a$. (TODHUNTER.)

Solution par MM. CHOISIS, EMMERICH, LAMBOTTE, MOLENBROEK, MANDART, STUYVAERT *et* E. B.

1° Prenons sur OX, OY les longueurs $OA = OB = \alpha$; au milieu C de AB élevons une perpendiculaire CD sur le plan XY, égale à a; enfin, circonscrivons une circonférence au triangle ABD. Quand α varie, cette circonférence engendre la surface proposée.

Menons dans le plan ADB les lignes AE, BE perpendiculaires sur AD, BD, et soit I le milieu de DE. On a

$$CA = CD = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \quad CE = \frac{\overline{CA}^2}{CD} = \frac{\alpha^2}{2a}, \quad DE = a + \frac{\alpha^2}{2a},$$

$$CI = \frac{1}{2}\left(a - \frac{\alpha^2}{2a}\right).$$

Remarquons en passant que, d'après la dernière équation, le centre de la circonférence décrit une parabole; car CI et OC sont les coordonnées de I par rapport aux axes OC, OZ.

Cette circonférence a pour équations

$$\left(x - \frac{1}{2}\alpha\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\alpha\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}a + \frac{\alpha^2}{4a}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(a + \frac{\alpha^2}{2a}\right)^2$$

$$x + y = \alpha;$$

l'élimination de α donne pour l'équation de la surface

$$z^2 - z\left(a - \frac{(x+y)^2}{2a}\right) - 2xy = 0.$$

2° On peut considérer comme élément de volume un cylindre ayant pour base la circonférence ADB, pour hauteur $d(OC) = \frac{d\alpha}{\sqrt{2}}$. Donc

$$V = \int_0^a \frac{1}{4}\pi\left(a + \frac{\alpha^2}{2a}\right)^2 \cdot \frac{d\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{83\pi a^3\sqrt{2}}{480}.$$

Remarque. Si l'on rapporte la surface aux plans bissecteurs du dièdre XOZY, la circonférence ADB a pour équations

$$x = \mathrm{OC}, \quad (x - \mathrm{OC})^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}a + \frac{\overline{\mathrm{OC}}^2}{2a}\right) = \frac{1}{4}\left(a + \frac{\overline{\mathrm{OC}}^2}{2a}\right);$$

d'où, en éliminant OC

$$z^2 - \frac{a^2 - x^2}{a}z + y^2 - x^2 = 0.$$

Question 582.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 207.)

Trouver le lieu du point qui divise dans un rapport constant $m : n$ la normale à une conique, limitée de part et d'autre à la courbe.

Solution par M. Déprez. L'équation de la normale au point $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ étant

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} = c^2,$$

l'anomalie du second point de rencontre de cette droite avec l'ellipse est déterminée par

$$\frac{a^2\cos\varphi_1}{\cos\varphi} - \frac{b^2\sin\varphi_1}{\sin\varphi} = c^2. \tag{1}$$

Les coordonnées d'un point du lieu sont, si l'on suppose $m + n = 1$,

$$x = a(m\cos\varphi + n\cos\varphi_1), \quad y = b(m\sin\varphi + n\sin\varphi_1). \tag{2}$$

Il s'agit d'éliminer φ et φ_1 entre les égalités (1) et (2). Si l'on élimine d'abord φ_1, on trouve

$$\left(\frac{x}{a} - m\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - n\sin\varphi\right)^2 = n^2,$$

$$\frac{a^2}{\cos\varphi}\left(\frac{x}{a} - m\cos\varphi\right) - \frac{b^2}{\sin\varphi}\left(\frac{y}{b} - m\sin\varphi\right) = c^2 n,$$

égalités qu'on ramène à

$$\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} = \frac{1}{2m}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + m - n\right), \tag{3}$$

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} = c^2, \tag{4}$$

et dont la dernière représente la normale. Si k désigne le second membre de (3), on peut encore écrire

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\operatorname{tg}\varphi = k\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}, \quad (ax\operatorname{tg}\varphi - by)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = c^2\operatorname{tg}\varphi.$$

Éliminant $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$ et rendant la première équation rationnelle, on obtient

$$(ax\operatorname{tg}\varphi - by)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\operatorname{tg}\varphi\right) = kc^2\operatorname{tg}\varphi, \tag{5}$$

$$\left(\frac{y^2}{b^2}-k^2\right)\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{2xy}{ab}\operatorname{tg}\varphi + \frac{x^2}{a^2}-k^2 = 0. \tag{6}$$

L'équation du lieu se déduit facilement de (5) et (6).

Dans le cas de la parabole, la normale au point (x_1, y_1) rencontre la courbe en un second point ayant pour coordonnées

$$y_2 = -\left(y_1+\frac{2p^2}{y_1}\right), \quad x_2 = \frac{(x_1+p)^2}{x_1}.$$

Les coordonnées d'un point du lieu demandé sont donc

$$y = (m-n)y_1 - \frac{2np^2}{y_1}, \quad x = x_1 + 2np + \frac{np^2}{x_1}.$$

Si l'on remplace x_1 par $y_1^2 : 2p$, x et y sont exprimées en fonctions d'un seul paramètre y_1; en portant les valeurs dans l'équation d'une droite, on voit que le lieu est du 4e ordre.

La question 583 peut être étendue aux normales d'angle α.

Question 584.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 207.)

Chercher le lieu des sommets et l'enveloppe des axes des paraboles tangentes à une droite donnée OY ***en un point variable*** C, ***et passant par deux points fixes*** A, B ***d'une perpendiculaire*** OX ***à*** OY. (H. Brocard.)

Solution par M. Déprez. 1° Les paraboles ont pour équation

$$f(x, y) \equiv (y+x^2) - 2Ax - 2B\lambda y + B^2 = 0, \tag{1}$$

A et B étant des constantes, λ un paramètre variable. Les axes sont donnés par

$$\tfrac{1}{2}(f'_x + \lambda f'_y) \equiv (\lambda y + x)(\lambda^2+1) - (A + B\lambda^2) = 0. \tag{2}$$

Pour trouver le lieu des sommets, on peut substituer dans (2) la valeur de λ tirée de (1). On peut également résoudre les équations (1) et (2) par rapport à x, y, ce qui donne

$$x = \frac{A - B}{(\lambda^2 + 1)^2}, \quad y = \frac{B\lambda^4 + (A + B)\lambda^2 + B}{\lambda(\lambda^2 + 1)^2}.$$

Les coordonnées d'un point du lieu sont ainsi exprimées en fonction d'un paramètre variable. On voit immédiatement qu'une droite est coupée par le lieu en 5 points.

2° L'équation de l'enveloppe des axes s'obtient en éliminant λ entre l'équation (2) et sa dérivée. Si l'on prend pour coordonnées d'une droite les coefficients p, q de son équation sous la forme $px + qy - 1 = 0$, on a

$$p = \frac{\lambda^2 + 1}{A + B\lambda^2}, \quad q = \frac{\lambda(\lambda^2 + 1)}{A + B\lambda^2},$$

L'enveloppe est de la 3^{me} classe et du 4^{me} ordre.

M. Déprez traite encore quelques autres problèmes relatifs aux paraboles (1) : 1° Lieu des foyers (cubique); 2° Enveloppe des directrices (parabole); 3° Lieu du centre de courbure au point C (parabole); 4° Enveloppe de la corde d'osculation au point C (circonférence), etc.

Question 620.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 176.)

On considère tous les triangles qui ont un sommet fixe A, ***et les deux autres sommets sur une droite donnée; la longueur*** BC ***est également donnée. Trouver les lieux géométriques du centre du cercle circonscrit et du centre du cercle des neuf points, ainsi que les enveloppes des hauteurs issues de*** B ***et*** C. (Déprez.)

Solution analytique par MM. François, Beyens, Molenbroek, Pisani, Russo, Denys. Soient H l'orthocentre de ABC, K et L les points de rencontre de la hauteur AH avec la base BC et la circonférence circonscrite, O le centre de celle-ci, O′ celui du cercle des neuf points, M le milieu de BC. On sait que HK = KL, KA . KL = KB . KC.

Prenons pour axes KC et KA, et soient α, $\alpha - d$, $\alpha + d$ les abscisses de M, B, C, et soit h la hauteur AK; l'ordonnée de O étant la demi-somme des ordonnées de A et L, on trouve, pour les coordonnées de O,

$$x = \alpha, \quad 2y = h + \frac{\alpha^2 - d^2}{h},$$

et dont la dernière représente la normale. Si k dés … pour sommet le de (3), on peut encore écrire …a série des trian-

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\operatorname{tg}\varphi = k\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}, \quad (ax\operatorname{tg}\varphi - by$$

…ant au milieu de H0.

Éliminant $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$ et rendant la pr… on obtient

$$(ax\operatorname{tg}\varphi - by)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\operatorname{tg} \quad \frac{-d^2}{4k}\right).$$

$$\left(\frac{y^2}{b^2}-k^2\right)\operatorname{tg}^2\varphi+\frac{2xy}{ab}\operatorname{tg} \quad \frac{+d^2}{4k}\right).$$

L'équation du lieu se déduit facileme…

Dans le cas de la parabole, la nor… courbe en un second point ayant pc… $x+d)$.

$$y_2 = -\left(y_1+\frac{2l}{?} \quad \text{…te droite} \right. \quad \text{ou} \quad (x-2d)^2 = 4ky.$$

Les coordonnées d'un point du l… ole.

$$y = (m-n)y, -$$

Si l'on remplace x_1 par y_1^2 : … seul paramètre y_1 ; en porta… on voit que le lieu est du …

La question 583 peut é…

Chercher le lieu des … genues à une droite do… points fixes A, B d'u…

Solution par M. …

$$f(x,y)$$

A et B étant des … donnés par

$$\frac{1}{2}(\ldots$$

B. *de Reims*. Soient AA', BB', CC', … ABC, H leur point de concours, N le … culaires élevées en C sur CA, et en B … enveloppent une même parabole P ayant … sommet la droite BC. La distance BC … BB' s'obtient en imprimant à la parabole … le sens CB, mesuré par la quantité CB. … en sens inverse, un sens l'on voisine

… ABC. Soit Q le point de rencontre de la … NQ menée à l'axe AA' ; je dis que NQ est … le point où NQ coupe BC ; l'équation … AA' QC, ou $\overline{A'M'}^2 = AA'.QC$, M étant … D'autre part, $CN = HA'$, et $A'B.A'C$ … éliminant $\overline{A'M'}$, on trouve $\overline{BC}^2 =$ … et le lieu de N est la parabole P tan…

…le à $BC^2 : 4AA'$. Le centre O
…tique au lieu de N.
…s points de ABC, G le centre de
…èle à BC. Si l'on prend pour axes
… moitié de celle de O, et l'abscisse
… changée de signe. On conclut de là
…bole.

…r le calcul, la question analogue sur la sphère.

Question 646.

…oir *Mathesis*, t. IX, p. 104.)

…*s consécutifs sont disposés en carré de la manière*

$$\begin{vmatrix} n-4 & n+2 & n-2 \\ n-1 & n & n+4 \\ n+3 & n-3 & n+1 \end{vmatrix}.$$

…*ccupé par le nombre du milieu ; les autres nombres se succè-*
… *la loi du cavalier, dans l'ordre de grandeur croissante.*
… *de manière que la valeur de ce déterminant du cavalier soit un*
fait. (DE ROCQUIGNY.)

…*on par* MM. BROCARD, P. DECAMPS, MANDART, DENYS, DE BÖZÓKY, …A *et* CRITESCO (de Bucharest). Retranchant la seconde de la …me, puis la première de la seconde; enfin ajoutant la première aux deux suivantes, on obtient successivement

$$\begin{vmatrix} n-4 & -6 & 4 \\ n-1 & -1 & -4 \\ n+3 & 6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-4 & -6 & 4 \\ 2n-5 & -7 & 0 \\ 2n-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4.7\,(2n-1).$$

Par conséquent, on fera

$$(2n-1) = 7\,(2u+1)^2, \quad n = 14u^2 + 14u + 4.$$

---

d'où, en éliminant α, l'équation du lieu de O :

$$x^2 = 2h\left(y - \frac{h^2 - d^2}{2h}\right).$$

Ce lieu est donc une parabole ayant pour axe AK, pour sommet le centre du cercle circonscrit au triangle isoscèle de la série des triangles ABC.

L'ordonnée de H étant égale à $\frac{d^2 - x^2}{h}$ et O′ étant au milieu de HO, on a, pour les coordonnées de O′,

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha, \quad y = \tfrac{1}{4}h - \frac{\alpha^2 - d^2}{4h}.$$

Le lieu de ce point a donc pour équation

$$x^2 = -h\left(y - \frac{h^2 + d^2}{4h}\right).$$

L'équation de la hauteur BB′ est

$$y = \frac{\alpha + d}{h}(x - \alpha + d),$$

d'où l'équation de l'enveloppe de cette droite

$$x^2 = 4(hy - dx - d^2), \quad \text{ou} \quad (x + 2d)^2 = 4hy.$$

Cette courbe est encore une parabole.

Solution géométrique par M. S. B. *de Reims.* Soient AA′, BB′, CC′, les trois hauteurs du triangle ABC, H leur point de concours, N le point d'intersection des perpendiculaires élevées en C sur CA, et en B sur BA. Les droites CN, BN enveloppent une même parabole P ayant pour foyer A, pour tangente au sommet la droite BC. La distance BC étant constante, l'enveloppe de BB′ s'obtient en imprimant à la parabole un mouvement de translation dans le sens CB, mesuré par la quantité CB. En déplaçant P de la même quantité en sens inverse, on aura l'enveloppe de CC′.

AN est un diamètre du cercle ABC. Soit Q le point de rencontre de la parabole P avec une parallèle NQ menée à l'axe AA′; je dis que NQ est constant. En effet, désignons par I le point où NQ coupe BC; l'équation de la parabole P donne $\overline{A'I}^2 = 4AA'.QI$, ou $\overline{A'M}^2 = AA'.QI$, M étant le milieu commun de BC et A′I. D'autre part, IN = HA′, et $A'B.A'C = \overline{A'M}^2 - \frac{1}{4}\overline{BC}^2 = A'A.A'H$; éliminant $\overline{A'M}^2$, on trouve $\frac{1}{4}\overline{BC}^2 = AA'.NQ$. Donc NQ est constant, et le lieu de N est la parabole P trans-

portée, dans le sens AA', d'une quantité égale à $BC^2 : 4AA'$. Le centre O du cercle ABC décrit une courbe homothétique au lieu de N.

Soient O' le centre du cercle des neuf points de ABC, G le centre de gravité. G décrit une droite ZZ' parallèle à BC. Si l'on prend pour axes AA' et LL', l'ordonnée de O' est la moitié de celle de O, et l'abscisse de O' est la moitié de celle de O, changée de signe. On conclut de là que O' décrit également une parabole.

M. Dépres a traité également, par le calcul, la question analogue sur la sphère.

×Question 646.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 104.)

Neuf nombres entiers consécutifs sont disposés en carré de la manière suivante :

$$\begin{vmatrix} n-4 & n+2 & n-2 \\ n-1 & n & n+4 \\ n+3 & n-3 & n+1 \end{vmatrix}.$$

Le centre est occupé par le nombre du milieu ; les autres nombres se succèdent, d'après la loi du cavalier, dans l'ordre de grandeur croissante.

Choisir n de manière que la valeur de ce déterminant du cavalier soit un carré parfait. (de Rocquigny.)

Solution par MM. Brocard, P. Decamps, Mandart, Denys, de Bőzóky, Brandza *et* Critesco (de Bucharest). Retranchant la seconde de la troisième, puis la première de la seconde; enfin ajoutant la première ligne aux deux suivantes, on obtient successivement

$$\begin{vmatrix} n-4 & -6 & 4 \\ n-1 & -1 & -4 \\ n+3 & 6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-4 & -6 & 4 \\ 2n-5 & -7 & 0 \\ 2n-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4.7\,(2n-1)$$

Par conséquent, on fera

$$(2n-1) = 7\,(2u+1)^2, \quad n = 14u^2 + 14u + 4.$$

×Question 648.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 128.)

Résoudre le système

$$a\sqrt{(x-y+z)(x+y-z)} = x\sqrt{yz}, \tag{1}$$

$$b\sqrt{(x+y-z)(-x+y+z)} = y\sqrt{xz}, \tag{2}$$

$$c\sqrt{(-x+y+z)(x-y+z)} = z\sqrt{xy}. \tag{3}$$

(*Wiskundige Opgaven.*)

Solution par MM. Brocard, de Bőzóky, Lalisse, Déprez, Denys, Brandza, Cristesco, Mandart *et* P. Decamps. Divisant le produit des trois équations (1), (2), (3), successivement par le carré de chacune d'elles, on obtient le système

$$-x+y+z = \frac{a}{bc}yz, \tag{4}$$

$$x-y+z = \frac{b}{ca}zx, \tag{5}$$

$$x+y-z = \frac{c}{ab}xy. \tag{6}$$

Additionnons les équations (4), (5), (6), deux à deux; il vient

$$x(b^2z+c^2y-2abc) = 0,$$
$$y(c^2x+a^2z-2abc) = 0,$$
$$z(a^2y+b^2x-2abc) = 0.$$

D'où l'on conclut les solutions

$$\begin{cases} x=0, \\ y=z; \end{cases} \quad \begin{cases} y=0, \\ z=x; \end{cases} \quad \begin{cases} z=0, \\ x=y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{bc}(-a^2+b^2+c^2), \\ y = \dfrac{b}{ca}(a^2-b^2+c^2), \\ z = \dfrac{c}{ab}(a^2+b^2-c^2). \end{cases} \tag{7}$$

Remarque. Si a, b, c sont les côtés d'un triangle ABC, x, y, z sont les doubles des côtés du triangle orthique de ABC; car la formule (7), par exemple, donne $x = 2a\cos A$. (Déprez.)

×Question 649.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 128.)

On projette un triangle ABC ***sur tous les plans passant par une même droite*** Δ ***du plan*** ABC. ***Démontrer que les angles*** A′, B′, C′ ***de l'une quelconque de ces projections vérifient une relation de la forme***

$$\alpha \cot A' + \beta \cot B' + \gamma \cot C' = 0,$$

α, β, γ étant des constantes. (J. Neuberg.)

Solution par M. Déprez. Menons les droites AA_1, BB_1, CC_1 perpendiculaires à Δ, et prenons sur ces lignes les segments

$$A_1A' = K.A_1A, \quad B_1B' = K.B_1B, \quad C_1C' = K.C_1C,$$

K étant un facteur quelconque : A′B′C′ est le rabattement sur le plan ABC, de l'une des projections considérées du triangle ABC. On trouve facilement

$$a^2 = \overline{B_1C_1}^2 + (BB_1 - CC_1)^2, \quad a'^2 = \overline{B_1C_1}^2 + (B'B_1 - C'C_1)^2,$$

d'où

$$a^2 - a'^2 = (1 - K^2)(BB_1 - CC_1)^2, \; b^2 - b'^2 = (1 - K^2)(CC_1 - AA_1)^2,$$
$$c^2 - c'^2 = (1 - K^2)(AA_1 - BB_1)^2.$$

Faisons la somme de ces égalités après les avoir multipliées respectivement par trois facteurs m, n, p satisfaisant aux équations

$$ma^2 + nb^2 + pc^2 = 0,$$
$$m(BB_1 - CC_1)^2 + n(CC_1 - AA_1)^2 + p(AA_1 - BB_1)^2 = 0;$$

nous aurons

$$ma'^2 + nb'^2 + pc'^2 = 0. \qquad (1)$$

Or

$$a'^2 = 2S'(\cot B' + \cot C'), \quad \text{etc.};$$

en substituant ces valeurs dans (1), on trouve la relation proposée.

Note. Autre solution par M. P. Decamps. De l'égalité (1), on conclut aisément le théorème suivant : ***Si sur une base fixe, et dans un même plan on construit des triangles semblables aux projections d'un triangle fixe*** ABC ***sur les différents plans passant par une même droite du plan*** ABC, ***les sommets se trouvent sur une circonférence dont le centre appartient à la base fixe.*** (J. N.)

Question 660.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 207.)

En un point quelconque M *d'un quadrant de cercle* AB, *on mène une tangente rencontrant le rayon* OA *en* N. *On élève sur* OA *la perpendiculaire* NT = NM, *et l'on joint* AT, MT. *Démontrer* 1° *que* MT *passe par un point fixe;* 2° *que le lieu de* T *est une hyperbole équilatère* (théorème connu); 3° *que le point d'intersection des droites* MN, AT *se meut sur une hyperbole.* (DE ROCQUIGNY.)

Solution par MM. BROCARD, KEELHOFF, DECAMP, JEŘÁBEK, LAURENS, KLOMPERS, RUSSO, BRANDZA, CRISTESCO, BELLENS *et* DE BÖZÓKY. 1° Les axes étant OA et le rayon perpendiculaire à OA, désignons par x, y les coordonnées de M. Les coordonnées de T seront

$$x_1 = \mathrm{ON} = \frac{r^2}{x}, \quad y_1 = \mathrm{NM} = \sqrt{\frac{r^4}{x^2} - r^2} = \frac{r}{x}\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{ry}{x},$$

d'où l'équation de MT :

$$\mathrm{Y} - y = \frac{y - y_1}{x - x_1}(\mathrm{X} - x), \quad \text{ou} \quad \mathrm{Y} - y = \frac{y}{x + r}(\mathrm{X} - x),$$

ou encore

$$\mathrm{Y} = \frac{y}{x + r}(\mathrm{X} + r).$$

On voit que MT passe par le point fixe $(-r, 0)$.

Autrement. Les triangles isoscèles OAM, NTM ont les côtés OA et NT, OM et MN perpendiculaires; donc ils sont semblables et les bases AM, TM sont également rectangulaires; par suite, MT passe par le point diamétralement opposé à A.

2° La relation $\overline{\mathrm{MN}}^2 = \overline{\mathrm{ON}}^2 - \overline{\mathrm{OM}}^2$ se traduit par la formule

$$y_1^2 = x_1^2 - r^2.$$

Le lieu de T est donc une hyperbole équilatère.

3° Les droites AT, MN ont pour équations

$$\mathrm{Y} = \frac{y}{x + r}(x - r), \quad \mathrm{Y}y + \mathrm{X}x = r^2.$$

Tirant de là les valeurs de x, y pour les substituer dans l'équation $x^2 + y^2 = r^2$, on trouve pour le lieu de T

$$x^2 - 3y^2 = r^2,$$

équation d'une hyperbole dont les asymptotes font l'angle de 30° avec OA.

Remarques. 1° Les droites AT, MT rencontrent OY en des points H, I, tels que

$$r^2 = -3.\mathrm{OH}.\mathrm{OI}. \qquad \text{(Laurens.)}$$

2° Soit T' le symétrique de T par rapport à OA ; la droite MT' passe par A. (Brocard).

3° On sait que l'inverse d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre est une lemniscate de Bernoulli. Si l'on prend le cercle donné O pour cercle d'inversion, que A' soit le symétrique de A par rapport à O, et que P soit la projection de M sur OP, les inverses des droites A'MT et MN sont la circonférence A'OM et celle qui a pour diamètre OP. Donc le point d'intersection de ces deux circonférences décrit une lemniscate. (Klompers.)

---

*Question 661.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 208.)

Soient $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, *les côtés et les médianes d'un triangle quelconque* ABC. *On peut construire un triangle* A'B'C' *dont les côtés sont parallèles et proportionnels aux médianes de* ABC ; *les médianes de* A'B'C' *seront également parallèles et proportionnelles aux côtés de* ABC. *Ces deux triangles, qui ont aussi même angle de Brocard, sont, chacun, le* triangle médian *de l'autre. Ils ne sont pas semblables à moins d'être équilatéraux. Mais* A'B'C' *peut être semblable à* ACB, *de sorte que* $a : b : c = \alpha : \gamma : \beta$; *dans ce cas, nous dirons que* ABC *est un triangle* automédian. *Un tel triangle jouit des propriétés suivantes :*

1° $a^2 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2) = 2bc \cos A$, $2 \cot A = \cot B + \cot C$,

$2 \cos 2A = \cos 2B + \cos 2C$, $\cot^2 B + 4 \cot B \cot C \cot^2 C = 2$.

2° *Désignons par* A_1, B_1, C_1 *les milieux des côtés de* ABC, *par* G, K, O, H *le centre de gravité, le point de Lemoine, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre.*

La circonférence AB_1C_1 *passe par* G ; *les circonférences* AGB, AGC *touchent la* base BC ; *la circonférence* BGC *passe par* H.

3° OK *est perpendiculaire à* AK, GK *est parallèle à* BC (Lemoine, *Mathesis*, t. V, p. 104.)

4° *Soient* R, R_a, R_b, R_c *les rayons des circonférences* ABC, GBC, GCA, GAB ; *on a*

$$R^2 = R_a^2 = R_bR_c, \quad \overline{AK}^2 = \mathrm{BK}.\mathrm{CK}, \quad \overline{2AH}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2.$$

5° *Si* D, D' *sont les pieds des bissectrices de l'angle* A, *l'angle* DGD' *est droit.*

6° *Les projections de* G *sur les côtés de* ABC *sont les sommets d'un triangle isoscèle.*

7° *Lorsque deux sommets d'un triangle automédian sont fixes, le troisième décrit une circonférence.*

GA est l'un des demi-diamètres conjugués égaux de l'ellipse circonscrite à ABC et ayant son centre en G. (J. NEUBERG.)

Solution par MM. JEŘÁBEK (*Brunn*), FRANÇOIS (*La Haye*), DENYS (*Avesnes*), *et* P. DECAMPS (*Pidon*).

1° Prolongeons AA_1 de $A_1G' = GA_1$; les côtés du triangle CGG' sont parallèles et proportionnels aux médianes de ABC. Par hypothèse, CG'G est semblable à ABC; donc l'angle CG'A = CBA et G' est situé sur la circonférence ABC. D'après cela, pour construire un triangle automédian ABC, on mène une corde quelconque AG' d'une circonférence O, et par le point A_1 qui la divise dans le rapport 3 : 1, on trace une corde BC perpendiculaire à OA_1; les triangles BA_1A, $G'A_1C$ sont visiblement semblables, d'où l'on déduit la similitude des triangles BCA, G'GC.

On a $A_1B.A_1C = A_1A.A_1G'$, ou $\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{6}(b^2 + c^2 - 2a^2)$; par suite, $a^2 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2)$.

Comparant cette relation à la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, on trouve

$$a^2 = \tfrac{1}{3}(b^2 + c^2) = 2bc\cos A. \qquad (1)$$

Comme

$$a^2 = 2S(\cot B + \cot C), \ldots$$

on vérifie facilement, au moyen de (1), que

$$\cot A = \tfrac{1}{3}(\cot B + \cot C). \qquad (2)$$

De (1), on tire encore

$$\sin^2 A = \tfrac{1}{3}(\sin^2 B + \sin^2 C) = 2\sin B \sin C \cos A, \qquad (3)$$

d'où, à cause de $2\sin^2 A = 1 + \cos 2A$, $2\sin^2 B = 1 + \cos 2B$, $2\sin^2 C = 1 + \cos 2C$, la formule proposée :

$$\cos 2A = \tfrac{1}{3}(\cos 2B + \cos 2C).$$

La formule (3) donne également

$$\frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \frac{2\cos A}{\sin A}, \quad \text{ou} \quad \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} = 2\cot A;$$

et en développant $\sin(B + C)$, on retombe sur (2).

On a l'identité

$$\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1;$$

si l'on y porte la valeur (2) de cot A, on obtient

$$\cot^2 B + 4 \cot B \cot C + \cot^2 C = 2.$$

2° On a

$$\textit{angle}\ BAC = GCG' = \pi - BGC,$$

par conséquent, la circonférence AB_1C_1 passe par G, et la circonférence BGC passe par H.

De l'égalité des angles ABC, AG'C, BGA_1, on conclut que la circonférence ABG touche BC en B; de même, BC est une tangente à la circonférence AGC.

3° Soient A'_1, K' les points de rencontre de la symédiane AK avec le côté BC et avec la circonférence ABC. On a

$$\frac{KA'_1}{AA'_1} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3} = \frac{GA_1}{AA_1}.$$

Donc GK est parallèle à BC. Les angles BAG', CAK' étant égaux, les arcs BG', CK' sont égaux, et la droite G'K' est parallèle à BC et à GK; par suite,

$$AK = 2KA'_1 = 2A'_1K'.$$

Les lignes OG, OK sont donc perpendiculaires à AG, AK.

Les quatre points A, O, G, K sont donc sur une même circonférence; le cercle de Brocard touche AK en K, et un sommet du deuxième triangle de Brocard coïncide avec K.

4° On a

$$R_b = \frac{b}{2\sin AGC} = \frac{b}{2\sin C}, \quad R_c = \frac{c}{2\sin B},$$

$$R = R_a = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C};$$

d'où

$$R^2 = R_a^2 = R_b R_c.$$

K coïncide avec un sommet du deuxième triangle de Brocard; donc les triangles KAB, HCA sont semblables, et

$$\overline{AK}^2 = BK.CK.$$

La formule (3) donne

$$\cos^2 A = \tfrac{1}{3}(\cos^2 B + \cos^2 C).$$

Or,

$$AH = 2OA_1 = 2R\cos A, \quad \ldots;$$

par suite

$$\overline{AH}^2 = \tfrac{1}{2}(\overline{BH}^2 + \overline{CH}^2).$$

5° De la relation $b : c = \gamma : \beta = CG : BG$, on conclut que le point G appartient au lieu des points dont les distances à B, C sont proportionnelles à c, b; ce lieu est la circonférence qui a pour diamètre DD'.

6° Soient G_a, G_b, G_c les projections de G sur les côtés de ABC. D'après un théorème connu, les côtés du triangle $G_aG_bG_c$ sont perpendiculaires à AK, BK, CK; les angles AKC, BKC étant égaux, les angles $G_aG_bG_c$, $G_aG_cG_b$ le sont également.

7° Si les points B, C sont fixes, α a une longueur constante ($\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{3}\alpha^2$), et le lieu de A est une circonférence décrite de A_1 comme centre, avec un rayon égal à la hauteur du triangle équilatéral, de côté a.

Supposons A, B fixes. De la relation $2a^2 - b^2 = c^2$, on conclut que C décrit une circonférence dont le centre divise AB en deux segments soustractifs, qui sont doubles l'un de l'autre.

Remarques. 1° $\alpha = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, $\beta = \frac{1}{2}c\sqrt{3}$, $\gamma = \frac{1}{2}b\sqrt{3}$.

2° $S = \frac{1}{4}a^2 \operatorname{tg} A$. (Denys.)

3° Les circonférences AKB, AKC touchent, respectivement, les droites AC, AB. (Jeřábek.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

666. Par un point fixe P de l'axe focal d'une ellipse ou d'une hyperbole, on mène une sécante quelconque rencontrant la courbe en M, M'. Démontrer qu'il existe une constante r, telle que le produit $(FM + r)(FM' + r)$ a une valeur constante, F étant l'un des foyers. (Steiner.)

667. Si en un point quelconque A d'une conique, on mène un cercle tangent dont le rayon soit double du rayon de courbure en ce point : 1° le pôle P, par rapport au cercle, de la corde d'intersection BC de la conique et du cercle est sur la conique; 2° les deux droites BC et PA sont conjuguées harmoniques par rapport à la conique. (Cl. Servais.)

×**668.** Soient ABC, A'B'C' deux triangles directement semblables, situés dans un même plan. Quelle que soit leur situation relative, si par un même point O on mène les droites OA'', OB'', OC'' égales et parallèles à AA', BB', CC', le triangle A''B''C'' est semblable aux triangles ABC, A'B'C'. (J. Neuberg.)

ENCORE LA FORMULE D'OZANAM.

I. La formule d'Ozanam (voir pp. 161 et 181) appartient, comme nous l'avons fait remarquer, à la Trigonométrie générale. Elle exprime que le rapport

$$J = \frac{x(2+\cos x)}{\sin x} = \frac{1}{2}x\left(3\cot\frac{1}{2}x + \operatorname{tang}\frac{1}{2}x\right)$$

croît toujours et est toujours très voisin de 172, quand x varie de 0° à 45°.

En voici une démonstration, d'apparence plus simple que la précédente, et même susceptible d'être introduite dans l'enseignement élémentaire.

Soit $y = x + h$, h étant positif. Considérons la différence

$$A = \frac{y(2+\cos y)}{\sin y} - \frac{x(2+\cos x)}{\sin x}$$
$$= \frac{(2y\sin x - 2x\sin y) + (y\sin x\cos y - x\sin y\cos x)}{\sin x\sin y}.$$

Le premier terme du numérateur peut s'écrire successivement :

$$2y\sin x - 2x\sin y = 2(x+h)\sin x - 2x\sin(x+h)$$
$$= 2h\sin x - 2x[\sin(x+h) - \sin x] = 2h\sin x - 4x\sin\tfrac{1}{2}h\cos(x+\tfrac{1}{2}h)$$
$$= h\left[2\sin x - 2x\cos(x+\tfrac{1}{2}h)\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\right].$$

Le second terme du numérateur donne lieu à des transformations analogues. On a

$$y\sin x\cos y - x\sin y\cos x = (x+h)\sin x\cos y - x\sin y\cos x$$
$$= h\sin x\cos y - x\sin(y-x) = h\sin x\cos(x+h) - x\sin h$$
$$= h\sin x\cos x + h\sin x[\cos(x+h) - \cos x] - x\sin h$$
$$= h\sin x\cos x - 2h\sin x\sin\tfrac{1}{2}h\sin(x+\tfrac{1}{2}h) - x\sin h$$
$$= h\left[\sin x\cos x - x\frac{\sin h}{h} - 2\sin x\sin(x+\tfrac{1}{2}h)\sin\tfrac{1}{2}h\right].$$

Par suite,

$$A = \frac{h}{\sin x\sin y}B,$$

si l'on pose

$$B = 2\sin x - 2x\cos\left(x + \tfrac{1}{2}h\right)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}$$
$$+ \sin x\cos x - x\frac{\sin h}{h} - 2\sin x\sin\left(x + \tfrac{1}{2}h\right)\sin\tfrac{1}{2}h.$$

Remplaçons, dans les termes négatifs du second membre, les quantités

$$\cos\left(x + \tfrac{1}{2}h\right),\quad \sin\tfrac{1}{2}h,\quad \sin h,\quad \sin x,\quad \sin\left(x + \tfrac{1}{2}h\right),$$

respectivement par les quantités plus grandes ($x + h$ est supposé inférieur à un angle droit)

$$\cos x,\quad \tfrac{1}{2}h,\quad h,\quad 1,\quad 1.$$

Il viendra

$$B > 2\sin x - 2x\cos x + \sin x\cos x - x - h,$$

ou

$$B > C - h,$$

si l'on fait, pour abréger,

$$C = \sin x\,(2 + \cos x) - x\,(2\cos x + 1)$$
$$= \sin x\,(3 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}x) - x\,(3 - 4\sin^2\tfrac{1}{2}x).$$

On sait que l'on a, pour les angles positifs x et $\frac{1}{2}x$, non supérieurs à un angle droit,

$$x > \sin x > x - \frac{x^3}{6},\quad \frac{x}{2} > \sin\frac{x}{2} > \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}.$$

Dans les termes positifs de C, remplaçons $\sin x$ et $\sin\frac{1}{2}x$ respectivement par les quantités plus petites

$$x - \frac{x^3}{6},\quad \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48};$$

dans les termes négatifs, remplaçons $\sin\frac{1}{2}x$ par la quantité plus grande $\frac{1}{2}x$. Il viendra

$$C > \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(3 - 2\frac{x^2}{4}\right) - x\left[3 - 4\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}\right)^2\right],$$

c'est-à-dire, tout calcul fait,

$$C > \frac{x^{10}}{456}.$$

La quantité C est donc positive. Si nous prenons h égal ou inférieur à C, ce qui dépend de nous, il en est de même de $B = C - h$ et de A.

L'expression J est donc croissante avec x, et la formule d'Ozanam est établie d'une manière élémentaire.

II. Nous reproduisons ici le tableau de la page 162, en y introduisant de nombreuses corrections. Nous rappelons que

$$B_1 = 172\frac{b}{2a+c}$$

désigne la valeur approchée du plus petit angle aigu B, du triangle rectangle ayant pour côtés a, b, c, a étant l'hypoténuse.

On pourra juger de l'approximation sur les exemples suivants où B_1 désigne la valeur de B calculée par la formule d'Ozanam :

b	c	a	sin B	B_1	B	
1	1	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	44,92	45	
3	4	5	0,6	36,856	36,87...	
161	240	289	0,5571	33,85	33,85...	
1	$\sqrt{3}$	2	0,50	30,0067	30	
8	15	17	0,470	28,08	28,07	
1	$\sqrt{15}$	4	0,25	14,487	14,478	
1	$\sqrt{63}$	8	0,125	7,19	7,18	
1	$\sqrt{80}$	9	0,111	6,384	6,379	
1	$\sqrt{143}$	12	0,08333...	4,783	4,780	(P. M.)

SUR LA RÉVERSIBILITÉ DE LA TRANSFORMATION LINÉAIRE;

par M. Cl. Servais, répétiteur à l'Université de Gand.

Nous avons démontré (*Mathesis*, t. VII, pp. 90-91) que dans le plan, la seule transformation linéaire réversible est la transformation homologique harmonique. Dans l'espace, il n'y a que deux sortes de systèmes involutifs, les systèmes *perspectifs involutifs* et les systèmes *involutifs gauches*. En effet, soient deux points correspondants P et P'; la droite PP' se correspond à elle-même, et les couples de points P, P' décrivent sur cette droite une involution. Le lieu du point central de cette involution pour toutes les droites analogues à PP' est un plan Σ_1; car les points à l'infini dans l'espace peuvent être considérés comme étant situés dans un même plan. Le lieu des points doubles est tel que, sur une droite, il n'y a que deux points de ce lieu, et que leur distance est divisée en deux parties égales par le plan Σ_1; donc ce lieu peut se composer 1° de deux plans parallèles; 2° d'un point S et d'un plan Σ; 3° de deux droites u et v parallèles au plan Σ_1.

Le premier cas est impossible; car, sur une droite quelconque, il y aurait deux points doubles; elle serait sa propre correspondante et, par suite, deux points correspondants seraient constamment coïncidents.

Dans le second cas, les droites analogues à PP′ passent par un point fixe S; si p est le point d'intersection du plan Σ avec PP′, on a $(Sp\mathrm{PP}') = -1$. Le système s'appelle alors *système perspectif involutif*.

Dans le troisième cas, la droite PP′ rencontre deux axes fixes u et v en deux points U et V tels que $(\mathrm{PP}'\mathrm{UV}) = -1$. Le système involutif est dit alors *système involutif gauche*.

NOTES D'ALGÈBRE.

I. *Détermination du degré de multiplicité des racines d'une équation, lorsqu'elles sont séparées* (par M. A. Demoulin, ancien élève de l'école normale des sciences). Soit $Fx = 0$ l'équation proposée. On sait qu'entre x_0 et X il n'y a qu'une racine de $Fx = 0$, et l'on se propose de déterminer le degré de multiplicité de cette racine.

A cet effet, cherchons le p. g. c. d. F_1x de Fx et de $F'x$, puis calculons la suite de Sturm relative à F_1x. Cherchons, en général, le p. g. c. d. F_ix de Fx et de $F^{(i)}x$, s'il est nécessaire et déterminons la suite de Sturm relative à F_ix.

Cela posé, comme $F_1x = 0$ ne renferme que les racines communes à $Fx = 0$ et $F'x = 0$, $F_1x = 0$ aura entre x_0 et X, une racine ou 0 racine. On déterminera lequel de ces deux cas convient, au moyen de la suite de Sturm relative à F_1x. Si, entre x_0 et X, il n'y a pas de racine de $F_1x = 0$, la racine est simple, car si elle était au moins double, il y aurait une racine de $F_1x = 0$, entre x_0 et X. Si, entre x_0 et X, il y a une racine de $F_1x = 0$, la racine de $Fx = 0$ est au moins double, car si elle était simple $F_1x = 0$ ne la renfermerait pas. En général, appelons α_i la différence des nombres de variations que présente la suite de Sturm relative à F_ix quand on remplace x par x_0 et X.

On a supposé, dans le second cas ci-dessus, $\alpha_1 = 1$, la racine est double au moins. Si $\alpha_2 = 0$, la racine est double; car si elle était triple on aurait $\alpha_2 = 1$. Si $\alpha_2 = 1$, la racine est triple au moins; car si elle était double on aurait $\alpha_2 = 0$. Si $\alpha_3 = 0$ la racine est triple; car si elle était quadruple, on aurait $\alpha_3 = 1$; si $\alpha_3 = 1$, la racine est quadruple au moins, etc.

En général, si $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_i = 1$ et $\alpha_{i+1} = 0$, la racine est de degré $i+1$ au moins; car si elle était de degré i seulement, comme on a $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{i-1} = 1$, on aurait $\alpha_i = 0$. D'ailleurs, puisque $\alpha_{i+1} = 0$, la racine est de degré $i+1$.

Remarques. 1° Ce procédé ne repose que sur le théorème de Sturm et non sur la théorie complète des racines égales.

2° Il peut être plus simple que le procédé qui s'appuie sur la théorie des racines égales, quand il s'agit de déterminer le degré de multiplicité d'un certain nombre seulement de racines séparées, au moyen du théorème de Sturm.

II. *Une propriété de la limite supérieure des racines* (par M. A. Demoulin). Si L est une quantité positive plus grande que les modules des racines de l'équation

$$x^m + P_1 x^{m-1} + \cdots + P_m = 0,$$

on a l'inégalité

$$L + 1 > \sqrt[m]{1 + \operatorname{mod} P_1 + \operatorname{mod} P_2 + \operatorname{mod} P_3 + \cdots + \operatorname{mod} P_m}.$$

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ les racines de cette équation. On a

$$\operatorname{mod} P_1 = \operatorname{mod} (\alpha + \beta + \cdots + \lambda) < m L,$$

$$\operatorname{mod} P_2 = \operatorname{mod} (\alpha\beta + \cdots + \varkappa\lambda) < \frac{m(m-1)}{1.2} L^2,$$

. . . . . .

$$\operatorname{mod} P_i = \operatorname{mod} (\alpha\beta \ldots \theta + \text{etc.}) < \frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots i} L^i,$$

. . . . . :

$$\operatorname{mod} P_m = \operatorname{mod} \alpha\beta\gamma \ldots \lambda < L^m.$$

Additionnant, on trouve

$$1 + \operatorname{mod} P_1 + \operatorname{mod} P_2 + \cdots + \operatorname{mod} P_m < (L+1)^m.$$

III. *Note sur les limites des racines d'une équation* (par A. Gob, ancien élève de l'École Normale des Sciences). Théorème I. *Dans l'équation*

$$x^m + Ax^{m-1} + \cdots - Px^{m-p} \cdots - Nx^{m-n} \cdots - Rx^{m-r} + \text{etc.} = 0$$

où $-Px^{m-p}$ *est le premier terme négatif,* $-N$ *le coefficient négatif le plus grand en valeur absolue, et* $-Rx^{m-r}$ *le dernier terme négatif,*

$$L = r \sqrt[r]{\frac{N}{p^p (r-p)^{r-p}}}$$

est une limite supérieure des racines, pourvu que l'on ait $p > (r-p)\sqrt[p]{N}$.

Posons dans l'équation donnée $x = \frac{y}{k}$, $k > 1$. Elle devient

$$f(y) = y^m + Aky^{m-1} + \cdots - Pk^p y^{m-p} \cdots - Nk^n y^{m-n} \cdots - Rk^r y^{m-r} + \text{etc.} = 0.$$

Dans cette équation, remplaçons, dans les coefficients négatifs, les puissances de k par k^r. Le second membre sera alors plus petit que $f(y)$, pour toute valeur positive de y, puisque $k > 1$, et $\sqrt[p]{Nk^r} + 1$ est, d'après une règle connue, une limite supérieure des racines de la nouvelle équation et aussi de $f(y) = 0$. Par suite, $\frac{\sqrt[p]{Nk^r} + 1}{k}$ est une limite pour l'équation donnée. Donnons à k la valeur qui rend cette expression minima. Cette valeur minima de k est donnée par la relation :

$$\frac{r-p}{p} \sqrt[p]{Nk^r} = 1.$$

Portant la valeur de k tirée de cette relation dans la valeur trouvée, elle devient

$$r \sqrt[r]{\frac{N}{p^p (r-p)^{r-p}}}.$$

Pour que le raisonnement précédent soit applicable, il suffit que k ou k^r soit > 1, c'est-à-dire :

$$\frac{r-p}{p} \sqrt[p]{N} < 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. La limite que nous venons de trouver n'a évidemment aucune importance au point de vue pratique. On peut observer cependant qu'elle est toujours inférieure à la limite $\sqrt[p]{N} + 1$ attribuée à Lagrange.

Théorème II. *S'il n'y a qu'un terme négatif*, $-Px^{m-p}$, *dans l'équation*, $\sqrt[p]{P}$ *est une limite supérieure des racines positives.*

En effet, posons encore $x = (y : k)$, k étant quelconque. Alors, $\sqrt[p]{Pk^p} + 1$ est une limite des valeurs de y et $\sqrt[p]{P} + k^{-1}$ de celles de x. Comme k est aussi grand qu'on le veut, on voit que la quantité $\sqrt[p]{P}$ est égale ou supérieure à la plus grande racine. On arrive d'ailleurs directement à la même conclusion en mettant l'équation donnée sous la forme

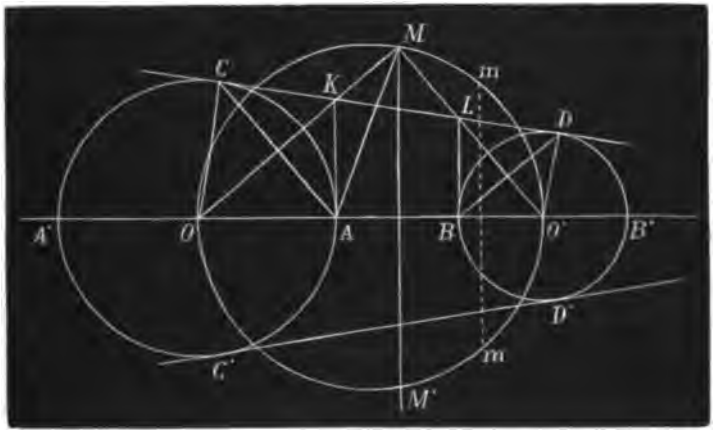
$$x^{m-p}(x^p - P) + \text{etc.} = 0.$$

SUR LES TANGENTES COMMUNES A DEUX CIRCONFÉRENCES;

par M. C. Brandza, de Bucharest.

Soient O, O′ deux circonférences; C, D les points de contact d'une tangente commune extérieure; A, A′ et B, B′ les extrémités des diamètres dirigés suivant la ligne des centres O, O′.

Les angles DCA, DBB′ étant les moitiés des angles égaux COA, DO′B′ sont égaux; donc les points C, A, B, D sont sur une même circonférence. Les droites CA, BD sont perpendiculaires; car les angles DCA, CDB sont les moitiés des angles supplémentaires COA, DO′B. Il résulte de là que le centre M de la circonférence CABD est à l'intersection de la perpendiculaire élevée au milieu de AB, avec la circonférence décrite sur



OO′ comme diamètre. En effet, les perpendiculaires élevées aux milieux de CA, BD passent par les centres O, O′ des circonférences données et forment entre elles un angle droit. D'où la solution suivante : chercher l'intersection M de la circonférence de diamètre OO′, avec la perpendiculaire élevée au milieu de AB; de ce point comme centre, avec le rayon MA, décrire une circonférence, rencontrant les circonférences O, O′ aux points C, D; la droite CD est une tangente commune.

La seconde tangente commune extérieure C′D′ s'obtient en décrivant une circonférence de centre M′ et de rayon M′A, M′ étant le symétrique de M par rapport à OO′.

Pour trouver une tangente commune intérieure, on cherche les intersections m, m' de la circonférence OMO′ avec la perpendiculaire élevée au milieu de AB′; et, de l'un de ces points comme centre, on décrit une circonférence passant par A et B′; cette ligne coupe les circonférences proposées aux points de contact d'une tangente commune intérieure.

Pour que les tangentes communes existent, il faut que le milieu de AB ou celui de AB′ tombe entre O et O′.

Remarque. Les droites OM, O′M passent par les points de rencontre de CD avec les tangentes menées en A et B.

BIBLIOGRAPHIE.

Abriss einer Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen und der Thetafunctionen von J. Thomae, in Jena. Dritte erheblich vermehrte Auflage. Halle a/S, Louis Nebert, 1890. Un volume in-4° de VIII-144 pages (avec figures dans la texte et une planche lithographiée). Prix : Dix marcs.

Le livre de M. Thomae est, au point de vue de la rigueur de l'exposition, l'un des meilleurs ouvrages qui aient été publiés, en Allemagne, sur la théorie des fonctions d'une variable imaginaire et sur celle des fonctions thêta. La première édition a paru en 1870, la seconde en 1873 : elle contenait de moins que la première une étude sur les séries de Fourier déduites du théorème de Taylor, mais elle renfermait, en revanche, des notions plus étendues sur les intégrales et les fonctions elliptiques et une étude approfondie sur les discontinuités possibles des fonctions d'une ou de deux variables. Dans la nouvelle édition, ce dernier sujet n'est plus traité, parce qu'on peut trouver dans les bons manuels d'analyse élémentaire les notions fondamentales y relatives; mais l'auteur a exposé plus complètement les propriétés des fonctions doublement périodiques et des intégrales elliptiques. Dans la théorie générale des fonctions, M. Thomae a recours à la méthode de représentation graphique au moyen des surfaces de Riemann. Dans la théorie des fonctions elliptiques, il emploie les notations traditionnelles de Jacobi, sous une forme abrégée nouvelle (*sa*, *ca*, *da*, au lieu de *sn*, *cn*, *dn* de Gudermann); il fait aussi connaître les fonctions de Weierstrass.

Le *Résumé* de M. Thomae se distingue, dit-il, des ouvrages plus étendus de Briot et Bouquet, Königsberger, Enneper, Halphen, etc., non seulement par la brièveté de l'exposition, mais aussi, en bien des endroits, par les procédés de démonstration. Il ne contient pas d'ailleurs la théorie générale de la transformation. (P. M.)

Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale, von O. Beau. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Halle a/S, Louis Nebert, 1885. Un volume in-4° de VIII-101 pages. Prix : 5 ½ marcs.

Le sujet de ce mémoire étendu est trop spécial pour que nous puissions le faire connaître dans ce recueil. Nous nous contenterons donc de donner les titres des

cinq chapitres qui le composent. 1 et 4. Expressions nouvelles des coefficients des séries trigonométriques. 2 et 5. Démonstrations des formules de Fourier et de formules relatives à des intégrales analogues. 3. Sommation de séries au moyen des intégrales de Fourier. Comme le remarque l'auteur, l'idée qui lui sert de point de départ a déjà été utilisée par KRONECKER : Les coefficients des séries fx, φx qui ont pour termes généraux $a_n \cos nx$, $b_n \sin nx$, peuvent être exprimés par les formules :

$$\pi a_n = \int_0^\infty 4fx \cos(n+\alpha)x \sin \beta x \frac{dx}{x}, \quad \pi b_n = \int_0^\infty 4\varphi x \sin(n+\alpha)x \sin \beta x \frac{dx}{x},$$

où $(\beta \pm \alpha)$ est compris entre zéro et l'unité. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 26.

(Voir *Mathesis*, t. I, p. 48.)

Intégrer l'équation différentielle

$$48x(1-x)y'' + (32-56x)y' + y = 0. \qquad \text{(SCHWARZ.)}$$

Solution par M. FAUQUEMBERGUE. Cette équation est un cas particulier de la suivante :

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0.$$

Euler a remarqué qu'elle était vérifiée par l'intégrale

$$y = \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha}\,du.$$

La fonction y représente d'ailleurs, à un facteur constant près, la série hypergéométrique

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

L'équation de Schwarz a été intégrée en 1881, dans le *Quarterly Journal* (t. XVII, pp. 293-301), par M. Cockle, qui a donné pour solution générale

$$y = \sqrt{C_1(1-\alpha x^{\frac{1}{3}})} + \sqrt{C_2(1-\alpha^2 x^{\frac{1}{3}})} + \sqrt{C_3(1-x^{\frac{1}{3}})},$$

(*) Nous avons oublié de signaler, antérieurement, de bonnes solutions des questions suivantes : 630 par M. Lalisse, 642 et 651 par M. Verniory (avec des conséquences, quand $\lambda = \alpha + \beta\sqrt{-1}$), 660 par MM. Choisis et Déprez, 661 par M. Déprez (avec de nombreuses remarques).

C_1, C_2, C_3 désignant trois constantes liées entre elles par la relation

$$C_3^4 + \alpha^2 C_1^4 + \alpha C_2^4 = 0,$$

où α est une racine cubique imaginaire de l'unité.

Ce résultat avait été indiqué par M. Cayley (*Ibid.*, 1879, XVI, pp. 268-270).

Note. Solution analogue de M. W. Mantel. M. H. Schwarz, dans le *Journal de Crelle* (1873, t. LXXV, pp. 292-335) a étudié tous les cas où la série hypergéométrique se réduit à une fonction algébrique de son quatrième élément. Ce mémoire de M. H. Schwarz a été le point de départ de maintes recherches analogues dont ce n'est pas le lieu de parler ici.

Question 294.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 248.)

Démontrer que l'expression

$$\frac{n}{p-1} - \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^p + \left(\frac{n}{n+2}\right)^p + \left(\frac{n}{n+3}\right)^p + \cdots\right]$$

tend vers $-\frac{1}{2}$, *lorsque* n *augmente indéfiniment.* (E. Cesàro.)

Solution par M. W. Mantel. L'application de la formule

$$\frac{1}{m^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-mx} x^{p-1}\, dx$$

donne pour la somme de la série entre crochets

$$\frac{n^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{e^{-nx} x^{p-1} dx}{1 - e^{-x}} = \frac{n^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-nx} x^{p-1} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{B_1 x}{1.2} - \frac{B_2 x^3}{1.2.3.4} + \cdots\right] dx.$$

Si l'on pose $nx = y$, l'expression proposée se réduit à

$$\frac{n}{p-1} - \frac{n}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-y} y^{p-2} dy - \frac{1}{2\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-y} y^{p-1} dy$$

$$- \frac{1}{n\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-y} y^p \left[\frac{B_1}{1.2} - \frac{B_2 y^2}{1.2.3.4.n^2} + \cdots\right] dy \text{ (*)}$$

(*) On pourrait, au besoin, employer un développement limité pour la fonction $1 : (1 - e^{-x})$.

ou

$$-\frac{1}{2}-\frac{B_1}{2\pi\Gamma(p)}\int_0^\infty e^{-y}y^p\theta dy, \quad 0<\theta<1.$$

La valeur de l'expression proposée tend donc vers $-\frac{1}{2}$.

Question 593.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 264.)

Soient, dans le plan du triangle ABC, M *et* N *deux points tels que les projections de* M *sur les droites* AN, BN, CN *soient les sommets d'un triangle d'aire donnée* K^2. *Démontrer que* 1° *le point* N *étant fixe, le lieu de* M *est une circonférence;* 2° *le point* M *étant fixe, le point* N *décrit une sextique.* (J. Neuberg.)

Solutions par MM. Emmerich, Molenbroek, Mineur, Meurice, Déprez, Vereecke. 1° La circonférence décrite sur MN comme diamètre passe par A', B', C'. Les angles et l'aire du triangle A'B'C' étant constants, le lieu de M est une circonférence de centre N.

2° La condition qui détermine le lieu est

$$\overline{MN}^2 \sin BNC \sin CNA \sin ANB = 2K^2. \qquad (1)$$

Or,

$$\text{aire } BNC = \tfrac{1}{2} NB.NC \sin BNC, \text{ etc.}$$

Donc, au lieu de (1), on peut écrire

$$4\overline{MN}^2 \times \text{aire } BNC \times \text{aire } CNA \times \text{aire } ANB = K^2.\overline{NA}^2.\overline{NB}^2.\overline{NC}^2.$$

Rapportant la figure à deux axes rectangulaires menés par M, et désignant par (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x, y) les coordonnées des points A, B, C, N, on trouve pour l'équation du lieu

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\pm 2K^2\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}\{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\}\{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2\}.$$

Les deux signes placés devant le deuxième membre correspondent aux deux orientations différentes du triangle A'B'C'.

Question 633.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 279.)

Dans tout triangle ABC

$$c^n - nabc^{n-2}\cos(A-B) + \frac{n(n-3)}{1.2}a^2b^2c^{n-4}\cos 2(A-B) - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}a^3b^3c^{n-6}\cos 3(A-B) + \cdots = a^n\cos nB + b^n\cos nA. \qquad \text{(Brill.)}$$

Solution par M. I. Beyens (*Cadix*). Des relations

$$a\cos B + b\cos A = c, \quad a\sin B - b\sin A = 0,$$

on déduit ($i = \sqrt{-1}$)

$$a(\cos B \pm i\sin B) + b(\cos A \mp i\sin A) = c,$$

ou

$$ae^{Bi} + be^{-Ai} = c, \quad ae^{-Bi} + be^{Ai} = c.$$

Donc ae^{Bi} et be^{-Ai} sont racines de l'équation

$$x^2 - cx + abe^{-i(A-B)} = 0; \qquad (1)$$

ae^{-Bi} et be^{Ai} sont racines de

$$x^2 - cx + abe^{-i(A+B)} = 0. \qquad (2)$$

On sait (Todhunter, *Théorie des Équations*) que la somme des n^{es} puissances des racines de l'équation $x^2 - px + q = 0$ est égale à

$$p^n - np^{n-2}q + \frac{n(n-3)}{1.2}p^{n-4}q^2 - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}p^{n-6}q^3 + \cdot$$

Appliquons ce résultat successivement aux deux équations (1) et (2), et additionnons les égalités ainsi obtenues; nous aurons

$$a^n(e^{nBi} + e^{-nBi}) + b^n(e^{nAi} + e^{-nAi}) =$$
$$2c^n - nabc^{n-2}[e^{-(A-B)i} + e^{(A-B)i}] + \frac{n(n-3)}{1.2}a^2b^2c^{n-4}[e^{-2(A-B)i} + e^{2(A-B)i}] + \cdots$$

Repassant des exponentielles aux lignes trigonométriques, on trouve la relation proposée.

ˣQuestion 644.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 104.)

La perpendiculaire élevée au milieu du côté BC *d'un triangle rencontre les deux autres côtés* AB, AC *en des points* B′ *et* C′ *tels que les segments* BB′ *et* CC′ *sont vus de tout point de la circonférence* ABC *sous des angles égaux ou supplémentaires.*

Autrement dit, *si* B′, C′ *sont deux points divisant un diamètre d'une circonférence en parties harmoniques, et si* BC *est une corde quelconque perpendiculaire à ce diamètre, les droites* BB′, CC′ *sont vues de tout point de la circonférence sous des angles égaux ou supplémentaires.* (Stammer.)

Solution géométrique par MM. Russo, Klompers, Lalisse, Denys, Verbessem, Mandart, Déprez, Critesco *et* Brandza (Bucharest). Soit A′ le symétrique de A par rapport à B′C′; il est facile de voir que les droites CB′ et BC′ passent par A′, et que B′ appartient à la polaire de C′, de sorte que le second énoncé de la question est ramené au premier. Désignons par F, G les extrémités du diamètre de la circonférence ABC dirigé suivant B′C′. On sait que les droites MF, MD sont les bissectrices de l'angle B′MC′. Soient γ, β les points de rencontre de la circonférence ABC avec les droites MB′, MC′. Pour fixer les idées, nous supposons AB $>$ AC, ce qui place B′ entre A et B, C′ en dehors de AC; nous prenons aussi le point M sur l'arc A′B. Il est maintenant facile de voir que la corde $\beta\gamma$ est perpendiculaire à B′C′. De là résulte que les angles BMB′, et CMγ ont des mesures égales, etc.

Solution analytique par MM. de Bőzóky et P. Decamps. Prenons pour axes BC et la perpendiculaire au milieu de BC. Si (α, β), $(a, 0)$, $(-a, 0)$, (x, y) sont les coordonnées de A, B, C et d'un point quelconque M du plan ABC, on a

$$\operatorname{tg} \mathrm{BMB}' = \frac{(a-\alpha)\,xy - (a-\alpha)(x-a)\,y + a\beta\,(x-a)}{(a-\alpha)\,x\,(x-a) + y\,(ay - \alpha y - a\beta)},$$

$$\operatorname{tg} \mathrm{CMC}' = \frac{(a+\alpha)\,xy - (a+\alpha)(x+a)\,y + a\beta\,(x+a)}{(a+\alpha)\,x\,(x+a) + y\,(ay + \alpha y - a\beta)}.$$

En posant tg BMB′ = tg CMC′, on obtient une cubique représentée par l'équation :

$$(\alpha\beta x + a^2 y - \alpha^2 y)(x^2 + y^2) - 2a^2\beta y^2 - a^2\alpha\beta x + a^2\beta^2 y = 0.$$

L'hypothèse tg BMB′ = — tg CMC′ donne

$$x\,[\beta\,(x^2 + y^2) + (a^2 - \alpha^2 - \beta^2)\,y - a\alpha\beta] = 0.$$

Remarques (dues à M. Dépret). 1° M étant un point quelconque de la circonférence, on déduit facilement du théorème de M. Stammer que les circonférences BMB′, CMC′ rencontrent la droite B′C′ au même point M′.

Réciproquement, si la médiatrice de BC coupe AB en B′, AC en C′, et que M′ soit un point quelconque de cette droite, les circonférences BB′M′, CC′M′ se coupent sur la circonférence ABC. La ligne des centres des circonférences BB′M′, CC′M′ enveloppe une parabole.

2° Plus généralement, si P, Q, B, C, B′, C′ sont des points fixes, et que M′ désigne un point quelconque de la droite B′C′, les deux coniques PQBB′M′, PQCC′M′ se coupent en un point variable M de la conique déterminée par P, Q, B, C et le point d'intersection A des droites BB′, CC′.

×Question 650.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 152.)

Trouver pour a et b des valeurs entières telles que

$$\frac{249a^2}{113a+89b}$$

se réduise à un nombre entier. (*Wiskundige Opgaven.*)

Solution par M. V. Jamet. Soit d le plus grand commun diviseur des deux nombres a, b, et soient

$$a = da' \quad b = db'.$$

La fraction proposée se réduit à

$$\frac{249da'^2}{113a'+89b'}.$$

De là deux séries de solutions, suivant que a' est, ou non, divisible par 89.

1° Soit $a' = 89\alpha$. La fraction proposée est égale à

$$\frac{249\times 89d\alpha^2}{113\alpha+b'}.$$

Pour trouver toutes les solutions que le problème comporte dans le cas actuel, on choisira les deux nombres d, α, à volonté; on formera tous les diviseurs de $249\times 89d\alpha^2$; l'excès de chacun d'eux sur 113α sera l'une des valeurs qu'il convient d'attribuer à b' pour que le problème soit entièrement résolu.

2° Si a' n'est pas divisible par 89, on observera qu'aucun des facteurs premiers du nombre

$$113a' + 89b'$$

ne peut diviser a'. Car un facteur qui diviserait ces deux nombres, diviserait aussi $89b'$; mais ce facteur, étant différent du nombre premier 89, diviserait b'; donc a' et b' ne seraient pas premiers entre eux. De là la solution suivante. Après avoir choisi d à volonté, on formera tous les diviseurs du nombre $249d$; soit μ l'un quelconque d'entre eux; toute solution, en nombres entiers, de l'équation

$$113a' + 89b' = \mu$$

est une solution du problème.

Autres solutions, moins complètes, par MM. Brocard, François, Denys, Langebock, Lallesse, P. Decamps.

×Question 656.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 207.)

Résoudre le système

$$2(x-y)^2[(x+y)^2+z^2] = z^4, \tag{1}$$

$$\frac{3x(x+y)-z^2}{3y(x+y)-z^2} = \frac{4y-7}{7-4x}, \tag{2}$$

$$4(x+y)z - z^2 - 16xy = 0, \tag{3}$$

sachant que z est un nombre entier et que x et y sont rationnels.

Solution par MM. H. Brocard, Déprez et Denys. L'équation (3) donne

$$z = 4x, \; z = 4y.$$

La substitution $z = 4x$ transforme l'équation (1) en

$$111x^4 + 32x^3y - 14x^2y^2 - y^4 = 0,$$

qui donne immédiatement

$$y = 3x \quad \text{et} \quad 37x^3 + 23x^2y + 3xy^2 + y^3 = 0,$$

équation qui n'admet plus de racines entières.

Si l'on remplace z par $4x$ et y par $3x$ dans l'équation (2), celle-ci devient

$$-\frac{1}{5} = \frac{12x-7}{7-4x}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1}{2}.$$

On en conclut que

$$x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{3}{2},\quad z=2$$

est un premier système de solutions.

En prenant $z=4y$, ce qui revient à changer x en y, on trouverait, semblablement, $x=3y$ et $y=\frac{1}{3}$. Par conséquent,

$$x=\frac{3}{2},\quad y=\frac{1}{2},\quad z=2$$

est un second système de solutions.

QUESTIONS D'EXAMEN.

422. Trouver sur la circonférence circonscrite au triangle donné ABC un point M dont la droite de Simson soit parallèle à une droite donnée d.

La droite de Simson est perpendiculaire à la droite AM' symétrique de AM par rapport à la bissectrice de l'angle BAC.

423. Trouver les projections d'un tétraèdre régulier, connaissant les projections de la direction d'une arête et les projections du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre (*Bull. scient.* de Lebon, III, p. 325).

424. Le lieu des orthocentres d'un triangle dont la base et l'aire sont constantes est une parabole.

425. L'enveloppe des cercles vus de deux points fixes sous un même angle constant est une hyperbole ayant les points fixes pour foyers.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**669.** Dans un heptagone régulier ABCDEFG, on a

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}.$$

670. 1° Les cercles osculateurs d'une courbe plane ne peuvent rencontrer un même cercle sous un angle constant. 2° Il n'y a pas de courbes dont les sphères osculatrices rencontrent orthogonalement une sphère fixe. 3° Y en a-t-il dont les sphères osculatrices rencontrent une même sphère sous un angle constant? (E. Cesáro.)

TABLE DES MATIÈRES(*).

(Pour les Rectifications, voir pp. 88, 104, 160, 208, 240).

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages

×Divisibilité des nombres 184
×Questions d'arithmologie 214
Sur une équation indéterminée; par M. E. Fauquembergue 241
Sur une question d'arithmétique; par M. E. Catalan 249
×Question 631; solution par M. Bellens 125
×Question 582; solution par MM. Mosnat, Rocchetti, etc. 234
×Question 646; solution par MM. Brocard, Decamps, etc. 257
×Question 650; solution par M. V. Jamet 278

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Sur le problème de la droite inaccessible; par M. E. Gelin 93
×Sur le problème des joueurs; par M. E. Gelin. 110
×La formule d'Ozanam; par MM. H. Brocard et P. Mansion . . . 161, 181, 265
×Théorèmes sur les minimums; par M. E. Gelin 185
Notes d'Algèbre; par MM. Demoulin et Gob. 268
×Question 243; solution par MM. Peirce et P. Mansion 97
×Question 614; solutions par MM. Beyens, Verniory, etc. 100
×Question 625; solution par MM. Beyens, Verniory, etc. 102
×Sur la question 628; par M. E. Gelin 110
×Question 196; solution par M. Neuberg 116

(*) Les articles marqués d'une croix n'exigent, pour être compris, que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Pages.

×Question 281; solution par MM. V. Jamet, P. Mansion, J. Neuberg . . . 119
×Question 617; solution par MM. Emmerich et Déprez 170
Question 505 (1re partie), 508, 509; solutions par M. Durfee, Even, etc. . . 194
×Question 642; solution par M. Déprez. 205
×Question 648; solution par MM. Déprez, Brocard, etc. 258
Question 633; solution par M. Beyens 276
×Question 656; solution par MM. Brocard et Denys. 279

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Géométrie élémentaire récente; par M. J. Casey, traduit par Fr. Falisse . . 5
Problème de la droite inaccessible; par M. E. Gelin 93
Note de géométrie élémentaire; par M. Cl. Thiry 95
Sur les centres de similitude de deux cercles; par M. E. Vigarié. 106
Sur un problème du quatrième livre de géométrie; par M. Edm. Francken. . 109
Le plus court chemin sur la sphère; par M. P. Mansion 112, 212
Note sur le parallélogramme; par M. E. Gelin. 134
Une discussion sur la ligne droite par Monge et Fourier 139
Circonférence par deux points et tangente à une droite 184
Théorèmes de géométrie; par M. H. Van Aubel 188
Propriété fondamentale des courbes parallèles; par M. E. Wasteels. . . . 190
Questions de géométrie. 243
Démonstrations de quelques propriétés métriques du triangle; par M. Lebon 245
Réclamation de priorité; par M. E. Catalan 250
Tangente commune à deux circonférences; par M. Brandza 271
Question 601; solutions par MM. Emmerich, Denys, etc. 84
Question 614; solutions par MM. Beyens, Verniory, etc. 100
Question 616; solution par MM. Beyens, Pisani, etc. 101
Question 618; solution par MM. Pisani, Russo, etc. 124
Question 394; solution par M. Cesáro 142
Question 615; solution par M. Verniory 147
Question 619; solution par MM. François, Pisani, etc. 148
Question 623, 624; solution par MM. Laisant, Schoute, etc. 149
Question 627; solution par MM. Beyens et Déprez 170
Question 629; solution par MM. Beyens, Déprez, etc. 171
Question 599; solution par MM. Déprez et Molenbroeck 200
Question 632; solution par MM. Déprez et Russo 204
Question 561; solution par MM. Déprez, Verniory, etc. 226
Question 565; solution par MM. Droz, Servais, etc.. 229
Question 649; solution par M. Déprez 259
Question 661; solution par MM. François, Decamps, etc. 261
Question 644; solutions par MM. Russo, Decamps, etc. 277

COURBES ET SURFACES DU SECOND ORDRE; GÉOMETRIE PROJECTIVE.

Pages.

Sur une épure de géométrie descriptive; par M. Ph. Breton 73
Sur un problème classique; par MM. Russo et Neuberg 96, 183
Sur les coordonnées tripolaires; par M. Ed. Lucas 129, 173
Sur le cercle de Joachimsthal; par M. de Longchamps 153
Concours d'admission à l'École navale; solution par M. Neuberg 157
Questions de géométrie projective. 187
Sur une projection imaginaire, par M. W. Mantel 217
Reversibilité de la transformation linéaire; par M. Cl. Servais 267
Question 510; solution par M. E. Cesáro 83
Question 611; solutions par MM. Verniory, Pisani, etc. 99
Question 609; solutions par MM. Droz, Molenbroeck 122
Question 558; solution par MM. Déprez et Stuyvaert 164
Question 579; solution par M. E. Lemoine 167
Question 587; solution par M. Meurice. 198
Question 572; solutions par MM. Verniory et Déprez 232
Question 640; solutions par MM. Déprez, Klompers 236
Question 620; solutions par MM. Beyens, S. B., etc. 255
Question 660; solution par MM. Brocard, Bellens, etc. 260

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Lieu des points d'où l'on peut mener à une conique deux normales rectangulaires; par M. Jeřábek 76
Quelques propriétés d'une quartique trinodale; par M. Malet 89
Transformée polaire de la développée d'une conique; par M. de Bőzóky . . 135
Points d'inflexion du développement de la section plane d'un cône; par M. A. Thiré 184
Question 293; solution par M. P. Molenbroeck 82
Question 566; solution par MM. Stuyvaert et Mosnat 98
Question 206; solution par M. J. Neuberg 118
Question 417; solution par M. Brunel. 144
Question 569: solutions par MM. Mandart. Mosnat, etc. 165
Question 490; solution par M. J. Neuberg 192
Question 630; solution par MM. Verniory et Déprez 203
Question 552; solution par M. Déprez 224
Question 583, 584; solution par M. Déprez 253
Question 593; solution par MM Déprez, Mineur, etc. 275

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

	Pages.
Sur le déterminant Wronskien; par M. G. Peano	75, 111
Sur un certain cercle analogue au cercle de courbure; par M. Cl. Servais.	105
Sur le Wronskien; par A. Demoulin	136
Sur le cercle osculateur; par M. Servais.	136
Question de licence; par M. H. Brocard	137
Une nouvelle forme du reste dans la formule de Taylor; par M. Peano	182
Étude intrinsèque de quelques lignes planes; par M. E. Cesáro	209
Sur une équation différentielle; par M. V. Jamet	250
Question 32; solution par M. Pisani	80
Question 455; solution par M. Neuberg	191
Question 621; solution par MM. Lambotte, Mandart, etc.	201
Question 651; solution par M. Servais	236
Question 576; solution par MM. Choisis, Lambotte, etc.	252
Question 26; solution par M. Fauquembergue	273
Question 294; solution par M. Mantel	274

BIBLIOGRAPHIE.

A. Faifofer. Elementi di Algebra (E. Gelin)	77
J. Peano. Arithmetices Principia	78
E. Rouché et Ch. de Comberousse. Éléments de Géométrie	79
E. Lebon. Traité de Géométrie descriptive, I	79
A. Faifofer. Elementi di Geometria (P. M.)	80
J. Casey. Spherical Trigonometry (H. Brocard)	158
A. Rebiere. Mathématiques et mathématiciens (P. M.)	189
E. Gelin. Rekenkunde.	190
G. de Longchamps. Algèbre (P. M.)	219
J. Massau. Intégration graphique	220
J. Carnoy. Géométrie analytique (de l'espace)	223
Thomae. Theorie der Theta-functionen (P. M.).	272
Beau. Trigonometrische Reihen (P. M.)	273

SUPPLÉMENTS.

A. Gob. Notes de géométrie récente. I. Sur la droite et le cercle d'Euler. II. Sur les cercles de Neuberg . . . . . pp. 1-16

B. I. Clasen. Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants. P. Mansion. Rapport sur ce mémoire . . . . . pp. 1-40

QUESTIONS D'EXAMEN.

Pages.

Questions d'examen, 386-389, 390-394, 395-396, 397, 398-406, 407-421, 422-425, pp. 103, 127, 151, 172, 206, 237, 280

Concours d'admission à l'École Polytechnique de Paris 156

Concours d'admission à l'École navale. Solution par M. Neuberg 157

QUESTIONS(*).

	POSÉE T. I (ou IX)	RÉSOL. T. IX, p.
17	30 (71)	
26	48	273
32	62	81
95	206 (71)	
T. II (ou IX)		
119	71	R
120	71	R
160	159	R
162	159	R
195	231 (71)	
196	231	116
T. III (ou IX)		
×203	23	R
206	23	118
×243	118	97
252	143 (71)	
267	175. 192 (71, 88)	
273	192	R
×281	216	119
283	231 (71)	
293	232	82
294	248	274
296	248	R
T. IV (VIII ou IX)		
310	48	R
317	71 (261)	R
×318	71 (262)	R
×333	119 (72)	
×346	143	R
353	159	R
×356	159 (72)	
×357	159 (72)	R
×383	231 (72)	
×384	231 (72)	R
×385	231	R

	POSÉE T. IV (ou IX)	RÉSOL. T. IX, p.
×386	231	R
387, 2e	231 (72)	
390	247	R
391	247	R
×394	247	142
T. V		
402	22	R
411	23	
412	23	
416	46	R
417	46	144
418	47	
429	94	R
436	94	
439	119	R
455	167	191
457	192	R
490	264	192
494	280	R
497	280	
T. VI		
505 (1e ptie)	23	194
508	47	196
509	47	196
510	70	83
×513	71	
517	96	R
519	119	
521	119	R
522	144	R
525	144	R
532	192	
×543	264	R
×548	280	R
×549	280	R

	POSÉE T. VII	RÉSOL. T. IX, p.
552	24	224
558	56, 75	164
×561	76, 87	226
565	104	229
566	104	98
569	126	165
×571	126	
572	126	232
×574	148	
575	148	R
576	169	252
579	170	167
581	207	R
×582	207	234
583	207	253
584	207	254
587	207	198
590	240	R
593	264	275
594	264	
597	280	
598	280	
×599	280	200
T. VIII		
×601	27	84
×605 (2e ptie)	56	
609	80	122
×610	104	R
×611	104	99
613	128	R
×614	128	100
×615	128	147
×616	148	101
×617	148	170
×618	149	124
×619	176	148
620	176	255

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions marquées de la lettre R; elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur les autres questions.

	POSÉE T. VIII	RÉSOL T.IX,p.
621	176	201
622	216	R
×623	216	149
×624	216	149
×625	216	102
×627	240	170
628	240	R
×629	240	171
×630	262	203
×631	262	125
×632	279	204
633	279	276
×634	279	
×635	279	
636	280	R
×637	280	R
638	260	R

	POSÉE T. VIII	RÉSOL. T.IX,p.
639	280	R
×640	280	236
	T. IX	
641	88	R
×642	88	205, 237
643	88	R
×644	104	277
×645	104	R
×646	104	257
647	128	R
×648	128	258
×649	128	259
×650	152	278
651	152	236
652	152	R
×653	172	R

	POSÉE T. IX	RÉSOL. T. IX,p.
×654	172	R
655	172	
656	207	279
×657	207	R
×658	207	R
×659	207	
660	207	260
×661	208	261
662	240	R
663	240	R
×664	240	R
665	240	R
666	264	R
667	264	R
×668	264	
×669	280	
670	280	

TABLE DES NOMS.

Abel, 160.
Amiot, 78.
André (D.), 216, 249.
Apollonius, 174.
Archimède, 139.
Artzt, 29, 102.
Baltzer, 112.
Barbarin, 171.
Barbelenet, 256.
Beau, 273.
Bellens, 125, 171, 204, 260.
Benoni-Lebrun, 141.
Bertrand (J.), 160.
Betti, 112.
Beyens, 99, 100, 101, 149, 151, 170, 171, 198, 255, 276.
Blanchet, 112.
Boubals, 230.
Bouquet, 272.
Bourdeau, 160.
Boutin, 205.
Bouwmeester (Mlle), 226.
Bözóky (de), 102, 125, 135, 171, 236, 257, 258, 260.
Brandza, 237, 257, 258, 260, 271, 277.
Breton, 73.
Brianchon, 56, 68, 169.
Brill, 276.
Brioschi, 112.
Briot, 272.
Brocard, 11, 15, 16, 24, 29, 30, 31, 32, 44, 49, 50, 51, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 79, 82, 98, 99, 102, 118, 123, 137, 150, 159, 162, 169, 171, 179, 254, 257, 258, 279.
Brunel, 144.
Bruyr, 99, 124, 151, 237.
Cantor, 78, 160.
Carnoy (J.), 223.
Casey, 5, 158.
Castillon, 79.
Catalan, 71, 73, 100, 122, 124, 148, 151, 152, 170, 194, 196, 207, 216, 236, 249, 250.
Cayley, 224, 274.
Cesáro (E.), 72, 83, 116, 142, 209, 218, 240, 274, 280.
Choisis, 237, 252, 273.
Claessens, 78.
Clasen, 160, 2e suppl.
Cockle, 273.
Comberousse (de), 79, 245.
Comte, 160.
Condillac, 160.
Convert, 95.
Crelle, 160, 274.
Cristesco, 237, 257, 258, 260, 277.
Dedekind, 78.
Delaunay (J.), 112.
Deltenre, 78.
Demoulin, 136, 201, 268, 269.
Denys, 85, 99, 102, 151, 236, 237, 255, 257, 258, 262, 277, 279.
Déprez, 85, 87, 101, 119, 123, 124, 148, 149, 151, 164, 167, 170, 171, 193, 199, 200, 203, 204, 205, 224, 226, 229, 230, 232, 253, 255, 257, 258, 259, 275, 277.
Desboves, 242.
Decamps, 205, 257, 258, 259, 262, 279.
Dewachter, 151.
Dewulf, 64, 144.
Droz, 122, 187, 230.
Duhamel, 160.
Durfee, 194, 196.
Emmerich, 84, 99, 101, 102, 124, 169, 199, 228, 243, 244, 245, 252, 275.
Enneper, 272.
Euclide, 5, 112, 139.
Euler, 160, 215, 241.
Even, 198.
Faifofer, 77, 80, 112.
Falisse, 5, 100, 116, 128, 193.
Fauquembergue, 192, 241, 273.
Fermat, 173.
Fourier, 139, 273.
François, 85, 102, 123, 148, 151, 171, 255, 262, 279.
Francken (Edm.), 109.
Führmann, 243.
Gauss, 160.
Gelin, 78, 93, 110, 134, 160, 182, 185, 197.
Gerondal, 169.
Glashan, 80.
Gob, 1er suppl., 165, 237, 269.
Goedseels, 115.
Goux, 99.
Gratry, 160.
Gudermann, 272.
Hain, 172.
Halphen, 272.
Hart, 79.
Hermite, 112, 116.
Houel, 114.
Jacobi, 160, 272.
Jamet, 119, 120, 201, 237, 250, 278.
Jansens, 198.
Jarrige, 113.
Jeřábeck, 76, 99, 123, 232, 262.
Joachimsthal, 153.
Jordan, 112, 115.
Keelhoff, 236.
Kerckhofs, 160.

Klompers, 102, 204, 236, 237, 260, 277.
Königsberger, 272.
Kronecker, 273.
Lachlan, 103.
Laguerre, 154.
Laisant, 84, 87, 150, 164.
Lalisse, 116, 151, 236, 237, 258, 273, 277, 279.
Lambotte, 199, 200, 201, 223, 252.
Langerock, 279.
Laurens, 151, 171, 260.
Laurent, 112, 183.
Lebon, 79, 184, 245.
Legendre, 112, 139, 212.
Lemoine, 9, 10, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 30, 31, 42, 46, 49, 50, 51, 54, 57, 58, 59, 60, 63, 65, 66, 68, 69, 79, 88, 104, 147, 150, 167, 170, 180, 226, 240, 261.
Liénard, 188, 223.
Longchamps(de), 6, 7, 70, 152, 153, 207, 209, 216, 217, 219.
Lucas (Ed.), 71, 129, 173, 179, 180, 234.
Macé, 160.
Malet, 89.
Mandart, 99, 165, 201, 204, 236, 237, 252, 257, 258, 277.
Mansion, 75, 76, 80, 98, 116, 120, 160, 164, 182, 183, 214, 220, 267, 272, 273.
Mantel, 217, 274.
Marie, 160.
Massau, 220, 222.
Mathieu, 6.
M'Cay, 21, 29, 33, 36, 51, 59, 61, 63, 65, 67, 203.
Meurice, 151, 199, 275.
Miller, 88.
Mineur 169, 199, 275
Molenbroek, 82, 123, 148, 169, 191, 199, 204, 234, 236, 252, 255, 275.
Monge, 139.
Mosnat, 98, 166, 234.
Navet, 78.
Neuberg, 20, 28, 29, 36, 51, 58, 59, 60, 65, 67, 69, 70, 82, 83, 87, 97, 106, 107, 109, 118, 119, 121, 124, 128, 147, 149, 158, 159, 172, 173, 184, 191, 193, 199, 200, 204, 207, 208, 231, 244, 259, 262, 264, 275.
Ocagne (d'), 124.
Ozanam, 161, 181, 265.
Pascal, 160, 165.
Peano, 75, 78, 110, 182, 214.
Peaucellier, 79.
Peirce, 97.
Pisani, 81, 99, 101, 124, 148, 151, 197, 255.
Poisson, 160.
Poulain, 180.
Protsche, 160.
Purgotti, 77.
Pythagore, 248.
Ray, 88.
Realis, 71, 241.
Rebière, 159.
Retali, 128.
Riemann, 160, 272.
Rocchetti, 234.
Rocquigny (de), 100, 102, 103, 104, 119, 207, 215, 257, 260.
Rogers, 128.
Rouché, 79, 245.
Rousseau, 160.
Rowe, 72.
Russell, 69.
Russo, 96, 99, 124, 204, 236, 237, 255, 260, 277.
Salmon, 42, 119, 224.
Schwarz, 273.
Servais (Cl.), 88, 99, 105, 136, 167, 230, 236, 264. 267.
Simmons, 51.
Simon, 160.
Simson, 21, 24, 25, 65, 101.
Spencer, 160.
Stammer, 104, 277.
Steiner, 7, 167, 183, 206, 264.
Stenne, 123.
Stewart, 95.
Stoll, 66.
Sturm, 268.
Stuyvaert, 98, 164, 169, 252.
Tannery (J.), 160.
Tarry, 28, 36, 48, 51, 53, 55, 56, 64, 65.
Taylor (H.M.), 21, 22, 23, 24, 25, 72, 250.
Thiré, 184.
Thiry, 95, 172.
Thomae, 272.
Todhunter, 252.
Torricelli, 173.
Towsend, 24.
Tucker, 17, 18, 20, 23, 24, 29, 51, 62, 65, 66.
Van Aubel (H.), 188.
Van Dorsten, 36.
Verbessem, 277.
Vereecke, 275.
Verniory, 99, 100, 102, 124, 126, 148, 166, 203, 226, 232, 273.
Vigarié, 106, 200.
Vuibert, 250.
Wasteels, 190.
Weill, 142.
Weierstrass, 214, 272.
Wronski, 75, 110, 136.

NOTES

DE

GÉOMÉTRIE RÉCENTE;

PAR

M. A. GOB,

PROFESSEUR AGRÉGÉ DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN

SUR

LA DROITE ET LE CERCLE D'EULER.

1. Soit un triangle quelconque $T \equiv ABC$. Les pieds des hauteurs sont les sommets d'un triangle $T' \equiv A'B'C'$, appelé *triangle orthique;* les tangentes menées par A, B, C au cercle ABC sont les sommets d'un triangle $T'' \equiv A''B''C''$, appelé *triangle tangentiel.* Désignons par H l'orthocentre de T, par O le centre du cercle circonscrit à T, par O' le centre du cercle circonscrit à T' (*cercle d'Euler*).

Les triangles T' et T'' sont, évidemment, homothétiques. Les points H, O en sont des points homologues, car ce sont les centres des cercles inscrits (cercles exinscrits, lorsque T est obtusangle); donc HO passe par le centre d'homothétie. D'où le théorème :

Les droites A'A'', B'B'', C'C'' *qui joignent les sommets homologues du triangle orthique et du triangle tangentiel d'un triangle donné* ABC, *concourent en un même point* P *de la droite d'Euler de* ABC.

Pour préciser la position de P, observons que

$$\frac{PH}{PO} = \frac{HA'}{OA''} = \frac{2R \cos B \cos C}{R \sec A} = 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Les coordonnées normales de H et O étant (2R cos B cos C, ...), (R cos A, ...), celles de P seront

$$\frac{2R\cos B\cos C - R\cos A\,.\,2\cos A\cos B\cos C}{1 - 2\cos A\cos B\cos C} = \frac{2R\cos B\cos C\sin^2 A}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} \ldots;$$

elles sont donc proportionnelles aux quantités

$$\frac{\sin^2 A}{\cos A}, \quad \frac{\sin^2 B}{\cos B}, \quad \frac{\sin^2 C}{\cos C}.$$

On conclut, de ces expressions, que *le centre d'homothétie des triangles* T', T'', *et l'anticomplémentaire* Λ *du point de Lemoine de* T *sont deux points inverses par rapport à* T.

Nous croyons utile de rappeler que Λ est le centre de perspective du triangle T, et du triangle qui a pour sommets les pieds des hauteurs du triangle formé par les milieux des côtés de T (*).

9. Le centre O' du cercle A'B'C' a pour homologue le centre O'' du cercle A''B''C''. O' étant situé sur HO, on peut énoncer le théorème suivant :

Le centre du cercle circonscrit au triangle tangentiel d'un triangle donné T, *est situé sur la droite d'Euler de* T.

La position du point O'' sur la droite HO résulte des égalités

$$\frac{PH}{PO} = \frac{PO'}{PO''} = \frac{PO' - PH}{PO'' - PO} = \frac{HO'}{OO''},$$

d'où

$$\frac{HO''}{OO''} = 1 + 4\cos A\cos B\cos C.$$

Si l'on considère T'' comme étant le triangle *fondamental*, les résultats trouvés, après un changement de notations, peuvent être énoncés ainsi :

Soit I *le centre de l'un des cercles touchant les trois côtés d'un triangle* T, *et soit* t *le triangle qui a pour sommets les points de*

(*) Voir *Mathesis*, t. VII, p. 105.

contact de ces côtés. O *étant le centre du cercle circonscrit à* T, *le triangle* T *et le triangle orthique de* t *sont perspectifs, et le centre de perspective* (*) *est situé sur la droite* OI; *le centre du cercle des neuf points de* t *est situé sur la même droite* OI.

OI étant la droite d'Euler de *t* contient également le centre de gravité de ce triangle (**).

8. Les hauteurs de T rencontrent la circonférence circonscrite en trois nouveaux points A‴, B‴, C‴, sommets d'un triangle T‴ qui est homothétique au triangle tangentiel T″. Les points H et O étant des points homologues de T″ et T‴, on voit que *les droites* A‴A″, B‴B″, C‴C″ *concourent en un même point* P′ *de la droite d'Euler de* ABC.

On trouve aisément

$$\frac{P'H}{P'O} = \frac{2HA'}{OA''} = 4\cos A\cos B\cos C,$$

d'où les coordonnées normales de P′, à un facteur de proportionnalité près,

$$\frac{\cos 2A}{\cos A}, \quad \frac{\cos 2B}{\cos B}, \quad \frac{\cos 2C}{\cos C}.$$

Au moyen de ces coordonnées, on vérifie facilement que P′ *est le centre perspectif de* T, *et du triangle orthique du triangle orthique de* T.

Considérant dans la figure précédente T‴ comme étant le triangle fondamental, on peut, après un changement de notations, énoncer le théorème suivant :

Par les points de rencontre des bissectrices intérieures d'un triangle acutangle T *avec la circonférence circonscrite, on mène à celle-ci des tangentes. On obtient ainsi un triangle* T_1. *En opérant de la même façon sur* T_1, *on obtient un nouveau triangle* T_2,

(*) Les coordonnées normales de ce point sont $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}B$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$ ou $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A$, $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B$, $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C$, ...

(**) Comparer Neuberg, *Educational Times*, Question 9386, et *Math. élém.* (Journal de Longchamps, 1888, p. 25).

et ainsi de suite. Les centres des cercles circonscrits aux triangles T, T_1, T_2, ... *et les centres d'homothéthie de deux quelconques de ces triangles sont sur une même droite.*

4. Soient α, β, γ, les milieux des côtés BC, CA, AB du triangle T ≡ ABC. Supposons que

$O\alpha$ rencontre CA en α', AB en α'';
$O\beta$ » AB en β', BC en β'';
$O\gamma$ » BC en γ', CA en γ''.

O sera, évidemment, l'orthocentre de chacun des triangles $A\beta'\gamma''$, $B\gamma'\alpha''$, $C\alpha'\beta''$.

AO est perpendiculaire à $\beta'\gamma''$; soit α_1 le point d'intersection de ces droites. Désignons par m, n, p, les milieux de $\beta'\gamma''$, $A\gamma''$, $A\beta'$. Les points α_1, β, γ, m, n, p, appartiennent au cercle d'Euler du triangle $A\beta'\gamma''$.

Soumettons la figure à une inversion en prenant pour pôle le point A, pour module la quantité

$$A\beta \cdot A\gamma'' = A\gamma \cdot A\beta' = AO \cdot A\alpha_1.$$

Les points β, γ, α_1, n, p, auront pour inverses les points γ'', β', O, C, B. Donc :

La circonférence qui passe par deux sommets B, C, *d'un triangle* ABC *et par le centre* O *du cercle* ABC, *rencontre les côtés* AB, AC *aux mêmes points que les médiatrices* (*) *de* AC, AB (**).

BC et $\beta'\gamma''$ étant antiparallèles par rapport à l'angle BAC, A*m* est une symédiane du triangle ABC, et, par suite, passe par le point A″, pôle de BC par rapport au cercle ABC. On voit facilement que A″ est situé sur la circonférence OBC. OA″ étant un diamètre, la projection A_2 de O sur la symédiane AA″ appar-

(*) Les médiatrices d'un triangle sont les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés.

(**) La démonstration directe de ce théorème se fait sans difficulté.

tient à la même circonférence, c'est l'inverse de m; on sait que A_2 est un sommet du deuxième triangle de Brocard de T.

Les circonférences $\alpha_1\beta\gamma$, OCB sont également des figures homothétiques par rapport au point A, le rapport de similitude étant égal à $\frac{1}{2}$. De là, on peut conclure que la circonférence BOC passe par les symétriques de A par rapport aux milieux des droites $\beta'\gamma''$, $O\beta'$, $O\gamma''$; le premier de ces points est A'', de sorte que $A''\beta'A\gamma''$ *est un parallélogramme.*

5. Le milieu de AA_2 est un point de la circonférence *mnp*; c'est aussi un sommet du deuxième triangle de Brocard de $A\beta\gamma$. Mais β, γ, sont les pieds de deux hauteurs de $A\beta'\gamma'$; donc, si l'on considère $A\beta'\gamma''$ comme étant le triangle fondamental, on peut énoncer le théorème suivant :

Soient A', B', C' *les pieds des hauteurs d'un triangle* ABC. *Le cercle d'Euler de ce triangle passe par un sommet du second triangle de Brocard de chacun des triangles* AB'C', BC'A', CA'B', HB'C', HC'A', HA'B', AA'C', AA'B', ...

Ce qui fait douze nouveaux points de ce cercle.

Pour trouver les neuf derniers points, on observe que les triangles HBC, HCA, HAB ont même cercle d'Euler que le triangle ABC.

6. La circonférence OBC est aussi l'inverse de la droite BC, le cercle d'inversion étant le cercle circonscrit à ABC. Cette remarque conduit aux relations

$$R^2 = O\alpha' \cdot O\alpha'' = O\beta' \cdot O\beta'' = O\gamma' \cdot O\gamma'' \qquad (1)$$

$$R^2 = OA_2 \cdot OA_2' = OB_2 \cdot OB_2' = OC_2 \cdot O'C_2', \qquad (2)$$

où A_2, B_2, C_2 sont les sommets du second triangle de Brocard de ABC, et A_2', B_2', C_2' les points de rencontre de OA_2, OB_2, OC_2 avec BC, CA, AB. Les relations (1) résultent aussi de ce que les triangles $OB\beta''$, $O\beta'B$ sont équiangles; les autres, de ce que le cercle de Brocard passe par A_2, B_2, C_2 et a pour inverse la droite de Lemoine $A_2'B_2'C_2'$.

SUR

LES CERCLES DE NEUBERG.

Bibliographie.

J. Neuberg, *Mathesis*, 1882, pp. 94, 157 et 186; *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1882, p. 24, et 1886, p. 75.

J. Casey, *A Treatise on Analytical Geometry*, 1885, pp. 73, 107, 120, 248, 256, 258, 259, 326; *A Sequel to Euclid*, 4e édition, 1886, pp. 207, 208, 213, 214.

M'Cay, *Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. XVIII, pp. 453-470.

E. Vigarié, *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1887, pp. 121, 145, 169.

Simmons, *Companion to Weekly Papers by J. Milne*, 1888.

1. Soit un triangle ABC. Sur BC comme base, du même côté que A, construisons des triangles de même angle de Brocard V que ABC (triangles *équibrocardiens* avec ABC); le lieu des sommets est la circonférence (N_a) représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 - ay \cot V + \frac{3}{4}a^2 = 0, \qquad (1)$$

les axes étant BC et la perpendiculaire au milieu de BC. Ce lieu a reçu le nom de *Cercle de Neuberg*, du nom du géomètre qui, le premier, en a fait mention. Nous en désignerons le centre par N_a, le rayon par ρ_a.

Si l'on prend pour base commune des triangles équibrocardiens avec ABC, soit le côté BC, soit le côté CA, on obtient deux autres cercles de Neuberg (N_b), (N_c).

Soient A', B', C' les milieux des côtés ABC, O le centre et R le rayon du cercle circonscrit. De l'équation (1), on déduit immédiatement les propriétés suivantes :

$$a)\ A'N_a = \frac{1}{2}a\cot V, \quad B'N_b = \frac{1}{2}b\cot V, \quad C'N_c = \frac{1}{2}c\cot V; \qquad (2)$$

$$\text{angle } BN_aC = CN_bA = AN_cB = 2V, \quad \text{angle } CBN_a = \frac{1}{2}\pi - V.$$

$$b)\ \rho_a = \frac{1}{2}a\sqrt{\cot^2 V - 3}, \quad \rho_b = \frac{1}{2}b\sqrt{\cot^2 V - 3}, \quad \rho_c = \frac{1}{2}c\sqrt{\cot^2 V - 3}.$$

c) Les tangentes menées de B et C au cercle (N_a) sont égales à BC. Autrement dit, le cercle (N_a) coupe orthogonalement les cercles décrits des points B, C comme centres, avec un rayon égal à BC.

Cette remarque conduit à l'équation du cercle (N_a) en coordonnées barycentriques :

$$a^2(y+z)(x+y+z) - (a^2yz + b^2zx + c^2xy) = 0; \qquad (3)$$

car, dans l'équation générale

$$(xP_a + yP_b + zP_c)(x+y+z) - (a^2yz + b^2zx + c^2xy) = 0,$$

les coefficients P_a, P_b, P_c sont égaux aux puissances des sommets du triangle de référence par rapport au cercle.

9. Les égalités (2) donnent

$$ON_a = A'N_a - A'O = \frac{1}{2}a(\cot V - \cot A) = \frac{1}{2}a(\cot B + \cot C)$$

$$= \frac{a \sin A}{2 \sin B \sin C} = \frac{a^2}{4S}.$$

On en conclut

$$\frac{ON_a}{a} + \frac{ON_b}{b} + \frac{ON_c}{c} = \cot V,$$

$$ON_a \cdot ON_b \cdot ON_c = R^2,$$

$$a^2 \cdot ON_bN_c = b^2 \cdot ON_cN_a = c^2 \cdot ON_aN_b. \qquad (4)$$

La dernière relation montre que O *est le centre de gravité des points* N_a, N_b, N_c, *chargés de masses inversement proportionnelles à* a^2, b^2, c^2, de sorte que ON_a, par exemple, divise N_bN_c dans le rapport b^2, c^2.

Soient A_1, B_1, C_1 les sommets du premier triangle de Brocard. On sait que les droites AA_1, BB_1, CC_1 concourent en un même point D, ayant pour coordonnées barycentriques $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$. En combinant cette propriété avec l'interprétation géométrique des égalités (4), on voit que *les points qui divisent les droites* AN_a, BN_b, CN_c, DO *dans un même rapport sont tels que le quatrième point est le centre de gravité des trois autres chargés de masses inversement proportionnelles à* a^2, b^2, c^2.

Un théorème analogue s'applique, d'une part aux droites AN_a, BN_a, CN_a, $\Omega'O$, d'autre part aux droites AN_a, BN_a, CN_a, ΩO; Ω désigne ici le point rétrograde, Ω' le point direct de Brocard du triangle ABC.

3. On peut trouver immédiatement six points de la circonférence (N_a). En effet, construisons les angles CBE, BCF égaux à BAC et situés du même côté de BC que A; soient E, F les points de rencontre de BE avec AC, et de CF avec AB. Les triangles BEC, CBF, équiangles avec ABC, ont même angle de Brocard V. Donc, les points A, E, F et leurs symétriques α, ε, φ par rapport à la droite A'O sont situés sur la circonférence (N_a).

Le groupe de ces six points jouit de propriétés très intéressantes qui ont été signalées par M. Neuberg. Pour l'énoncé et la démonstration de ces propositions, nous nous contentons de renvoyer le lecteur à la Note de M. Vigarié.

Nous ferons cependant une remarque nouvelle, qui nous sera utile dans la suite. De l'égalité des angles CBE, BAC, on déduit que la circonférence ABE touche BC en B.

Appelons *cercles adjoints* (Beikreise) les cercles qui passent par les extrémités d'un côté du triangle ABC et touchent un autre côté. Tel est, par exemple, le cercle qui passe par A, B et touche BC en B ; nous le désignons par la notation *cercle adjoint* (AB). Le cercle adjoint (BA) passe par B, A et touche en A le côté AC.

La remarque faite ci-dessus peut être énoncée ainsi : *Les cercles adjoints* (AB), (AC) *rencontrent* AC *et* AB *en deux points du cercle* (N_a).

Rappelons que les cercles adjoints (AB), (BC), (CA) se rencontrent au point Ω, que les trois autres cercles se rencontrent en Ω', que les deux cercles (BA), (CA) passent par le sommet A_2 du deuxième triangle de Brocard.

4. Soient αBC, βCA, γAB trois triangles directement semblables. Les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ ne concourent en un même point que dans les deux cas suivants :

1° Les triangles αBC, ... sont isoscèles. Alors le point d'inter-

section des droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ parcourt une hyperbole équilatère Γ, appelée *hyperbole de Kiepert* (*).

2° Les triangles αBC, ... sont équibrocardiens avec ABC. Dans ce cas, les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont parallèles, et les points α, β, γ ont pour lieu géométrique, respectivement, les cercles (N_a), (N_b), (N_c).

Le premier cas a été signalé par M. Kiepert, le second par M. Neuberg. Nous ne nous arrêtons pas à la démonstration de ces propositions, mais nous allons en indiquer quelques conséquences.

Soient (n_a, n'_a), (n_b, n'_b), (n_c, n'_c) les points de rencontre des cercles (N_a), (N_b), (N_c), respectivement, avec les médiatrices de BC, CA, AB. Les deux groupes (n_a, n_b, n_c), (n'_a, n'_b, n'_c) sont les sommets de deux groupes de trois triangles semblables construits sur les côtés BC, CA, AB; comme ces triangles sont isoscèles et équibrocardiens avec ABC, les droites An_a, Bn_b, Cn_c se rencontrent sur l'hyperbole de Kiepert et sont parallèles entre elles; donc elles sont parallèles à une asymptote de cette courbe. De même, les droites An'_a, Bn'_b, Cn'_c sont parallèles à la seconde asymptote.

Les points (N_a, N_b, N_c), (A_1, B_1, C_1) sont les sommets de deux groupes de triangles semblables isoscèles construits sur BC, CA, AB, dont les angles à la base N_aBC, A_1BC sont complémentaires. Donc : 1° *les droites* AN_a, BN_b, CN_c *se rencontrent en un point* N (point de Tarry) *de* Γ *et sont perpendiculaires aux côtés correspondants du triangle* $A_1B_1C_1$; 2° *les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *concourent en un point* D *de* Γ *et sont perpendiculaires aux côtés du triangle* $N_aN_bN_c$ (*).

D'après un théorème connu, les parallèles aux côtés du triangle $A_1B_1C_1$ menées par A, B, C, concourent au point de Steiner R.; autrement dit :

(*) Les propriétés de cette conique ont été étudiées par MM. Brocard (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1884, pp. 197-209, et 1885, pp. 12, 30, 58, 76, 104, 123), Neuberg (*ibidem*, 1886, p. 73) et M'Cay (*Mathesis*, 1887, pp. 208-220).

Les tangentes menées par A, B, C, *respectivement aux cercles* (N_a), (N_b), (N_c) *se rencontrent au point de Steiner* (*).

5. Nous allons retrouver l'une des propositions précédentes et parvenir à quelques nouveaux théorèmes, en soumettant la figure à une transformation par rayons vecteurs réciproques.

D'abord, *si l'on prend le sommet* A *pour pôle d'inversion et que* B_1, C_1 *désignent les inverses des sommets* B, C, *le cercle* (N_a) *se transforme en la droite de Lemoine du triangle* AB_1C_1, *et les transformés des cercles* (N_b), (N_c) *sont deux cercles de Neuberg de ce triangle.*

Pour simplifier la transformation, adoptons comme module de transformation le produit AB . AC; alors les triangles ABC, AC_1B_1 sont symétriquement égaux. On a vu (§ **3**) que le cercle (N_a) passe par le point α situé sur le cercle ABC, et par les points E, F situés sur les cercles adjoints (AB), (AC). Donc l'inverse du cercle (N_a) passe par les points de rencontre de B_1C_1, AC, AB, respectivement avec les tangentes menées par A, B_1, C_1. On démontre, d'une manière semblable, la seconde partie du théorème.

La droite AN_a est donc perpendiculaire à la droite de Lemoine du triangle AB_1C_1. Mais les droites homologues des triangles ABC, AC_1B_1 sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle BAC; par conséquent, AN_a est conjuguée isogonale avec une parallèle menée par A à la droite OK (K est le point de Lemoine de ABC) du triangle ABC, ce qui démontre de nouveau que AN_a passe par le point de Tarry.

6. Les tangentes en B, A, C, aux cercles (N_b), (N_a), $N_c)$.

(*) Cette Remarque n'a pas été faite explicitement dans le beau Mémoire de M'Cay sur l'hyperbole Γ, auquel nous empruntons le principe sur lequel elle repose (voir *Mathesis*, 1887, p. 216). M. Neuberg a donné une démonstration très simple de ce principe, dans une Note qui accompagne le travail de M. Cay. Il résulte de cette Note que

$$AN_a = B_1C_1 \cot V, \quad AA_1 = N_bN_c \operatorname{tg} V;$$

donc les côtés du triangle $N_aN_bN_c$ sont à la fois perpendiculaires et proportionnels aux droites AA_1, BB_1, CC_1.

d'après ce qu'on a vu ci-dessus, passent au point de Steiner. Appliquons cette propriété au triangle AB_1C_1 pour la transformer par inversion, le pôle de la transformation étant placé en A. Nous aurons le théorème suivant :

Dans tout triangle ABC, *le cercle mené par* A *et touchant en* B *la droite* BR, *le cercle mené par* B *et touchant en* C *la droite* CR, *se coupent en un point* M *du côté* BC; *la droite* AM *est parallèle à la droite de Lemoine de* ABC.

Les centres des cercles dont il est question dans ce théorème, sont à l'intersection de ON_a avec BN et de ON_b avec CN; la droite qui joint ces points est donc perpendiculaire au milieu de AM.

On peut, de même, transformer par inversion la propriété que les droites AN_a, BN_b, CN_c se coupent en un point N du cercle ABC.

7. Cherchons le centre radical des cercles de Neuberg.

Les parallèles menées par A, B, C aux côtés opposés du triangle ABC déterminent un triangle $A_aB_aC_a$, appelé *anticomplémentaire* de ABC.

Le point C_a est le centre radical des trois cercles (N_a), (N_b), (O) (*); car les droites C_aA, C_bB sont les axes radicaux des deux premiers cercles comparés au troisième.

L'axe radical des cercles (N_a), (N_b) est donc la perpendiculaire abaissée de C_a sur la droite N_aN_b; cet axe est donc parallèle à la droite CD (§ 4). Par suite, *le centre radical des trois cercles de Neuberg est l'anticomplémentaire* D_a *de* D.

Une démonstration analytique de ce théorème se déduit très simplement de l'équation (3).

La figure $D\Omega D_a\Omega'$ *est un parallélogramme.* En effet, le centre de gravité G de ABC est aussi le centre de gravité du triangle $D\Omega\Omega'$ (**); D_a est situé sur la droite DG, et $GD_a = 2DG$.

(*) (O) désigne le cercle circonscrit au triangle ABC.

(**) Au Congrès de Rouen (*Association française pour l'avancement des sciences*, 1883), M. Brocard a démontré que le milieu S de $\Omega\Omega'$ est sur GD et que $DG = 2GS$, de sorte que S est le complémentaire de D.

Les expressions des coordonnées barycentriques des points D, Ω, Ω conduisent facilement au même théorème.

8. Cherchons encore l'axe radical d'un cercle de Neuberg et d'un sommet du triangle fondamental.

L'axe radical du cercle (N_a) et du point A est la droite AR passant par le point de Steiner. Celui du cercle (N_a) et du sommet B est la droite $C\Omega'$ menée par le point Ω' de Brocard; car C est un point d'égale puissance et $C\Omega'$ est perpendiculaire à BN_a. Enfin, l'axe radical de (N_a) et de C est la droite $C\Omega$.

De là résultent les théorèmes suivants :

1° *Le centre radical des sommets* B, C *et du cercle* (N_a) *est le sommet* A_1 *du premier triangle de Brocard*, de sorte que $\overline{A_1B}^2 = A_1n_a \cdot A_1n'_a = \overline{A_1N_a}^2 - \rho_a^2$, égalité que l'on peut vérifier immédiatement; 2° *le centre radical du sommet* A *et des cercles* (N_b), (N_c) *est l'inverse triangulaire du point* A_1; 3° *le cercle décrit de* Ω' *comme centre avec le rayon* $\Omega'B$ *coupe orthogonalement le cercle* (N_a).

Ces propositions déterminent plusieurs points remarquables situés sur la droite A_aD_a, axe radical des cercles (N_a), (N_b), (N_c), à savoir :

Le pied de la symédiane AK, l'inverse de A_1, les points de rencontre de CR avec $A\Omega'$, de BR avec $A\Omega$, de la droite de Lemoine avec la conjuguée isogonale de AD_a (voir § 5).

9. *Cercles de similitude des cercles de Neuberg.* Désignons T_c, T'_c les centres de similitude des cercles (N_b), (N_c), et par (N'_c) le cercle décrit sur la distance T_c, T'_c comme diamètre. La circonférence (N'_c) est la *circonférence de similitude* de (N_b), (N_c); elle a même axe radical avec chacune de celles-ci, et est le lieu des points d'où on les voit sous un même angle.

Les points T_c, T'_c sont situés sur les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle BAC; car les droites AN_b, AN_c sont également inclinées sur AC, AB, et sont dans le rapport $AC : AB = \rho_b : \rho_c$.

Il résulte de là que la circonférence (N'_c) passe par le sommet A. Elle passe aussi par le centre de similitude A_2 de deux figures semblables construites sur CA et AB. Son second point de rencontre avec la circonférence ABC appartient à la médiane du triangle ABC; car le sommet A_a du triangle anticomplémen-

taire, intersection des axes radicaux des cercles (O) et (N_b), (O) et (N_c), est sur l'axe radical des cercles (O) et (N'_a).

Considérons maintenant les trois cercles de similitude (N'_a), (N'_b), (N'_c) du groupe (N_a), (N_b), (N_c). Ils se coupent en deux points U, U' d'où l'on voit les trois cercles de Neuberg sous le même angle. Ils ont donc un même axe radical UU' passant par le centre radical D_a de (N_a), (N_b), (N_c). Comme ils coupent orthogonalement le cercle mené par les centres des cercles de Neuberg, UU' passe par le centre du cercle $N_aN_bN_c$. Cette droite passe aussi par l'intersection G des droites AA_a, BB_a, CC_a, axes radicaux du cercle (O) combiné, successivement, avec les trois cercles de similitude. Enfin, observons que G est le centre de gravité des points N_a, N_b, N_c, qui se correspondent dans les figures semblables construites sur BC, CA, AB. En résumé :

La droite GD *est la droite d'Euler du triangle* $N_aN_bN_c$ *et contient les deux points d'où l'on voit les trois cercles de Neuberg sous un même angle.*

10. Revenons à la transformation par rayons vecteurs réciproques, indiquée au § 5. Le pôle d'inversion étant en A et la puissance égale à *bc*, le cercle (N_a) se transforme en la droite de Lemoine du triangle AB_iC_i. Or, cette droite est l'axe radical du cercle AB_iC_i et du cercle de Brocard de AB_iC_i. Le premier de ces cercles ayant pour inverse la droite BC, celle-ci doit être l'axe radical du cercle (N_a) et de l'inverse du cercle de Brocard de AB_iC_i. Ce dernier passe par le centre O' du cercle AB_iC_i; AO' est perpendiculaire à BC, et le point diamétralement opposé à A a pour inverse un point de la droite BC, inverse du cercle AB_iC_i. Il résulte de là que l'inverse de O' est symétrique de A par rapport à BC. Par conséquent :

Le cercle (ν_a) *symétrique du cercle* (N_a) *par rapport à* BC, *et le cercle symétrique du cercle de Brocard par rapport à la bissectrice de l'angle* BAC *sont deux figures inverses l'une de l'autre, le pôle d'inversion étant en* A *et la puissance égale à* bc.

Soient ν_a, ν_b, ν_c les symétriques de N_a, N_b, N_c, respectivement, par rapport à BC, CA, AB, et soit Z le milieu de OK (centre du cercle de Brocard). D'après ce qui précède, les droites $A\nu_a$, AZ

sont conjuguées isogonales par rapport à l'angle ABC; donc :

Les droites $A\nu_a$, $B\nu_b$, $C\nu_c$ *se coupent au point* Z', *inverse du centre* Z *du cercle de Brocard* (*).

11. Les notations restant les mêmes, *la figure* $AN_b\nu_cN_a$ *est un parallélogramme.* Nous avions vérifié cette proposition au moyen des coordonnées normales des points N_b, ν_c, N_a. M. Neuberg nous a fait remarquer qu'elle peut être généralisée en ces termes:

Sur les côtés d'un triangle ABC, *on construit six triangles isoscèles semblables, quelconques; soient* N_a, N_b, N_c *les sommets de ceux de ces triangles qui sont tournés vers l'intérieur de* ABC, *et* ν_a, ν_b, ν_c *les sommets des trois autres. Les figures* $AN_c\nu_cN_b$, $A\nu_aN_c\nu_b$, ... *sont des parallélogrammes.*

Voici la démonstration géométrique proposée par ce mathématicien : Si A', B', C' sont les milieux des côtés de ABC, la droite $C\nu_c$ est la résultante de CC' et $C'\nu_c$; mais CC' est la résultante de CB' et CA', $C'\nu_c$ est celle de $B'N_b$, $A'N_a$ (**), donc $C\nu_c$ est la résultante de CB', $B'N_b$, CA', $A'N_a$ ou celle de CN_b, CN_a.

Les deux triples de droites (AN_a, BN_b, CN_c), $(A\nu_a, B\nu_b, C\nu_c)$ déterminent deux points N, ν de l'hyperbole de Kiepert; *la droite* $N\nu$ *passe par le point de Lemoine* (***).

12. La première partie du théorème du 5° suggère une généralisation des cercles de Neuberg.

Soient d une droite quelconque du plan ABC; d_a, d_b, d_c, les symétriques de d par rapport aux bissectrices intérieures du triangle ABC. L'inverse de d_a, si l'on prend pour pôle d'inversion le sommet A et pour module le produit AB . AC, est une circonférence (M_a) passant par A. Soient (M_b), (M_c) les circonférences qui se déduisent par un procédé analogue des droites d_b, d_c. Les cordes que déterminent dans les trois cercles (M_a), (M_b), (M_c) respectivement les angles A, B, C du triangle ABC, sont parallèles à d.

(*) Théorème connu. Voir *Mathesis*, 1887, p. 210.

(**) $A'N_a$, BN_b', $C'\nu_c$ sont perpendiculaires et proportionnelles aux côtés du triangle ABC.

(***) Théorème dû à M. Lemoine (Congrès de Grenoble, 1885). Voir aussi le Mémoire de M'Cay, *Mathesis*, 1887, p. 215.

Si l'on prend pour d la droite de Lemoine de ABC, les cercles (M_a), (M_b), (M_c) deviennent les cercles de Neuberg.

Adoptons pour d la droite représentée en coordonnées normales par l'équation

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=0;$$

c'est la polaire trilinéaire du point $T(\alpha, \beta, \gamma)$.

Le cercle (M_a) aura pour équation

$$\frac{\alpha}{\beta\gamma}(\beta y+\gamma z)(ax+by+cz)-(ayz+bzx+cxy)=0.$$

Les coordonnées du centre radical des trois cercles (M_a), (M_b), (M_c) sont

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right),\quad \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right),\quad \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right).$$

Les tangentes menées à ces cercles, respectivement, par A, B, C, concourent en un point R′ de la circonférence ABC; R′ est l'inverse du point à l'infini sur d.

On démontre aisément les théorèmes suivants analogues aux théorèmes démontrés antérieurement pour les cercles de Neuberg:

Les droites AM_b, AM_c sont isogonales, les cercles M_b et M_c sont vus de A sous le même angle, et le produit des tangentes menées de A à ces cercles est égal à bc. Les points d'où l'on voit les cerles M_a, M_b, M_c sous le même angle, le centre du cercle $M_aM_bM_c$ et l'inverse triangulaire de T sont en ligne droite.

13. Prenons pour T le centre I du cercle inscrit. Alors le cercle (M_a) coupe AB et AC en deux points situés, respectivement, sur les cercles décrits de B et C comme centres avec BC pour rayon. Les cercles (M_a), (M_b), (M_c) ont pour rayon commun $\sqrt{R(R-2r)}$; leur centre radical se confond avec le centre du cercle inscrit à ABC; les tangentes en A, B, C concourent au point de la circonférence ABC qui a pour coordonnées normales

$$\frac{1}{b-c},\quad \frac{1}{c-a},\quad \frac{1}{a-b};$$

enfin, les droites AM_b, AM_c sont égales et isogonales.

Nous avons obtenu la valeur du rayon de (M_a) par le calcul. M. Neuberg nous en communique la démonstration suivante :

Les bissectrices AI, BI, CI rencontrent la circonférence (O) aux sommets d'un triangle LMN dont ces droites sont les hauteurs. Il suit de là que trois forces représentées par OL, OM, ON ont une résultante représentée par OI. Si, maintenant, nous prenons sur BA, CA les longueurs BP = CQ = BC, la droite PQ est la résultante des trois droites PB, BC, CQ, égales entre elles et perpendiculaires, respectivement, à ON, OL, OM; donc PQ est également perpendiculaire à OI, et PQ : OI = BC : OL = 2 sin A. On conclut de là que OI est égal au rayon du cercle circonscrit au triangle APQ.

Le même géomètre observe que, si l'on prend sur les prolongements de AB, AC des longueurs BP′ et CQ′ égales à BC, les rayons des cercles circonscrits aux triangles AP′Q′, APQ′, AP′Q sont égaux aux droites joignant O aux centres I_a, I_b, I_c des cercles ex-inscrits à ABC et que les bases P′Q′, PQ′, P′Q sont perpendiculaires aux droites OI_a, OI_b, OI_c.

14. Lorsque la base BC est fixe et l'angle de Brocard V constant, le sommet A, d'après ce que nous avons vu, décrit un cercle (N_a). Considérons les cercles (N_b) des triangles variables ABC. L'angle ACN_b et le rapport $CA : CN_b$ étant constants, *le point* N_b *décrit une circonférence;* il est facile de voir que N_a décrit la même ligne. L'enveloppe de (N_b) est la podaire de B par rapport à cette circonférence; c'est donc un limaçon de Pascal dont le point double est en A.

Transformons ce résultat par inversion en plaçant le pôle en B. On verra que *la droite de Lemoine de tous les triangles équibrocardiens construits sur* BC, *enveloppe une conique ayant* B *et* C *pour foyers* (*).

(*) Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège,* 2e série, t. XVI.

Bruxelles. — F. Hayez, imprimeur de l'Académie, rue de Louvain, 108.

SUR

UNE

NOUVELLE MÉTHODE DE RÉSOLUTION

DES

ÉQUATIONS LINÉAIRES

ET

SUR L'APPLICATION DE CETTE MÉTHODE

AU CALCUL DES DÉTERMINANTS

PAR

l'abbé B.-I. CLASEN

On expose habituellement, en algèbre élémentaire, trois méthodes de résolution des équations linéaires qui, au fond, ne diffèrent pas l'une de l'autre. Ces méthodes introduisent dans les équations des facteurs communs à tous leurs termes ou aux deux termes des fractions qu'elles contiennent. L'exposition, même l'exposition élémentaire de ces méthodes, ferait bien de les indiquer; la théorie, pour être complète, l'exigerait et la pratique, comme nous le ferons voir (12), y trouverait des avantages précieux. Aussi enseignerons-nous (13) une manière d'employer ces méthodes qui les fera connaître sans difficulté.

La théorie des déterminants nous fournit, il est vrai, une méthode (identique au fond à celle du n° 2) qui n'a pas ces inconvénients, mais qui, pour être belle et simple en théorie, cesse d'être pratique dès qu'il s'agit d'un système de plus de trois équations.

La méthode que nous allons exposer indique les facteurs communs avant qu'ils s'introduisent dans les équations; de plus,

elle simplifie les calculs en réduisant le nombre des opérations à faire. Elle semble aussi être plus scientifique, parce qu'elle fait connaître et qu'elle repousse en quelque sorte, aussitôt qu'elles entrent dans les calculs, et les équations incompatibles avec celles dont on s'est déjà servi et celles qui en sont une conséquence.

Dans un premier chapitre, nous exposerons la méthode, nous ferons la discussion des équations qu'elle nous impose d'elle-même et nous l'emploierons pour chercher les solutions générales.

Dans un second chapitre, nous la démontrerons par la théorie des déterminants et nous l'appliquerons au calcul des valeurs de ceux-ci (*).

I

Exposition et démonstration élémentaire de la méthode.

1. *Caractère distinctif de la méthode.* — Les méthodes d'élimination dont on se sert habituellement procèdent par réductions successives d'un système de p équations à p inconnues à un système de $(p-1)$ équations à $(p-1)$ inconnues, de ce système à un système de $(p-2)$ équations à $(p-2)$ inconnues et ainsi de suite. Dans celle que nous allons exposer, nous réduirons les deux premières équations à deux équations entre *chacune* de deux inconnues et les autres, puis ces deux-ci avec la troisième du système primitif à trois équations entre *chacune* de trois inconnues et les autres et ainsi de suite. Pour abréger, nous nommerons ces équations, qui conduisent immédiatement aux valeurs des premières inconnues en fonction des autres, les équations qui expriment les valeurs des premières inconnues en fonction des autres, ou même plus simplement les équations qui expriment les valeurs des premières inconnues.

(*) M. P. Mansion, professeur de l'Université de Gand, chargé par la Société scientifique de Bruxelles d'examiner ce travail, a bien voulu me faire de précieuses observations concernant la rédaction ; j'ai tâché d'en profiter et je l'en remercie vivement.

2. ***Méthode sans l'emploi de la division.*** — Soient les équations du système I, dont nous désignerons les premiers membres par des lettres affectées de l'indice 1,

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1s + \dots m_1k = 0, \\ Y_1 &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2s + \dots m_2k = 0, \\ Z_1 &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3s + \dots m_3k = 0, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

L'élimination de x et celle de y entre les deux premières de ces équations nous donne

$$\begin{aligned} a_1Y_1 - a_2X_1 &= (a_1b_2 - a_2b_1)\,y + (a_1c_2 - a_2c_1)\,z + \dots = 0, \\ b_2X_1 - b_1Y_1 &= (a_1b_2 - a_2b_1)\,x + (c_1b_2 - c_2b_1)\,z + \dots = 0, \end{aligned}$$

ou encore

$$b_1Y_1 - b_2X_1 = -(a_1b_2 - a_2b_1)\,x - (c_1b_2 - c_2b_1)\,z - \dots = 0.$$

On voit que, dans les deux équations qu'on trouve ainsi et qui expriment les valeurs de y et de x, ces deux inconnues sont, en faisant abstraction des signes, multipliées par le même coefficient. Cette propriété nous permet d'éliminer d'emblée x et y de l'équation $Z_1 = 0$. En désignant par Y_2 et X_2 les premiers membres des deux équations qui expriment les valeurs de y et de x tirées des deux premières équations I, et par m le coefficient commun de ces deux inconnues, de sorte que

$$\begin{aligned} Y_2 &= my + (a_1c_2 - a_2c_1)\,z + \dots = 0, \\ X_2 &= mx + (c_1b_2 - c_2b_1)\,z + \dots = 0, \end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} mZ_1 &= ma_3x + mb_3y + mc_3z + \dots\dots\dots\dots = 0, \\ -b_3Y_2 &= \quad - mb_3y - b_3(a_1c_2 - a_2c_1)\,z - \dots = 0, \\ -a_3X_2 &= -ma_3x \quad - a_3(c_1b_2 - c_2b_1)\,z - \dots = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit une équation de la forme

$$Z_3 = Rx + Ss + \cdots = 0.$$

En cherchant de la même manière au moyen des trois premières équations I, celles qui expriment les valeurs de y et de x pour des valeurs quelconques de s, t, etc., on trouverait, comme on pourrait s'en convaincre par un calcul direct et comme d'ailleurs nous allons le démontrer d'une manière générale, des équations de la forme

$$X_3 = Rx + S's + \cdots = 0,$$
$$Y_3 = Ry + S''s + \cdots = 0,$$

où x et y se trouvent multipliés par le coefficient R de x dans l'expression Z_3, ce qui permettra d'éliminer d'emblée x, y et z de l'équation $S_4 = 0$, et ainsi de suite.

En d'autres termes, pour éliminer les inconnues x, y, z, s entre les cinq premières des équations I, il faut préalablement, au moyen des quatre premières équations, chercher les valeurs de x, y, z et s. D'après le principe de cette méthode qui exclut la division, les inconnues x, y, z et s seront, dans ces équations, multipliées par le même coefficient E ou — E, ce qui permettra de les éliminer d'emblée de l'équation $ET_4 = 0$, c'est-à-dire de la 5e équation multipliée par E. Les quatre équations auxiliaires seront chacune déduites, d'une manière semblable, des trois premières équations, etc., de sorte que toutes les équations ne se trouvent que par un procédé unique, bien déterminé et ne peuvent se présenter que sous une seule forme, tandis que les autres méthodes peuvent, par des voies différentes, conduire à des équations $mAt + mBv + \cdots = 0$ et $nAt + nBv + \cdots = 0$, qui pour être équivalentes ne sont pas absolument de la même forme.

3. *Démonstration du principe fondamental.* — Supposons que ce principe de l'égalité des coefficients soit vrai pour quatre équations et démontrons-le pour cinq.

Les quatre premières équations du système I nous donneront les valeurs de x, y, z et s sous la forme

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= Ex + At + \alpha u \dots = 0, \\ Y_1 &= Ey + Bt + \beta u \dots = 0, \\ Z_1 &= Ez + Ct + \gamma u \dots = 0, \\ S_1 &= Es + Dt + \delta u \dots = 0, \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (4)$$

parce que, d'après notre hypothèse, les coefficients de x, y, z et s doivent être égaux; et elles nous donneront les valeurs de x, y, z et t sous la forme

$$\left.\begin{aligned} X_{IV} &= Dx + A_1 s + \alpha_1 u \dots = 0, \\ Y_{IV} &= Dy + B_1 s + \beta_1 u \dots = 0, \\ Z_{IV} &= Dz + C_1 s + \gamma_1 u \dots = 0, \\ T_{IV} &= Dt + Es + \delta_1 u \dots = 0, \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (IV)$$

car $T_{IV} = 0$ et $S_1 = 0$ sont la même équation, qui ne peut être trouvée que d'une seule manière, savoir par l'élimination de x, y et z de la quatrième équation I et, d'après notre hypothèse, les coefficients de x, y et z doivent être égaux à celui de t.

Nous allons de plus démontrer que $A_1 = -A$.

Si E est différent de 0, le premier de ces groupes nous donne les valeurs de x, y, z et s pour des valeurs quelconques des autres lettres t, u, etc. (*).

En supposant donc que E soit différent de 0, nous aurons pour

$$t = 1, \quad u = v = \dots = k = 0,$$
$$Ex + A = 0, \quad \text{et} \quad Es + D = 0.$$

D'où l'on tire

$$Exs + As = 0, \quad \text{et} \quad Exs + Dx = 0,$$

(*) L'équivalence des groupes (4) et (IV) et des groupes (5) et (V) que nous emploierons dans la suite est établie aux n^os 6 et 8. Nous faisons cette remarque pour prévenir une objection qui peut venir à l'esprit du lecteur.

et

$$Dx - As = 0.$$

La première équation du groupe (IV) deviendra

$$Dx + A_1 s = 0,$$

ce qui serait impossible, si l'on n'avait pas

$$A_1 s = - As.$$

On trouverait de même

$$B_1 s = - Bs,$$

et

$$C_1 s = - Cs.$$

Si $E = 0$, nous perdons le droit de dire que le groupe IV nous donne les valeurs x, y, z, s pour des valeurs quelconques des autres inconnues, ce qui empêche notre démonstration d'être applicable à ce cas. Mais si un des coefficients A, B, C, D, par exemple D, est différent de 0, nous pouvons choisir le groupe IV pour en faire le point de départ de cette démonstration. Enfin si $A = B = C = D = E = 0$, nous observerons que les équations $X_4 = 0$ et $X_{1V} = 0$ appartiennent toutes les deux au groupe qui est censé exprimer les valeurs de s, t, y, z, de sorte que les coefficients A et A_1 de s et t ne peuvent différer que par leurs signes, et que, si $A = 0$, nous pouvons en tout cas écrire $A_1 = - A$.

Pour éliminer x, y, z et s de l'équation $T_1 = 0$, la 5ᵉ du système I, nous n'avons qu'à additionner les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
ET_1 &= a_5 Ex + b_5 Ey + c_5 Ez + d_5 Es + e_5 Et + \cdots = 0,\\
-a_5 X_4 &= -a_5 Ex \qquad\qquad\qquad\quad - a_5 At - \cdots = 0,\\
-b_5 Y_4 &= \qquad -b_5 Ey \qquad\qquad\quad - b_5 Bt - \cdots = 0,\\
-c_5 Z_4 &= \qquad\qquad -c_5 Ez \qquad - c_5 Ct - \cdots = 0,\\
-d_5 S_4 &= \qquad\qquad\qquad -d_5 Es - d_5 Dt - \cdots = 0,
\end{aligned}$$

ce qui nous donnera

$$T_5 = (-a_5A - b_5B - c_5C - d_5D + e_5E)t + \cdots = 0$$

Pour éliminer de l'équation $T_1 = 0$, x, y, z et, au lieu de s, une autre des inconnues restantes, par exemple t, nous n'avons qu'à additionner les équations suivantes après avoir remplacé dans les équations (IV) A_1s, B_1s et C_1s par $-As$, $-Bs$ et $-Cs$:

$$\begin{aligned}
DT_1 &= a_5Dx + b_5Dy + c_5Dz + d_5Ds + e_5Dt + \cdots = 0,\\
-a_5X_{IV} &= -a_5Dx + a_5As + \cdots = 0,\\
-b_5Y_{IV} &= -b_5Dy + b_5Bs + \cdots = 0,\\
-c_5Z_{IV} &= -c_5Dz + c_5Cs + \cdots = 0,\\
-c_5T_{IV} &= -e_5Es - e_5Dt - \cdots = 0,
\end{aligned}$$

ce qui nous donnera

$$S_5 = (a_5A + b_5B + c_5C + d_5D - e_5E)s + \cdots = 0.$$

Donc si l'on cherche par cette méthode, au moyen des 5 premières équations 1, les équations qui expriment les valeurs de 5 inconnues x, y, z, s et t, les coefficients de deux quelconques, s et t, de ces inconnues et par conséquent les coefficients de ces cinq inconnues devront, dans ces cinq équations, être égaux aux signes près, si ce principe de l'égalité des coefficients est démontré pour 4 équations. On démontrerait de la même manière qu'il est vrai pour p équations, s'il l'est pour $(p-1)$. Démontré pour 2, il l'est donc pour 3, et par conséquent pour 4 équations, etc.

4. *Méthode abrégée par la division.* — La méthode que nous venons d'exposer, fastidieuse déjà pour résoudre un système de quatre équations et impraticable pour un système de six, n'aurait qu'une valeur théorique, s'il n'y avait pas moyen de l'abréger. Mais le principe des coefficients égaux nous fournit ce moyen.

Supposons que les coefficients E du système (4) ne soient pas nuls; choisissons dans l'équation $T_5 = 0$ une inconnue t dont

le coefficient F soit également différent de 0. Les équations qui donneront les valeurs de x, y, z, s et t pour des valeurs quelconques des autres inconnues (ou lettres) seront, d'après le numéro précédent, de la forme

$$\left.\begin{aligned} T_5 &= Ft + eu + \cdots = 0 \\ S_5 &= Fs + du + \cdots = 0 \\ Z_5 &= Fz + cu + \cdots = 0 \\ Y_5 &= Fy + bu + \cdots = 0 \\ X_5 &+ Fx + au + \cdots = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Si aucun des coefficients numériques ou algébriques des équations I n'a de dénominateur, la méthode sans l'emploi de la division n'en peut pas introduire, et tous les coefficients de ces équations doivent être des nombres entiers, ou des expressions algébriques entières par rapport aux coefficients primitifs.

L'élimination de t, entre l'équation $T_5 = 0$ et les équations (4), nous donne

$$\begin{aligned} EFs &+ (\delta F - Df)\,u + \cdots = 0, \\ EFz &+ (\gamma F - Cf)\,u + \cdots = 0, \\ EFy &+ (\beta F - Bf)\,u + \cdots = 0, \\ EFx &+ (\alpha F - Af)\,u + \cdots = 0, \end{aligned}$$

ou, comme par hypothèse E n'est pas nul,

$$\left.\begin{aligned} S_4 &= Fs + \left(\frac{\delta F - Df}{E}\right) u + \cdots = 0, \\ Z_4 &= Fz + \left(\frac{\gamma F - Cf}{E}\right) u + \cdots = 0, \\ Y_4 &= Fy + \left(\frac{\beta F - Bf}{E}\right) u + \cdots = 0, \\ X_4 &= Fx + \left(\frac{\alpha F - Af}{E}\right) u + \cdots = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (V)$$

Ces systèmes (5) et (V), qui expriment les valeurs de s, z, y

et x pour des valeurs arbitraires de u, v, w, k, nous donnent pour $u = 1, v = w = \dots = k = 0$,

$$Fs + d = 0 = Fs + \frac{\delta F - Df}{E},$$

$$Fz + c = 0 = Fz + \frac{\gamma F - Cf}{E},$$

$$Fy + b = 0 = Fy + \frac{\beta F - Bf}{E},$$

$$Fx + a = 0 = Fx + \frac{\alpha F - Af}{E};$$

d'où nous tirons

$$d = \frac{\delta F - Df}{E},$$

$$c = \frac{\gamma F - Cf}{E},$$

$$b = \frac{\beta F - Bf}{E},$$

$$a = \frac{\alpha F - Af}{E}.$$

On démontrerait de la même manière que les coefficients de $v, w\dots$ et k des équations (V) sont identiques avec ceux des équations (5) et se réduisent, par conséquent, à des nombres entiers ou des expressions algébriques entières, s'il ne se trouve pas de dénominateur dans le système primitif I.

Donc, après avoir trouvé l'équation $T_5 = 0$, on déterminera les autres équations du système (5) de la manière suivante : *On choisit une inconnue* t *de l'équation* $T_5 = 0$, *dont le coefficient* F *soit différent de* 0, *pour l'éliminer entre l'équation* $T_5 = 0$ *et les quatre équations* (4) *et on divisera les équations résultantes par* E, *le coefficient commun des inconnues dont les valeurs sont exprimées par le système* (4), *et que nous supposons également être différent de* 0. D'après la remarque que nous venons de faire, ces divisions nous donneront des nombres entiers, si les coefficients des équations primitives sont entiers.

Pour ne pas se priver de cet avantage, on commencera par chasser les dénominateurs de toutes les équations données. On choisira alors, dans l'équation $X_1 = 0$, une inconnue x dont le coefficient a_1 soit différent de 0 pour l'éliminer entre les deux premières équations I. Cette élimination et les suivantes seront faites d'après le procédé général, c'est-à-dire que, par exemple, x sera éliminé entre deux équations contenant les termes $4x$ et $-6x$, en multipliant la première par 6 et l'autre par 4, et entre deux équations contenant les termes $4x$ et $0 \cdot x$ en multipliant la seconde par 4. Dans l'équation résultante $Y_2 = 0$, on choisira une inconnue y, multipliée par un coefficient différent de 0, pour l'éliminer entre $X_1 = 0$ et $Y_2 = 0$, et on divisera l'équation résultante par a, pour trouver l'équation $X_2 = 0$; après quoi on éliminera d'emblée x et y entre les équations $Y_2 = 0$, $X_2 = 0$ et $Z_1 = 0$. Le reste des opérations est indiqué par la règle précédente.

5. *Exemple.* — Soient à résoudre les équations :

$$
\begin{aligned}
X_1 &= 2x - 3y + 5z + u + 3v - 13 = 0\\
Y_1 &= x + 2y - 3z + 4u - 5v + 15 = 0\\
Z_1 &= 3x - 5y + 7z + 2u - 3v - 18 = 0\\
U_1 &= 5x - y + 4z + 8u + 2v + 2 = 0\\
V_1 &= 4x + 7y - 2z + 3u + 14v + 12 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_1 &= 2x - 3y + 5z + u + 3v - 13 = 0\\
\hline
2Y_1 &= 2x + 4y - 6z + 8u - 10v + 30 = 0\\
-X_1 &= -2x + 3y - 5z - u - 3v + 13 = 0\\
Y_2 &= 7y - 11z + 7u - 13v + 43 = 0\\
\hline
7X_1 &= 2.7x - 3.7y + 35z + 7u + 21v - 91 = 0\\
3Y_2 &= 3.7y - 33z + 21u - 39v + 129 = 0\\
2.7x &+ 2z + 28u - 18v + 38 = 0\\
X_2 &= 7x + z + 14u - 9v + 19 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
7Z_1 = & 3.7x & - 5.7y & + 49z & + 14u & - 21v & - 126 = 0 \\
5Y_2 = & & 5.7y & - 55z & + 35u & - 65v & + 215 = 0 \\
-3X_2 = & -3.7x & & - 3z & - 42u & + 27v & - 57 = 0 \\
Z_2 = & & & - 9z & + 7u & - 59v & + 32 = 0 \\
\hline
-9Y_2 = & & - 9.7y & + 9.11z & - 63u & + 117v & - 387 = 0 \\
11Z_3 = & & & - 9.11z & + 77u & - 649v & + 352 = 0 \\
 & & - 9.7y & & + 14u & - 532v & - 35 = 0 \\
Y_3 = & & - 9y & & + 2u & - 76v & - 5 = 0 \\
\hline
9X_2 = & 9.7x & & + 9z & + 126u & - 81v & + 171 = 0 \\
Z_3 = & & & - 9z & + 7u & - 59v & + 32 = 0 \\
 & 9.7x & & & + 133u & - 140v & + 203 = 0 \\
X_3 = & 9x & & & + 19u & - 20v & + 29 = 0 \\
\hline
9U_1 = & 5.9x & - 9y & + 4.9z & + 72u & + 18v & + 18 = 0 \\
4Z_3 = & & & - 4.9z & + 28u & - 256v & + 128 = 0 \\
- Y_3 = & & 9y & & - 2u & + 76v & + 5 = 0 \\
-5X_3 = & -5.9x & & & - 95u & + 100v & - 105 = 0 \\
U_4 = & & & & 3u & - 42v & + 6 = 0 \\
\hline
3Z_3 = & & & - 3.9z & + 3.7u & - 177v & + 96 = 0 \\
-7U_4 = & & & & - 3.7u & + 294v & - 42 = 0 \\
 & & & - 3.9z & & + 117v & + 54 = 0 \\
Z_4 = & & & - 3z & & + 13v & + 6 = 0 \\
\hline
-3Y_3 = & & 9.3y & & - 2.3u & + 228v & + 15 = 0 \\
2U_4 = & & & & 2.3u & - 84v & + 12 = 0 \\
 & & 9.3y & & & + 144v & + 27 = 0 \\
Y_4 = & & 3y & & & + 16v & + 3 = 0 \\
\hline
3X_3 = & 9.3x & & & + 19.3u & - 60v & + 87 = 0 \\
-19U_4 = & & & & - 19.3u & + 798v & - 114 = 0 \\
 & 9.3x & & & & + 738v & - 27 = 0 \\
X_4 = & 3x & & & & + 82v & - 3 = 0 \\
\hline
3V_1 = & 4.3x & + 7.3y & - 2.3z & + 3.3u & + 342v & + 36 = 0 \\
-3U_4 = & & & - & 3.3u & + 126v & - 18 = 0 \\
-2Z_4 = & & & 2.3z & & - 26v & - 12 = 0 \\
-7Y_4 = & & - 7.3y & & & - 112v & - 21 = 0 \\
-X_4 = & -4.3x & & & & - 328v & + 12 = 0 \\
V_2 = & & & & & 2v & - 3 = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr}
2U_4 = & 3.2u & - 42.2v + & 12 = 0 \\
42V_3 & & 42.2v - & 126 = 0 \\
& 3.2u & - & 114 = 0 \\
U_5 = & 2u & - & 38 = 0 \\
\hline
-2Z_4 = & 3.2z & - 13.2v - & 12 = 0 \\
13V_3 = & & 13.2v - & 39 = 0 \\
& 3.2z & - & 51 = 0 \\
Z_5 = & 2z & - & 17 = 0 \\
\hline
2Y_4 = & 3.2y & + 16.2v + & 6 = 0 \\
-16U_3 = & & - 16.2v + & 48 = 0 \\
& 3.2y & + & 54 = 0 \\
Y_5 = & 2y & + & 18 = 0 \\
\hline
2X_4 = & 3.2x & + 82.2v - & 6 = 0 \\
-82U_3 = & & - 82.2v + & 246 = 0 \\
& 3.2x & + & 240 = 0 \\
X_5 = & 2x & + & 80 = 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Discussion des équations.

La méthode dont nous venons d'expliquer les règles suppose que nous trouvions dans chacune des équations $X_1 = 0$, $Y_2 = 0$, $Z_3 = 0$, etc., un coefficient différent de 0. Notre exposition resterait incomplète si nous n'examinions pas le cas où tous les coefficients de l'une ou de l'autre de ces équations s'annulent. Nous sommes ainsi forcément conduit à la discussion des équations. Nous la ferons brièvement, non pour résoudre beaucoup de questions nouvelles, mais surtout pour faire voir la grande simplicité avec laquelle les principes que la discussion établit se déduisent des équations auxiliaires qui se présentent dans cette méthode.

Soient les cinq équations

$$
\left.
\begin{array}{l}
X_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1s + e_1t + f_1u + g_1v + h_1w + i_1k = 0, \\
\cdots\cdots\cdots

et supposons que les quatre premières de ces équations nous aient donné le système

$$\left.\begin{aligned} X_4 &= Ex + At + \cdots = 0, \\ Y_4 &= Ey + Bt + \cdots = 0, \\ Z_4 &= Ez + Ct + \cdots = 0, \\ S_4 &= Es + Dt + \cdots = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

dans lequel E est différent de 0.

6. Lemme. *Équivalence du groupe* (4) *et* $T_1 = 0$ *et du groupe* (4) *et* $T_5 = 0$. — En éliminant au moyen des équations (4) les inconnues x, y, z, s de l'équation

$$T_1 = a_5 x + b_5 y + c_5 z + d_5 s + e_5 t + f_5 u + \cdots = 0,$$

nous aurons

$$T_5 = ET_1 - a_5 X_4 - b_5 Y_4 - c_5 Z_4 - d_5 S_4 = Ft + F_1 u + F_2 v + \cdots = 0.$$

Le système $X_4 = 0$, $Y_4 = 0$, $Z_4 = 0$, $S_4 = 0$ et $T_1 = 0$ conduit donc à $T_5 = 0$ et, par consequent, au système $X_4 = 0$, $Y_4 = 0$, $Z_4 = 0$, $S_4 = 0$ et $T_5 = 0$; et réciproquement, ce dernier système conduit à $ET_1 = 0$, et, comme nous supposons E différent de 0, à l'équation $T_1 = 0$, et par conséquent au système $X_4 = 0$, $Y_4 = 0$, $Z_4 = 0$, $S_4 = 0$ et $T_1 = 0$. Donc ces deux systèmes sont équivalents.

7. *Coefficients nuls.* — Si tous les coefficients de l'équation $T_5 = Ft + F_1 u + \cdots + F_4 k = 0$ sont nuls, l'équation $T_5 = 0$ devient $0 = 0$, identité qui n'apprend rien (*) et qui, en théorie, doit être supprimée. Le système formé du groupe (4) et $T_1 = 0$, équivalent à groupe (4) et $T_5 = 0$, devient également équivalent

(*) Dans les sciences d'observation on a souvent affaire à des équations qui ne sont pas d'une exactitude parfaite. Une équation à coefficients nuls peut alors avoir son prix, parce que son parfait accord avec les autres augmente la probabilité de l'exactitude de celles-ci. Mais nous n'avons pas à nous occuper de ces questions.

à groupe (4), l'équation $T_4 = 0$, peut être supprimée et les calculs devront être continués au moyen de la sixième équation du système (I). C'est évidemment la manière dont il faudrait traiter l'équation $X_4 = 0$, si tous ses coefficients étaient nuls. D'ailleurs si

$$T_5 = ET_4 - a_5X_4 - b_5Y_4 - c_5Z_4 - d_5S_4$$

est identiquement nul, l'équation $ET_4 = 0$ ou $T_4 = 0$ n'est qu'une simple conséquence (une combinaison linéaire) des équations (4) et n'exprime aucune relation nouvelle entre les inconnues.

Si tous les coefficients des inconnues qui se trouvent dans l'expression T_5 s'annulent et que le seul coefficient F_4 de k (supposé être un nombre déterminé, différent de 0), soit également différent de 0, l'équation $T_5 = F_4k = 0$, est une absurdité, qui prouve que le système I dont elle serait une conséquence, doit renfermer des contradictions. On peut évidemment dire la même chose de l'équation $X_4 = 0$, si elle se réduisait à $i_4k = 0$, i_4 et k étant différents de 0. Du reste si à l'exception de F_4 tous les coefficients de T_5 s'annulent, c'est-à-dire si les coefficients de l'expression

$$ET_4$$

sont tous, à l'exception de ceux de k, respectivement égaux à ceux de l'expression

$$a_5X_4 + b_5Y_4 + c_5Z_4 + d_5S_4,$$

l'équation

$$ET_4 = 0, \text{ ou } T_4 = 0$$

est incompatible avec l'équation

$$a_5X_4 + b_5Z_4 + c_5Z_4 + d_5S_4 = 0$$

et par conséquent incompatible avec le groupe (4) ou avec les quatre premières équations (I) dont cette équation est une conséquence.

8. *Équivalence du système* (5) *et du système* (1). — L'élimination de t entre $T_5 = 0$ et les équations (4) nous donnera

$$\begin{aligned} FX_4 - AT_5 &= EFx + \cdots = 0, \\ FY_4 - BT_5 &= EFy + \cdots = 0, \\ FZ_4 - CT_5 &= EFz + \cdots = 0, \\ FS_4 - DT_5 &= EFs + \cdots = 0, \end{aligned}$$

et celles-ci divisées par E, qui est, par hypothèse, différent de 0, nous conduiront, si nous leur adjoignons $T_5 = 0$, au système

$$\left.\begin{aligned} X_5 &= Fx + \cdots = 0, \\ Y_5 &= Fy + \cdots = 0, \\ Z_5 &= Fz + \cdots = 0, \\ S^5 &= Fs + \cdots = 0, \\ T_5 &= Ft + \cdots = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

De même que les équations T_5 et celles du groupe (4) conduisent au système (5), celles-ci conduisent réciproquement d'abord naturellement à $T_5 = 0$, et aux équations $FX_4 = 0$, $FY_4 = 0$, $FZ_4 = 0$ et $FS_4 = 0$, et, comme nous supposons également que F n'est pas nul, au groupe (4) et $T_5 = 0$; et l'ensemble de ces cinq équations est, d'après le n° 6, équivalent au groupe (4) et $T_4 = 0$. Et, comme dans les équations des groupes antérieurs formés d'après les règles de notre méthode, les coefficients communs des premiers termes n'ont pu être nuls, le groupe (4) est équivalent au groupe (3) et $S_4 = 0$, le groupe (3) au groupe (2) et $Z_4 = 0$, le groupe (2) à $Y_4 = 1$ et $X_4 = 0$. D'où nous pouvons conclure que le système (5) est équivalent au système I.

9. *Systèmes de lettres qu'on peut regarder comme des inconnues qui dépendent des autres lettres. Systèmes de lettres auxquelles on ne peut pas attribuer des valeurs arbitraires.* — Traitons dans cet examen k comme x, y, etc., c'est-à-dire comme une lettre qui peut désigner ou bien une inconnue ou bien un

nombre arbitraire servant à déterminer les inconnues. Soit le système

$$\left.\begin{aligned} X_5 &= Fx + \alpha u + \alpha_1 v + \alpha_2 w + \alpha_3 k = 0 \\ Y_5 &= Fy + \beta u + \beta_1 v + \beta_2 w + \beta_3 k = 0 \\ Z_5 &= Fz + \gamma u + \gamma_1 v + \gamma_2 w + \gamma_3 k = 0 \\ S_5 &= Fs + \delta u + \delta_1 v + \delta_2 w + \delta_3 k = 0 \\ T_5 &= Ft + \varepsilon u + \varepsilon_1 v \qquad\quad = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

où nous supposons que F, ε et ε_1 différents de 0, tandis que les coefficients de w et k dans l'expression T_5 sont nuls. Nous savons déjà que dans ces hypothèses nous pouvons exprimer les valeurs de x, y, z, s, t ou de x, y, z, s, u ou de x, y, z, s, v en donnant des valeurs quelconques respectivement aux lettres u, v, w, k ou à t, v, w, k ou enfin à u, t, w, k. On a l'habitude d'ajouter qu'on ne peut pas exprimer les valeurs de x, y, z, s, w ni de x, y, z, s, k en fonction des autres lettres, parce que ces inconnues se trouveraient multipliées par 0 dans les équations qui devraient donner leurs valeurs. D'où l'on conclut qu'on ne peut, sans rendre les équations incompatibles, attribuer des valeurs arbitraires à toutes les lettres ni de la combinaison t, u, v, k, ni de la combinaison t, u, v, w. Observons d'abord qu'on peut dire plus généralement qu'on ne le peut pour aucune combinaison (x, t, u, v, par exemple), où entrent les trois lettres t, u, v, à cause de la relation que $T_5 = 0$ établit entre ces lettres.

Les inconnues de la combinaison u, y, z, s, t qui résulte du changement d'une lettre de la combinaison x, y, z, s, t peuvent être exprimées et peuvent seulement être exprimées en fonction de x, v, w, k si, dans X_5, le coefficient α de u est différent de 0, car on peut appliquer à l'équation $X_5 = 0$, ce que nous avons démontré pour $T_5 = 0$.

Les inconnues de la combinaison u, v, z, s, t qui résulte du changement de deux lettres de la combinaison x, y, z, s, t en deux autres lettres peuvent s'exprimer et peuvent seulement s'exprimer en fonction de x, y, w, k si $(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)$ est différent de 0; $(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)$ est le coefficient commun de u et de v dans les deux équations déduites des équations $X_5 = 0$ et $Y_5 = 0$, qui expriment les valeurs de u et de v en fonction de x, y, w, k. Dans

cette hypothèse, on peut trouver u et v pour des valeurs arbitraires de x, y, w, k et puis, en remplaçant u et v par leurs expressions en fonction de x, y, w, k dans Z_5, S_5 et T_5, trouver également z, s, t en fonction des lettres x, y, w, k. Si $(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) = 0$, l'équation qui devait nous donner u et v exprime une simple relation entre x, y, w, k, qui ne permettra pas d'attribuer à chacune de ces lettres une valeur arbitraire. Et ainsi de suite.

10. *Équations homogènes.* — Supposons que dans le système I les coefficients de u, v, w, k soient tous égaux à 0, de sorte qu'il se compose de cinq équations homogènes à cinq inconnues et qu'il est équivalent au système suivant :

$$\begin{aligned} X_4 &= Ex + At = 0, \\ Y_4 &= Ey + Bt = 0, \\ Z_4 &= Ez + Ct = 0, \\ S_4 &= Es + Dt = 0, \\ T_5 &= \quad\; Ft = 0. \end{aligned}$$

Si $F = 0$, l'équation $T_5 = 0$ doit être supprimée et le système se réduit au système (4), et, d'après ce que nous venons de voir et ce qui se voit immédiatement, chacune des inconnues peut être regardée comme un nombre arbitraire duquel dépendent les valeurs des autres. Si F n'est pas nul, nous aurons

$$t = x = y = z = s = 0.$$

---

11. *Solutions générales des équations linéaires.* — La conversion de 2, 3, etc. équations en 2, 3, etc. autres équations qui expriment les valeurs de 2, 3, etc. inconnues en fonction des autres, conduit plus directement aux solutions générales que les méthodes ordinaires. La recherche de ces solutions nous fournira une nouvelle démonstration du principe des coefficients égaux. Ces solutions étant connues, nous serons dans cette étude aussi bref que possible. Naturellement, nous ne nous baserons pas sur la théorie des déterminants, ce qui serait supposer connus les résultats que nous cherchons. Nous nous dispenserons

seulement de reproduire la démonstration très facile du principe suivant : Dans une permutation quelconque de différents chiffres, ceux-ci, comparés deux à deux, se suivront ou bien dans leur ordre naturel, ou bien le plus fort précédera l'autre. En nommant cette dernière position une inversion, on peut diviser les permutations en deux classes : celle des permutations paires, qui comprendra la permutation sans inversion et les permutations qui contiennent un nombre pair d'inversions et la classe des permutations impaires. Une permutation change de classe si l'on y échange un chiffre avec un autre. C'est uniquement la démonstration de ce théorème que nous supposons connue.

Les équations $X_1 = 0$ et $Y_1 = 0$ du système (1) nous donneront

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= (a_1b_2 - a_2b_1)x + (c_1b_2 - c_2b_1)z + \cdots = 0 \\ Y_2 &= (a_1b_2 - a_2b_1)y + (a_1c_2 - a_2c_1)z + \cdots = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

En éliminant x et y entre ces équations et l'équation $Z_1 = 0$ et en examinant la forme du coefficient de Z dans l'équation résultante, on observera facilement que les termes dont il se compose seront des produits de 3 facteurs, que les lettres de ces facteurs seront a, b, c et les indices de ces lettres 1, 2, 3, qu'en les écrivant de manière que les lettres se suivent toujours dans le même ordre, par exemple dans l'ordre alphabétique, les indices formeront les différentes permutations qu'on peut former avec les chiffres 1, 2 et 3, et que les signes des termes dépendent de la classe de ces permutations. On remarquera également que les coefficients des équations (2) ont des propriétés analogues. Une étude plus approfondie nous aurait fait voir que ces propriétés des coefficients pouvaient être prévues *a priori*. Faisons cette étude d'une manière générale.

Désignons par $|a_1b_2c_3d_4|$ ou par $|b_2d_1c_3a_4|$ la somme algébrique de tous les termes dont la partie littérale (le mot formé par les lettres) est *abcd* ou *bdca*, dont les indices forment toutes les permutations (tous les nombres) qu'on peut former avec les chiffres 1, 2, 3, 4, et dont les signes soient + ou —, suivant que les permutations des indices seront de la même classe que la permutation du terme mis entre les barres, ou de la classe

opposée. Lorsque dans celle-ci les chiffres des indices se suivent dans leur ordre naturel, nous nous dispenserons de les écrire, de sorte que $|bcad| = |b_1c_2a_3d_4|$.

Supposons donc que le coefficient de s, dans l'équation $S_4 = 0$ soit $|abcd|$, il nous sera facile de démontrer que les équations (4) seront de la forme

$$\left.\begin{aligned} X_4 &= |abcd|x + |ebcd|t + \cdots = 0, \\ Y_4 &= |abcd|y + |aecd|t + \cdots = 0, \\ Z_4 &= |abcd|z + |abed|t + \cdots = 0, \\ S_4 &= |abcd|s + |abce|t + \cdots = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4).$$

Le coefficient de s est $|abcd|$ par supposition.

En échangeant entre elles, dans les équations (I), d_1, d_2, d_3 et d_4 et c_1, c_2, c_3, c_4, ainsi que les coefficients s et z, les mêmes opérations qui nous auront fait connaître cette valeur du coefficient de s en fonction de t, etc., nous auraient donné la valeur de z en fonction de t, etc., de sorte que le coefficient de z peut se déduire de celui de s par l'échange de d en c et de c en d, et il sera $|abdc|$.

A chaque terme de $|abdc|$ correspond un terme de $|abcd|$ et un seul terme, composé des mêmes facteurs, et réciproquement; par exemple, au terme $\pm a_m b_n d_1 c_3$ correspond le terme $\pm a_m b_n c_3 d_1$, et réciproquement. Mais ces deux termes seront de signes différents, parce que l'échange de 1 et 3 change les classes et que dans les deux coefficients ceux de la classe paire sont positifs. Donc $|abdc| = -|abcd|$, ce qui ne peut pas nous empêcher d'écrire l'équation sous la forme $|abcd|\ z + \text{etc.} = 0$. Le même raisonnement s'applique aux coefficients de y et de x.

De quelque manière qu'on ait éliminé x, y et z pour trouver l'équation $S_4 = 0$, le coefficient de t ne peut différer de celui de s que par le changement des lettres d en e et doit par conséquent être $|abce|$, si le premier est $|abcd|$. En appliquant la même observation aux trois autres équations, on voit que dans celles-ci il doit être $|ebcd|$, $|aecd|$ et $|abed|$.

L'élimination simultanée de x, y, z, s entre les équations (4) et $T_4 = 0$ conduira (3) à une équation où t aura le coefficient

$$|abcd|e_5 - |abce|d_5 - |abed|c_5 - |aecd|b_5 - |ebcd|a_5.$$

$|abcd|\,e_5$ se compose de tous les termes de $|abcde|$ où l'indice 5 est attaché à la lettre e. Or $-|abce|\,d$ se compose de tous les termes de $-|abced|$, où l'indice 5 est attaché à la lettre d, ou bien, comme d'après l'observation que nous venons de faire, $-|abced| = |abcde|$, de tous les termes de $|abcde|$, où l'indice 5 est attaché à la lettre d. De même $-|abed|\,c_5$, $-|aecd|\,b_5$, $-|ebcd|\,a_5$ se composent de tous les termes de $|abcde|$, où l'indice 5 est attaché aux lettres c, b et a.

Donc la somme des termes du coefficient de t est égale à la somme des termes de l'expression $|abcde|$ où l'indice 5 est attaché à l'une ou l'autre des lettres a, b, c, d et e, c'est-à-dire égal à $|abcde|$.

Les deux premières équations (I) conduisent à l'expression générale des valeurs de x et y, multipliées par $|ab|$; donc les trois premières conduisent aux valeurs de x, y et z, multipliées par le coefficient commun $|abc|$, et par conséquent les quatre premières aux valeurs de x, y, z et s, multipliées par $|abcd|$, etc. Ce qui démontre le principe des coefficients égaux et indique leurs valeurs.

On en déduit facilement la règle suivante : pour tirer de cinq équations les valeurs de cinq inconnues x, y, z, s, t, exprimées en fonction des autres inconnues (ou lettres), u, v, w, k, former l'expression $|a_1\,b_2\,c_3\,d_4\,e_5|$, où les lettres se rapportent aux coefficients de x, y, z, s, t dans les équations (I). Cette expression sera le coefficient commun de x, y, z, s et t. Les coefficients de u, v, w, k, dans chacune des cinq équations, se trouveront, en changeant dans le coefficient de l'inconnue, la lettre qui se rapporte à cette inconnue, en celle qui se rapporte à u, v, w et k. De sorte que ces équations seront

$$|abcde|x + |fbcde|u + |gbcde|v + \cdots = 0$$
$$|abcde|y + |afcde|u + |agcde|v + \cdots = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et pour

$$u = 1, \quad v = w = k = 0,$$
$$|abcde|x + |fbcde| = 0, \text{ etc.}$$

12. ***Avantages de la méthode.***— Les p équations déduites par cette méthode des p premières équations d'un système de n

équations à $(n+1)$ termes, auront chacune $(n-p+2)$ termes. Pour passer du système de ces p équations à celui de $(p+1)$ équations à $(n-p+1)$ termes, nous devrons 1° éliminer simultanément au moyen de ces p équations p inconnues de la $(p+1)^e$ équation (I). En faisant abstraction des termes à éliminer, dont nous pouvons nous dispenser de calculer les coefficients, parce qu'ils devront se détruire deux à deux, nous aurons dans chacune des p équations du système p et dans la $(p+1)^e$ équation (I) à multiplier $(n-p+1)$ termes, par conséquent, à faire $(p+1)(n-p+1)$ multiplications ; 2° nous devrons, entre l'équation à $(n-p+1)$ termes, qui résulte de cette élimination, et chacune des p équations du groupe (p), éliminer une nouvelle inconnue. Nous ne multiplierons ni les premiers termes des équations (p) (ceux de l'inconnue qui ne se trouve pas dans l'équation à $n-p+1$ termes), ni les deux termes qui devront être éliminés, mais nous nous contenterons d'indiquer les multiplications à faire. Pour chacune des p éliminations nous aurons à faire $2(n-p)$, ou en tout, $2p(n-p)$ multiplications.

Le nombre des multiplications que nous aurons à faire pour passer successivement d'une équation à $(n+1)$ termes à un système de 2 équations à n termes, puis à un système de 3 équations à $(n-1)$ termes, etc., jusqu'au système de n équations à 2 termes, qui nous donne les solutions des équations (I), sera égal à la somme de toutes les valeurs de

$$(p+1)(n-p+1)+2p(n-p),$$

en y supposant successivement $p=1$, $p=2$, etc., et $p=n-1$ et sera

$$\sum\{(p+1)(n-p+1)+2p(n-p)\}=\frac{n^3+2n^2-n-2}{2}=\frac{(n+2)(n+1)(n-1)}{2}.$$

D'après la méthode ordinaire, par addition et soustraction :

1° Pour éliminer une inconnue entre deux équations à p inconnues ou à $(p+1)$ termes, il faudra, en faisant abstraction des deux termes de ces inconnues, qui doivent s'entre-détruire, multiplier p termes de chacune des deux équations ou faire $2p$

multiplications. Pour réduire un système de p équations à un système de $(p-1)$ équations, il faut $(p-1)$ fois répéter cette opération ou faire $2p(p-1)$ multiplications. Pour passer successivement d'un système de n équations à un système de $(n-1)$, de celui-ci à un système de $(n-2)$ inconnues, etc., et enfin d'un système de 2 équations à 2 inconnues à une équation à une inconnue, faire $\Sigma 2p(p-1)$ multiplications, en désignant par cette expression la somme de toutes les valeurs de $2p(p-1)$ pour $p=2$, $p=3$, etc., et $p=n$.

Après avoir trouvé les équations $mx+n=0$, $oy+p=0$, etc., qui donnent les valeurs de $(p-1)$ inconnues, on devra, pour trouver la p^e, éliminer d'abord x entre une équation à 2 termes et une équation à $(p+1)$ termes, puis y entre une équation à 2 et une équation à p termes, etc., et finalement la $(p-1)^e$ inconnue entre une équation à 2 et une autre à 3 termes, et par conséquent faire $(1+p)+p+(p-1)+\ldots+3=\frac{(p+4)(p-1)}{2}$ multiplications. Pour tirer de cette manière la valeur d'une seconde inconnue d'une équation à 2 inconnues, celle d'une troisième d'une équation à 3 inconnues, etc., et la n^e d'une équation à n inconnues, on aura un nombre de multiplications à faire qui s'exprimera par la somme de toutes les valeurs de $\frac{(p+4)(p-1)}{2}$ pour $p=2$, $p=3\ldots$ et $p=n$. Cette méthode exige donc

$$\Sigma\left\{2p(p-1)+\frac{(p+4)(p-1)}{2}\right\}=\frac{5n^3+6n^2-11n}{6}$$

multiplications.

Le rapport entre les deux nombres que nous venons de trouver est

$$\frac{3n^3+6n^2-3n-6}{5n^3+6n^2-11n}=\frac{3n^2+9n+6}{5n^2+11n}.$$

Les divisions que notre méthode impose ne doivent pas être regardées comme une charge dont la méthode ordinaire dispense le calculateur, mais comme un très grand avantage, même comme un avantage plus précieux que celui de la réduction des opérations. Les divisions ne simplifient pas seulement les calculs, mais lorsqu'elles donnent des quotients entiers, elles fournissent une

preuve d'un très grand poids de la justesse des calculs. Il est très probable qu'une erreur dans un nombre sera indiquée aussitôt que ce nombre concourra à former un autre nombre qui devra être divisible par un nombre tant soit peu élevé, et si ce n'était pas le cas pour le premier nombre qui dépend du nombre inexact, il est en général encore beaucoup plus probable que l'erreur sera indiquée dans les calculs subséquents. En désignant les coefficients mal calculés, elle facilite aussi beaucoup la recherche des erreurs. Sans doute il y a moyen d'indiquer également pour les méthodes ordinaires les facteurs à supprimer, et nous allons le faire. Mais les erreurs y sont moins immédiatement reconnues et la recherche en est plus compliquée.

13. *Méthodes ordinaires. Facteurs communs.* — Pour compléter cette étude, nous indiquerons une manière d'employer les méthodes ordinaires, qui fera découvrir facilement les facteurs communs qu'elles introduisent dans les équations. Nous déduirons un système de $(m-1)$ équations à $(m-1)$ inconnues d'un système de m équations à m inconnues, en choisissant dans la première équation de celui-ci une inconnue dont le coefficient soit différent de 0, pour éliminer cette inconnue entre cette équation et chacune des autres du même système. De cette manière nous passerons successivement du système primitif I, en supposant, comme nous venons de le dire, a_1, β_1, C_1 différents de 0, aux systèmes

$$\left.\begin{aligned} &\beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 s + \cdots = 0,\\ &\beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 s + \cdots = 0,\\ &\beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 s + \cdots = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

où l'on a

$$\beta_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1; \quad \gamma_1 = a_1 c_2 - a_2 c_1; \text{ etc.}$$
$$\beta_2 = a_1 b_3 - a_3 b_1; \quad \gamma_2 = a_1 c_3 - a_3 c_1; \text{ etc.}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{aligned} &C_1 z + D_1 s + E_1 u + \cdots = 0,\\ &C_2 z + D_2 s + E_2 u + \cdots = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

où

$$C_1 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1; \quad D_1 = \beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1; \text{ etc.}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 s + N_1 u + \cdots &= 0, \\ \cdots\cdots &= 0, \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \text{(IV)}$$

où

$$M_1 = C_1D_2 - C_2D_1; \quad N_1 = C_1E_2 - C_2E_1; \text{ etc.}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Tous les coefficients du système (III) sont divisibles par a_1. En effet, nous avons, par exemple

$$C_1 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = (a_1b_2 - a_2b_1)(a_1c_3 - a_3c_1) - (a_1b_3 - a_3b_1)(a_1c_2 - a_2c_1)$$

et l'on voit sans peine que les seuls des huit termes de ces produits, qui ne sont pas divisibles par a_1

$$-a_2b_1a_3c_1 \quad \text{et} \quad +a_3b_1a_2c_1$$

se détruisent.

Les coefficients du système (IV), qui a été déduit des systèmes (II) et (III) absolument comme le système (III) l'a été des systèmes (I) et (II), doivent par conséquent être divisibles par β_1. Ajoutons qu'ils ne perdent pas ce facteur commun, si on les déduit des coefficients du système (III) divisés par a_1. En effet, on obtiendra alors les coefficients M_1, N_1, etc., divisés par $(a_1)^2$, qui ne peuvent, par cette division, cesser d'être divisibles par $\beta_1 = a_1b_2 - a_2b_1$, quantité première avec a_1. On pourrait du reste, par le calcul de leurs valeurs, démontrer directement cette divisibilité. On divisera donc le système (III) par a_1, de ce nouveau système (3) on déduira un nouveau système

$$\left.\begin{aligned} m_1 s + n_1 u + \cdots &= 0, \\ \cdots\cdots &= 0, \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (4)$$

qu'on divisera par β_1. Le système (5) qui sera déduit des systèmes II, (3) et (4) absolument comme le système (4) le fut des systèmes I, (II) et (3), sera divisé par le coefficient de Z qui a servi à former le système (4) (c'est-à-dire $C_1 : a_1$), et ainsi de suite.

Il n'est peut-être pas superflu d'observer que ce raisonnement suppose qu'on ait commencé les opérations par chasser les dénominateurs et que l'élimination se fasse suivant la méthode générale, de la manière que nous avons expliquée à la fin du n° 4.

II

Démonstration par la théorie des déterminants. Calcul des déterminants.

14. *Expression des déterminants en fonction de leurs mineurs.* Nous avons vu (11) que

$$|abcde| = |abcd|e_5 - |abce|d_5 - |abed|c_5 - |aecd|b_5 - |ebcd|a_5.$$

Cette formule ne diffère que par sa forme de la formule

$$|abcde| = |abcd|e_5 - |abce|d_5 + |abde|c_5 - |acde|b_5 + |bcde|a_5,$$

qu'on emploie ordinairement pour décomposer un déterminant en produits d'éléments d'une ligne par les mineurs qui leur correspondent. Pour déduire la première de la seconde, il faudrait faire avancer e dans le 3e terme de celle-ci d'un rang, dans le 4e de 2, dans le 5e de 3 rangs et ainsi de suite, si le déterminant était d'un ordre supérieur; et comme cela change alternativement les signes des déterminants, changer, à partir du 3e terme du second membre, les signes des termes de rang impair qui sont positifs et maintenir les signes des autres qui sont négatifs. Il se pourrait que dans d'autres recherches encore, la première forme de la formule fût plus commode, parce que la règle des signes s'énonce plus facilement.

15. *Corollaire I.* — Si la ligne 5 est identique avec une des autres lignes, la ligne 3 par exemple, $|\,abcde\,|$ s'annule et la première formule devient

$$|abcd|e_5 = |abce|d_5 + |abed|c_5 + |aecd|b_5 + |ebcd|a_5.$$

Donc un déterminant, multiplié par un élément d'une colonne qu'il ne contient pas, mais appartenant à une ligne qu'il renferme,

est égal à la somme des produits analogues qu'on peut former en permutant successivement chaque lettre du premier avec la lettre de cet élément.

16. *Corollaire II.* — Ce principe peut être généralisé de la manière suivante : Le produit de deux déterminants dont le premier contient toutes les lignes (chiffres) du second, est égal à la somme des produits analogues qu'on peut former en permutant successivement la même lettre du premier avec chaque lettre du second. C'est ainsi, par exemple, que

$$\begin{aligned} &|mno|\,|abcd| \\ = &|mna|\,|obcd| + |mnb|\,|aocd| + |mnc|\,|abod| + |mnd|\,|abco|. \end{aligned}$$

En effet, pour chaque terme du premier déterminant, par exemple pour $-m_2n_1o_3$ l'équation

$$\begin{aligned} -m_2n_1o_3|abcd| = &-m_2n_1a_3|obcd| - m_2n_1b_3|aocd| \\ &-m_2n_1c_3|abod| - m_2n_1d_3|abco| \end{aligned}$$

subsiste et n'est autre chose que l'équation du numéro précédent, multipliée par $-m_2\,n_1$; donc l'égalité existe pour la somme de tous les termes de $|\,mno\,|$ multipliés par $|\,abcd\,|$, comme elle est exprimée par l'équation précédente.

D'après une observation qui m'a été faite, ce principe est connu (*).

17. *Théorème concernant le principe de la divisibilité.* — La démonstration directe de la divisibilité, sur laquelle notre méthode est basée (**4**), se déduit facilement du corollaire II, d'après lequel

$$\begin{aligned} |abmn|\,|abcde| = &|aban|\,|mbcde| + |abbn|\,|amcde| + |abcn|\,|abmde| \\ &+ |abdn|\,|abcme| + |aben|\,|abcdm| \\ = &|abcn|\,|abmde| + |abdn|\,|abeme| + |aben|\,|abcdm| \end{aligned}$$

parce que les facteurs $|\,oban\,|$ et $|\,abbn\,|$ s'annulent, comme ayant deux colonnes égales. Il s'ensuit que lorsque dans l'équa-

(*) En effet, M. P. Mansion le mentionne deux fois dans ses *Éléments de la théorie des déterminants*, 4e édition. Exercices 34 et 38

tion du numéro précédent les deux déterminants du premier membre ont une ou plusieurs lettres (colonnes) communes, il suffit, pour trouver le second membre, de permuter successivement une des lettres qui se trouvent uniquement dans le premier déterminant, avec chacune des lettres du second, qui se trouvent uniquement dans celui-ci. Nous n'avons besoin de ce théorème que sous la forme suivante :

$$|abcf|\,|abcde| = |abcd|\,|abcfe| + |abce|\,|abcdf| \quad (^*),$$

c'est-à-dire le *produit de deux déterminants, le premier de* n *et le second de* (n + 1) *lignes, et dont le second comprend toutes les lignes* (*chiffres*), *et toutes les colonnes* (*lettres*) *moins une, du premier, est égal à la somme des deux déterminants analogues, qui se déduisent du premier, en permutant la lettre particulière au premier avec chacune des deux lettres particulières au second.*

Donc la division de

$$|abcf|\,|abcde| - |abce|\,|abcdf| \text{ par } |abcd|$$

doit nous donner le quotient $|abcfe|$, qui est un nombre entier, si tous les éléments des déterminants sont des nombres entiers.

18. *Démonstration de la méthode.* — L'élimination de x, y, z et s entre les équations (4) du n° 3 et l'équation

$$T_1 = 0,$$

conduit, d'après (11), à l'équation

$$T_5 = |abcde|\,t + |abcdf|\,u + \cdots = 0,$$

(*) En écrivant cette formule sous la forme

$$|abcf|\,|abcde| = |abce|\,|abcdf| - |abcd|\,|abcef|$$

et en posant

$$f_4 = 1,$$
$$f_1 = f_2 = f_3 = f_5 = 0,$$

nous aurons

$$|abc|\,|abcde| = |a_1b_2c_3d_4|\,|a_1b_2c_3e_5| - |a_1b_2c_3e_4|\,|a_1b_2c_3d_5|.$$

C'est, au fond, une formule trouvée par Stûdnicka, qui réduit le calcul d'un déterminant au calcul de quatre mineurs et d'un mineur de ces mineurs En l'appliquant au calcul des déterminants, on sera exactement ramené aux opérations des méthodes ordinaires d'élimination.

et l'élimination de t entre celle-ci et

$$S_5 = |abcd|s + |abce|t + ||abcf|u + \cdots = 0,$$

nous donne

$$|abcd|abcde|s + \{|abcf|\,|abcde| - |abce|\,|abcdf|\}u + \cdots = 0.$$

Ou, comme

$$|abcf|\,|abcde| = |abcd|\,|abcfe| + |abce|\,|abcdf|,$$
$$|abcd|\,|abcde|s + |abcd|\,|abcfe|u + \cdots = 0;$$

et, si $|abcd|$ n'est pas nul, on a

$$S_5 = |abcde|s + |abcfe|u + \cdots = 0.$$

On trouvera de même

$$Z_5 = |abcde|z + |abfde|u + \cdots = 0,$$
$$Y_5 = |abcde|y + |afcde|u + \cdots = 0,$$
$$X_5 = |abcde|x + |fbcde|u + \cdots = 0.$$

19. *Vérification des valeurs. Équivalence des systèmes* (I) *et* (5). — En remplaçant x, y, z, s, t dans une des cinq premières équations (I), multipliée par $|abcde|$, par exemple dans $Z_1 = 0$, nous aurons

$$|abcde|Z_1 = \{|abcde|f_3 - |abcdf|e_3 - |abcfe|d_3 - |abfde|e_3 - |afcde|b_3 - |fbcde|a_3\}u + \cdots = 0.$$

Le coefficient de u sera 0 (16), et il en sera de même des coefficients des autres inconnues ou lettres, de sorte que l'équation précédente se réduira à

$$|abcde|Z_1 = 0,$$

et si $|abcde|$ n'est pas nul, à

$$Z_1 = 0.$$

Donc, le système (5), déduit des cinq premières équations du système primitif, y conduit aussi, si $|abcde|$ est différent de 0, et il est, par conséquent, équivalent à l'ensemble de ces cinq équations. Ce raisonnement prouve la justesse de la méthode exposée au n° 4, et il indique les conditions requises pour qu'elle soit praticable.

20. *Calcul des déterminants.* — Résoudre des équations linéaires, c'est calculer des déterminants. Les résoudre par la méthode du n° 2 reviendrait à calculer des déterminants au moyen de leurs mineurs et des mineurs de ceux-ci, etc. Les méthodes générales dont on se sert en pratique pour calculer des déterminants qui dépassent le 3e degré se réduisent aux opérations de la résolution des équations linéaires par les méthodes ordinaires. (V. Günther, *Determinanten-Theorie*, 2e éd., p. 104.)

Il serait plus avantageux de réduire ce calcul aux opérations de la méthode d'élimination, que nous venons d'exposer.

Le tableau suivant indiquera ces opérations pour un déterminant de six colonnes, par des équations à résoudre, dont nous avons démontré la justesse (14 et 17); nous y soulignerons les inconnues à déterminer au moyen d'éléments, ou de déterminants trouvés par les équations antérieures, et nous désignerons les équations par les signes qui, d'après la notation que nous avons constamment employée, désigneraient les équations correspondantes dans la résolution d'un système de six équations linéaires homogènes à six inconnues.

$$Y_2$$

$$|\underline{ab}| = a_1b_2 - a_2b_1$$
$$|\underline{ac}| = a_1c_2 - a_2c_1$$
$$|\underline{ad}| = a_1d_2 - a_2d_1$$
$$|\underline{ae}| = a_1e_2 - a_2e_1$$
$$|\underline{af}| = a_1f_2 - a_2f_1$$

$$X_2$$

$$c_1|ab| = a_1|\underline{cb}| + b_1|ac|$$
$$d_1|ab| = a_1|\underline{db}| + b_1|ad|$$
$$e_1|ab| = a_1|\underline{eb}| + b_1|ae|$$
$$f_1|ab| = a_1|\underline{fb}| + b_1|af|$$

$$Z_3$$

$$|\underline{abc}| = c_3|ab| - b_3|ac| - a_3|cb|$$
$$|\underline{abd}| = d_3|ab| - b_3|ad| - a_3|db|$$
$$|\underline{abe}| = e_3|ab| - b_3|ae| - a_3|eb|$$
$$|\underline{abf}| = f_3|ab| - b_3|af| - a_3|fb|$$

Y_3

$$|ad|\,|abc| = |ab|\,|\underline{adc}| + |ac|\,|abd|$$
$$|ae|\,|abc| = |ab|\,|\underline{aec}| + |ac|\,|abe|$$
$$|af|\,|abc| = |ab|\,|\underline{afc}| + |ac|\,|abf|$$

X_3

$$|db|\,|abc| = |ab|\,|\underline{dbc}| + |cb|\,|abd|$$
$$|eb|\,|abc| = |ab|\,|\underline{ebc}| + |cb|\,|abe|$$
$$|fb|\,|abc| = |ab|\,|\underline{fbc}| + |cb|\,|abf|$$

S_4

$$|\underline{abcd}| = d_4|abc| - c_4|abd| - b_4|adc| - a_4|dbc|$$
$$|\underline{abce}| = c_4|abc| - c_4|abe| - b_4|aec| - a_4|ebc|$$
$$|\underline{abcf}| = f_4|abc| - e_4|abf| - b_4|afc| - a_4|fbc|$$

Z_4

$$|abe|\,|abcd| = |abc|\,|\underline{abed}| + |abd|\,|abce|$$
$$|abf|\,|abcd| = |abc|\,|\underline{abfd}| + |abd|\,|abcf|$$

Y_4

$$|aec|\,|abcd| = |abc|\,|\underline{aecd}| + |adc|\,|abce|$$
$$|afc|\,|abcd| = |abc|\,|\underline{afcd}| + |adc|\,|abcf|$$

X_4

$$|ebc|\,|abcd| = |abc|\,|\underline{ebcd}| + |dbc|\,|abce|$$
$$|fbc|\,|abcd| = |abc|\,|\underline{fbcd}| + |dbc|\,|abcf|$$

T_5

$$|\underline{abcde}| = e_5|abcd| - d_5|abce| - c_5|abed| - b_5|aecd| - a_5|ebcd|$$
$$|\underline{abcdf}| = f_5|abcd| - d_5|abcf| - c_5|abfd| - b_5|afcd| - a_5|fbcd|$$

S_5

$$|abcf|\,|abcde| = |abcd|\,|\underline{abefe}| + abce|\,|abcdf|$$

Z_5

$$|abfd|\,|abcde| = |abcd|\,|\underline{abfde}| + |abcd|\,|abcdf|$$

$$Y_5$$

$$|a/cd|\ |abcde| = |abcd|\ |\underline{a/cde}| + |abcd|\ |abcd/|$$

$$X_5$$

$$|/bcd|\ |abcde| = |abcd|\ |\underline{/bcde}| + |ebcd|\ |abcd/|$$

$$U_6$$

$$|\underline{abcdef}| - f_6|abcde| - e_6|abcd/| - d_6|abcfe| - c_6|abfde| - b_6|afcde| - a_6|/bcde|.$$

On ne se contentera pas d'indiquer, sous forme de quotient, les valeurs des inconnues qui se trouvent dans les seconds membres de ces équations. Si tous les éléments sont des nombres entiers, ces déterminants devront également être entiers.

Mais pour que les équations qui donnent leurs valeurs ne deviennent pas illusoires, il faut que ni a_1, l'un quelconque des coefficients de la première équation (1), ni $|ab|$, l'un quelconque des premiers membres de Y_2, ni $|abc|$, l'un quelconque des premiers membres de Z_3, ni $|abcd|$, l'un quelconque des premiers membres de S_4 ne soit nul.

Supposons que $|ab|$ soit différent de 0 et que tous les premiers membres des équations Z_3 s'annulent; tous les déterminants qui comprennent les trois lignes 1, 2 et 3, par exemple $|bcdef|$, s'annuleront. Car, en employant un moyen dont nous nous sommes déjà servi pour transformer des formules, nous aurons

$$|abm|\ |bcdef| = |abc|\ |bmdef| + |abe|\ |bcmef| + |abe|\ |bcdmf| + |abf|\ |bcdem|,$$

et pour

$$m_1 = m_2 = 0 \quad \text{et} \quad m_3 = 1,$$
$$|ab|\ |bcdef| = 0;$$

et comme, par supposition, $|ab|$ est différent de 0,

$$|bcdef| = 0.$$

Rapport sur le mémoire de M. l'abbé E.-J. Clasen, par P. Mansion.

1. *Aperçu général.* Les diverses méthodes élémentaires de résolution des équations linéaires exposées dans les traités d'algèbre (méthodes par comparaison, par substitution et par addition et soustraction) ne diffèrent pas, au fond, l'une de l'autre et présentent toutes les mêmes inconvénients. Du moment que l'on considère plus de deux équations, elles introduisent nécessairement, dans les équations auxiliaires qui conduisent aux valeurs des inconnues, des facteurs communs à tous les coefficients de celles-ci. A cause de cette circonstance, au point de vue pratique, les calculs numériques sont plus pénibles qu'ils ne devraient l'être et, au point de vue théorique, il est difficile d'arriver, par cette voie, aux formules générales donnant les valeurs des inconnues.

La théorie des déterminants (ou la méthode équivalente des multiplicateurs de Bezout) conduit à ces formules générales; mais, en pratique, elles sont presque stériles, tant il est fastidieux de calculer un déterminant de plus de 25 éléments, au moyen de ses mineurs, des mineurs de ses mineurs, et ainsi de suite. En outre, cette méthode de résolution, où les calculs ne sont pas réversibles, exige des calculs spéciaux pour la vérification des valeurs des inconnues, d'autres calculs encore pour traiter les cas d'indétermination et d'incompatibilité.

La méthode nouvelle de M. l'abbé Clasen est, au point de vue pratique, aussi élémentaire que celles dont nous parlions plus haut, et conduit à des calculs moins pénibles pour deux raisons : d'abord, elle signale et fait disparaître les facteurs communs aux divers coefficients des équations auxiliaires aussitôt qu'ils se présentent; ensuite, elle diminue de plus d'un cinquième le nombre des opérations numériques, grâce à l'existence de certains coefficients égaux dans les équations auxiliaires.

Au point de vue théorique, elle conduit d'une manière progressive, dans leur ordre naturel, à tous les résultats que donne l'emploi direct des déterminants, et cela par des calculs réver-

sibles, qui rendent inutile toute vérification des valeurs trouvées et permettent de traiter immédiatement les cas où il y a indétermination ou incompatibilité.

Par contre-coup, la *méthode des coefficients égaux* (comme il nous semble qu'on pourrait l'appeler) conduit à un procédé nouveau de calcul numérique des déterminants, beaucoup plus expéditif que le procédé ordinaire.

L'auteur expose la méthode nouvelle sous une forme élémentaire, en partant d'idées analogues à celles qui sont la base de la méthode des coefficients indéterminés. Il en déduit les formules générales qui donnent les valeurs des inconnues, puis il montre que l'on retrouve ainsi les résultats auxquels conduit la théorie des déterminants. Enfin, s'appuyant sur cette dernière théorie, il établit d'une seconde manière les fondements de sa méthode.

Dans notre analyse de son travail, nous emploierons uniquement la théorie des déterminants, qui nous est plus familière et qui permet une exposition plus rapide, sinon plus claire, de la *méthode des coefficients égaux.*

2. *Exposition générale de la méthode des coefficients égaux.*

Premier groupe d'équations. Considérons, pour abréger, seulement cinq équations

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1u + e_1v = f_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2u + e_2v = f_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_2)$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3u + e_3v = f_3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_3)$$
$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4u + e_4v = f_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_4)$$
$$a_5x + b_5y + c_5z + d_5u + e_5v = f_5, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_5)$$

Second groupe. Éliminons x entre les deux premières équations en formant la combinaison $-a_2(1_1) + a_1(1_2)$. Nous trouverons, en employant, pour désigner les déterminants, ici et dans la suite, une notation abrégée qui s'explique d'elle-même,

$$(ab)\,y + (ac)\,x + (ad)\,u + (ae)\,v = (af) \quad . \quad . \quad . \quad (2_2)$$

Éliminons ensuite y entre (1_1) et (2_2), en formant la combinaison $-(ab)(1_1) + b_1(2_2)$.

Il vient

$$-a_1(ab)x + [b_1(ac) - c_1(ab)]z + [b_1(ad) - d_1(ab)]u + [b_1(ae) - e_1(ab)]v = b_1(af) - f_1(ab).$$

Mais on a

$$b_1(ac) - c_1(ab) = b_1(a_1c_2 - a_2c_1) - c_1(a_1b_2 - a_2b_1) = a_1(b_1c_2 - b_2c_1) = a_1(bc)$$

et de même pour les coefficients de u, v et le terme tout connu de la dernière équation. Donc, en divisant celle-ci par a_1, elle devient

$$-(ab)x + (bc)z + (bd)u + (be)v = (bf) \quad . \quad . \quad . \quad (2_4)$$

Il est clair que l'on peut aussi déduire directement cette relation de (1_1), (1_2), comme on l'a fait pour (2_2).

Troisième groupe. Rapprochons maintenant les équations (2_1), (2_2), (1_3) :

$$-(ab)x + (bc)x + (bd)u + (bc)v = (bf), \quad . \quad . \quad (2_1)$$
$$(ab)y + (ac)z + (ad)u + (ae)v = (af), \quad . \quad . \quad (2_2)$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3u + c_3v = f_3 \quad . \quad . \quad . \quad (1_3)$$

Multiplions la première par a_3, la deuxième par $-b_3$, la troisième par (ab) et ajoutons ; il viendra

$$(abc)z + (abd)u + (abe)v = (abf) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3_3)$$

comme on le trouverait, par la théorie des déterminants, en éliminant x, y entre (1_1), (1_2), (1_3).

Éliminons z entre (2_2) et (3_3), en formant la combinaison $(abc)(2_2) - (ac)(3_3)$. L'équation résultante en y, u, v sera

$$(abc)(ab)y + [(ad)(abc) - (ac)(abd)]u + [(ae)(abc) - (ac)(abe)]v = (af)(abc) - (ac)(abf). \quad (4)$$

Calculons le coefficient de u. Nous avons, d'après les principes élémentaires de la théorie des déterminants,

$$(ad)(abc) - (ac)(abd) = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & 0 & 0 & c_1 \\ a_2 & d_2 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & -a_1 & -b_1 & 0 \\ a_2 & 0 & -a_2 & -b_2 & 0 \\ 0 & d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & -b_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & -b_2 & 0 \\ 0 & d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(b)(acud)$$

On trouve de même

$$(ae)(abc) - (ac)(abe) = -(ab)(ace),$$
$$(af)(abc) - (ac)(abf) = -(ab)(acf).$$

L'équation (A) devient donc, en divisant par $-(ab)$,

$$-(abc)\,y + (acd)\,u + (ace)\,v = (acf). \quad \ldots \quad (3_3)$$

En éliminant z entre (2_1) et (3_3), nous obtiendrons

$$-(ab)(abc)\,x + u[(bd)(abc) - (bc)(abd)] + v[(be)(abc) - (bc)(abe)] = (bf)(abc) - (bc)(abf).$$

On trouvera, comme plus haut, que les coefficients de u et v, et le second membre de cette équation, se réduisent respectivement à

$$-(ab)(bcd), \quad -(ab)(bce), \quad -(ab)(bcf).$$

En divisant par (ab) elle devient donc

$$(abc)\,x + (bcd)\,u + (bce)\,v = (bcf). \quad \ldots \quad (3_4)$$

Cette équation ne diffère de (3_2) que par l'échange des lettres a et b, x et y, et évidemment, au point de vue théorique, elle peut s'en déduire sans nouveau calcul.

Quatrième groupe. Rapprochons maintenant de cette équation (3_2), (3_3) et (1_4). Nous aurons le système

$$\begin{aligned}
(abc)x &\quad + (bcd)u + (bce)v = (bcf), \quad \ldots \quad (3_4)\\
-(abc)y &\quad + (acd)u + (ace)v = (acf), \quad \ldots \quad (3_2)\\
(abc)z &+ (abd)u + (abe)v = (abf), \quad \ldots \quad (3_3)\\
a_4x + b_4y + c_4z &+ d_4u + e_4v = f_4. \quad \ldots \quad (1_4)
\end{aligned}$$

Ajoutons ces équations multipliées respectivement par $-a_4$, b_4, $-c_4$, (abc); nous trouverons

$$(abcd)u + (abce)v = (abcf). \quad \ldots \quad (4_2)$$

Éliminons u entre cette équation et (3_3). Il viendra

$$(abc)(abcd)z + v\big[(abe)(abcd) - (abd)(abce)\big] = (abf)(abcd) - (abd)(abcf). \quad (B)$$

Le coefficient de v peut s'écrire $-(abc)(abde)$ (*). On trouve de même, pour le terme tout connu de (B), $-(abc)(abdf)$. Cette équation devient donc, après division par $-(abc)$,

$$-(abcd)z + (abde)v = (abdf). \quad \ldots \quad (4_3)$$

On trouve ensuite, par des calculs analogues, ou en remplaçant c par b ou a, z par y ou x, et inversement,

$$(abcd)y + (acde)v = (acdf), \quad \ldots \quad (4_1)$$
$$-(abcd)x + (bcde)v = (bcdf). \quad \ldots \quad (4_1)$$

Cinquième groupe. Multiplions maintenant (4_1), (4_2), (4_3), (4_4), (1_5), respectivement par a_5, $-b_5$, c_5, $-d_5$, $(abcd)$ et ajoutons. Il viendra

$$(abcde)v = (abcdf) \quad \ldots \quad (5_5)$$

En éliminant v entre celle-ci et (4_4), on trouve d'abord

$$u(abcd)(abcde) = (abcf)(abcde) - (abce)(abcdf).$$

(*) L'auteur prouve, d'une manière simple et générale, que l'on a l'égalité

$$(abc.\ gh) = \frac{(abc\ldots gh)\ abc\ldots gh) - (abc\ldots g)(abc\ldots gh)}{(abc\ldots g)} \quad \ldots \quad (L)$$

Le second membre est égal à $-(abcd)(abcef)$, et par suite, on a

$$-u(abcde) = (abcef). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5_4)$$

On trouve de même

$$z(abcde) = (abdef), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5_3)$$
$$-y(abcde) = (acdef), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5_2)$$
$$x(abcde) = (bcdef). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5_1)$$

Vérification des valeurs trouvées. Les calculs que nous venons d'exposer peuvent être tous effectués en sens inverse, de manière que des équations (5_1), (5_2), (5_3), (5_4), (5_5) on peut déduire les relations (1_1), (1_2), (1_3), (1_4), (1_5). Les systèmes (1) et (5) sont donc équivalents et il n'y a pas besoin, comme dans la méthode de résolution par les déterminants, de vérifier, par un calcul nouveau, les valeurs données par les équations (5), en les substituant dans les équations (1).

3. *Cas d'indétermination et d'incompatibilité.* Dans ce qui précède nous avons laissé de côté les cas où les divisions indiquées seraient impossibles parce que les diviseurs seraient nuls. Quand cela arrive, les équations données sont incompatibles ou indéterminées, comme on va le voir ; la méthode des coefficients égaux permet de traiter ces cas avec la plus grande facilité et d'une manière plus naturelle que celle qui repose exclusivement sur l'emploi des déterminants.

1° On peut toujours supposer différent de zéro l'un des coefficients des inconnues dans (1_1), a_1 par exemple. Les opérations qui donnent les équations (2_1), (2_2) sont donc toujours possibles.

On déduit alors aisément de l'équation (2_2), qui peut s'écrire

$$-a_2(1_1) + a_1(1_2) = 0,$$

que *si* $(ab) = 0$, $(ac) = 0$, $(ad) = 0$, $(ae) = 0$, (1_2) *est compatible avec* (1_1) *seulement dans le cas où l'on a aussi* $(af) = 0$. Si les équations sont compatibles, x s'exprime au moyen de z, u, v, qui sont arbitraires. On trouve de même les conditions nécessaires et suffisantes pour que (1_3), (1_4), (1_5), soient compatibles avec (1_1).

2° Si l'un des coefficients des inconnues dans (2_2) est différent de zéro, (ab) par exemple, les calculs qui donnent (3_1), (3_2), (3_3) sont possibles.

II. On déduit de là, par le procédé habituel,

$$(abc) = a_3(bc) - b_3(ac) + c_3(ab), \quad (abd), \quad (abe), \quad (abf),$$

puis, par (L), (acd), (ace), (acf), (bcd), (bce), (bcf); ainsi

$$(acd) = \frac{(ac)(abd) - (ad)(abc)}{(ab)}, \qquad (bcd) = \frac{(bc)(abd) - (bd)(abc)}{(ab)}$$

III. Le procédé habituel donne ensuite $(abcd)$, $(abce)$, $(abcf)$, le théorème (L) permet de trouver $(abde)$ et $(abdf)$, $(acde)$, $(acdf)$, $(bcde)$ et $(bcdf)$. Ainsi

$$(abde) = \frac{(abd)(abce) - (abe)(abcd)}{(abc)},$$

$$(acde) = \frac{(acd)(abce) - (ace)(abcd)}{(abc)},$$

$$(bcde) = \frac{(bce)(abce) - (bce)(abcd)}{(abc)}.$$

IV. On trouve $(abcde)$, $(abcdf)$ par le procédé habituel, et $(abcef)$, $(abdef)$, $(acdef)$, $(bcdef)$, par (L).

V. Enfin $(abcdef)$ s'obtient par l'addition de ces six mineurs multipliés respectivement par f_6, $-e_6$, d_6, $-c_6$, b_6, $-a_6$.

Dans le cas d'un déterminant d'ordre $(n+1) = N$, le nombre total des multiplications est $(n^\circ\ 4)$ $\frac{N(N-2)(N+1)}{2} + N = \frac{1}{2}N^2(N-1)$, considérablement inférieur à celui que donne la méthode habituelle.

En pratique, pour calculer un déterminant par la méthode qui vient d'être exposée, le procédé le plus facile consistera à opérer comme si l'on avait à résoudre un système de N équations linéaires homogènes, par la méthode des coefficients égaux.

Comme on le voit par cette longue analyse, M. l'abbé Clasen est parvenu à compléter une théorie fondamentale de l'algèbre élémentaire sur laquelle il semblait qu'il n'y eût plus rien à dire après les travaux de M. Rouché. (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1887-1888, t. XII, 1re part., pp. 50-59.)

Dans la méthode habituelle de résolution par les déterminants, la discussion des cas d'indétermination et d'incompatibilité se fait, comme on le sait, au moyen de calculs spéciaux, distincts de ceux qui conduisent aux valeurs des inconnues: on est forcé de chercher successivement les équations (5_5), (4_4), (3_3), (2_2), pour faire cette discussion.

2° *Au point de vue pratique.* La méthode par addition et soustraction pour résoudre n équations à n inconnues comporte, comme le montre l'auteur, $\frac{1}{6}n(n-1)(3n+11)$ multiplications; la nouvelle, $\frac{1}{2}(n-1)(n+1)(n+2)$, nombre dont le rapport au précédent est compris entre $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$, si n surpasse 2. La nouvelle méthode (tout comme la méthode par addition et soustraction, quand on veut la simplifier autant que possible) entraîne un grand nombre de divisions, mais *ce sont des divisions qui doivent toujours se faire exactement* et qui, comme telles, constituent l'un des plus sérieux avantages de cette méthode, parce qu'elles sont un élément de contrôle perpétuel pour le calculateur. Si, en effet, ces divisions se font sans reste, il est extrêmement probable qu'il n'y a pas d'erreur dans les calculs; si le contraire arrive, le calculateur sait qu'il a commis une erreur et où il l'a commise.

Enfin, la méthode des coefficients égaux conduit à un mode nouveau de calcul des déterminants, comme nous allons le montrer sur un exemple.

5. *Nouveau procédé de calcul d'un déterminant.* Soit à calculer le déterminant à six lignes $(abcdef)$.

I. On formera directement les neuf déterminants à deux lignes

$$(ab),(ac),(ad),(ae),(af);\quad (bc),(bd),(be),(bf).$$

Si les cinq premiers ont des valeurs numériques faibles, on peut aussi former les quatre derniers par le théorème (L) de la note du n° 2, au moyen des formules

$$(bc)=\frac{b_1(ac)-c_1(ab)}{a_1},\quad (bd)=\frac{b_1(ad)-d_1(ab)}{a_1},$$

$$(be)=\frac{b_1(ae)-e_1(ab)}{a_1},\quad (bf)=\frac{b_1(af)-f_1(ab)}{a_1}.$$

II. On déduit de là, par le procédé habituel,

$$(abc) = a_3(bc) - b_3(ac) + c_3(ab), \quad (abd), \quad (abe), \quad (abf),$$

puis, par (L), (acd), (ace), (acf), (bcd), (bce), (bcf); ainsi

$$(acd) = \frac{(ac)(abd) - (ad)(abc)}{(ab)}, \quad (bcd) = \frac{(bc)(abd) - (bd)(abc)}{(ab)}.$$

III. Le procédé habituel donne ensuite $(abcd)$, $(abce)$, $(abcf)$; le théorème (L) permet de trouver $(abde)$ et $(abdf)$, $(acde)$ et $(acdf)$, $(bcde)$ et $(bcdf)$. Ainsi

$$(abde) = \frac{(abd)(abce) - (abe)(abcd)}{(abc)},$$

$$(acde) = \frac{(acd)(abce) - (ace)(abcd)}{(abc)},$$

$$(bcde) = \frac{(bce)(abce) - (bce)(abcd)}{(abc)}.$$

IV. On trouve $(abcde)$, $(abcdf)$ par le procédé habituel, et $(abcef)$, $(abdef)$, $(acdef)$, $(bcdef)$, par (L).

V. Enfin $(abcdef)$ s'obtient par l'addition de ces six mineurs multipliés respectivement par f_6, $-e_6$, d_6, $-c_6$, b_6, $-a_6$.

Dans le cas d'un déterminant d'ordre $(n+1) = N$, le nombre total des multiplications est (n° 4) $\frac{N(N-2)(N+1)}{2} + N - \frac{1}{4}N^2(N-1)$, considérablement inférieur à celui que donne la méthode habituelle.

En pratique, pour calculer un déterminant par la méthode qui vient d'être exposée, le procédé le plus facile consistera à opérer comme si l'on avait à résoudre un système de N équations linéaires homogènes, par la méthode des coefficients égaux.

Comme on le voit par cette longue analyse, M. l'abbé Clasen est parvenu à compléter une théorie fondamentale de l'algèbre élémentaire sur laquelle il semblait qu'il n'y eût plus rien à dire après les travaux de M. Rouché. (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1887-1888, t. XII, 1re part., pp. 50-59.)

SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
Y LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
· STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
ES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
FORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
Y LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
· STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
ES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
FORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
SITY LIBRARIES · STANFORD TY LIBRARIES

ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LI
STORAGE AREA [redacted]
TANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVER
515.5
M729
op.9
1883-1889
NIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRA
BRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANF
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES ST
RIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFO
FORD UNIVERSITY LIBR
TANFORD UNIVER
NIVERSITY LIBRA
IBRARIES · STAN
RSITY LIBRARIES · S
ARIES · STANFORD L
FORD UNIVERSIT
To avoid fine, this book should be returned on or before the date last stamped below
S3M-8-61-B0723